S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 510.67:512.57
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 03C60

СЕМАНТИЧЕСКИЕ И СИНТАКСИЧЕСКИЕ СТЕПЕНИ ЖЕСТКОСТИ УНАРОВ

И.А. Сахаров, А.А. Степанова

Представлено И.П. Петровым

Abstract: Degrees of semantic and syntactic rigidity are important characteristics of any structure. Semantic rigidity indicates how close a given structure is to a structure with a singleton automorphism group; syntactic rigidity indicates how close a given structure is to a structure that is the definable closure of the empty set. In this paper we study the semantic and syntactic rigidities of unars, including those satisfying the properties of injectivity and projectivity and their weakened forms: weakly-, quasi-, and pseudo-injectivity, weakly-, quasi-, and pseudo-projectivity. All possible values of pairs of semantic and syntactic rigidity for such unars are described.

Keywords: semantic rigidity, syntactic rigidity, degree of rigidity, unar, injective unar, projective unar.

Sakharov, I.A., Stepanova, A.A. Semantic and syntactic degrees of rigidity of unars.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2025-1638/1 от 10.03.2025).

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

Введение

В данной работе изучаются вопросы, связанные с семантической и синтаксической жесткостью таких структур, как унары. Степени семантической и синтаксической жесткости являются важными характеристиками любой структуры. Семантическая жёсткость показывает, насколько данная структура близка к структуре с одноэлементной группой автоморфизмов; синтаксическая жёсткость показывает, насколько данная структура близка к структуре, являющейся определимым замыканием пустого множества. В работах [1, 2] были исследованы вариации жесткости и их степеней, как в общем случае, так и для специальных сигнатур.

В настоящей работе изучена семантическая и синтаксическая жесткость унаров, в том числе удовлетворяющих свойствам инъективности и проективности и их ослабленным формам. В [3] дается характеризация инъективных, слабо-, квази- и псевдоинъективных, а также проективных, слабо-, квази- и псевдопроективных унаров. В этой статье описаны все возможные значения пар семантической и синтаксической жёсткости для таких унаров.

1 Предварительные сведения и результаты

Напомним некоторые определения из теории унаров (см. [3, 4]). Структура $\mathcal{A} = (A; f)$, где f – унарная операция, называется *унаром*. Унар $\mathcal{B}$ называется *подунаром* унара $\mathcal{A}$, если $\mathcal{B}$ — подструктура структуры $\mathcal{A}$. *Копроизведением унаров* $\mathcal{A}_i$ $(i \in I)$ называется унар $\coprod\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$, являющийся объединением непересекающихся копий унаров $\mathcal{A}_i$ $(i \in I)$. *Компонентой связности* унара $\mathcal{A}$ называется максимальный относительно $\subseteq$ связный подунар унара $\mathcal{A}$. Отметим, что любой унар является копроизведением компонент связности. Для $a \in A$ и $n \in \omega$ введем обозначения:

$$f^0a = a, f^{n+1}a = ff^n(a),$$
$$f^{-n}(a) = \{a' \in \mathcal{A} \mid f^n a' = a\},$$
$$\langle a\rangle_+ = \{a' \in A \mid \exists n \in \omega\colon a' = f^n a\},$$
$$\langle a\rangle_- = \{a' \in A \mid \exists n \in \omega\colon a = f^n a'\}.$$

Элемент $a' \in A$ называется *прообразом элемента* a, если $fa' = a$. Элемент $a \in A$ называется *листом*, если $f^{-1}(a) = \varnothing$. Элемент $a \in A$ называется *циклическим*, если существует положительное $n \in \omega$ такое, что $f^n a = a$, иначе a называется *ациклическим*. Элемент a называется *периодическим*, если $f^t a = f^{t+n} a$ для некоторых $t \geq 0$ и $n \geq 1$. Если a — периодический элемент, то наименьшее из чисел t, для которых существует $n \geq 1$ такое, что $f^t a = f^{t+n} a$, называется *глубиной элемента* a и обозначается $t(a)$. *Хвостом элемента* $a \in \mathcal{A}$ *длины* $n \in \omega$ называется множество $\{a_i \in \mathcal{A} \mid 0 \leq i \leq n\}$, где $a_0 = a$, $fa_i = a_{i-1}$, a_i — ациклический элемент $(1 \leq i \leq n)$. *Хвостом элемента* $a \in \mathcal{A}$ *длины* ∞ называется множество $\{a_i \in \mathcal{A} \mid i \in \omega\}$, где $a_0 = a$, $fa_i = a_{i-1}$, a_i —

ациклический элемент $(i > 0)$. *Расстоянием* $d(a, b)$ между элементами $a, b \in A$ называется число $min\{n + m \mid n, m \in \omega, f^n a = f^m b\}$. Унар $\mathcal{A}$ называется *цепью*, если $A = \{a_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$, $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$, и $fa_i = a_{i+1}$ для любых $i, j \in \mathbb{Z}$. Унар $\mathcal{A}$ называется *полуцепью*, если $A = \{a_i \mid i \in \omega\}$, $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$, и $fa_i = a_{i+1}$ для любых $i, j \in \omega$. Унар $\mathcal{A}$ называется *циклом длины* n, если $A = \{a_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$, где $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$, и $fa_i = a_{i+1}$ при $i < n-1$, $fa_{n-1} = a_0$. Унар $\mathcal{A}$ называется *петлёй*, если A — цикл длины 1.

Частичным унаром назовём множество A, на котором определена частичная унарная операция f. Для произвольного частичного унара $\mathcal{A}$ с единственым элементом без образа обозначим этот элемент $\bar{i}(\mathcal{A})$. Для произвольного частичного унара $\mathcal{A}$ с единственым элементом без прообраза обозначим этот элемент $\bar{p}(\mathcal{A})$.

Для множества A теории T объединение множеств решений формул $\varphi(x, \bar{a})$, $a \in A$, таких, что $\models \exists^{=1} x \varphi(x, \bar{a})$, называется *определимым замыканием* множества A и обозначается $dcl(A)$. Следующие определения и обозначения можно найти в [1, 2]. Пусть A – множество в структуре $\mathcal{M}$. Структура $\mathcal{M}$ называется *семантически A-жесткой*, если любой A-автоморфизм $f \in Aut(\mathcal{M})$ является тождественным. Структура $\mathcal{M}$ называется *синтаксически A-жесткой*, если $\mathcal{M} = dcl(A)$. Структура $\mathcal{M}$ называется *$\exists$-семантически* (*$\exists$-синтаксически*) *n-жесткой*, $n \in \omega$, если $\mathcal{M}$ является семантически (синтаксически) A-жесткой структурой для некоторого своего подмножества A мощности n. Наименьшее n такое, что $\mathcal{M}$ является $\exists$-семантически ($\exists$-синтаксически) n-жесткой структурой, называется *$\exists$-семантической* (*$\exists$-синтаксической*) *степенью жесткости структуры* $\mathcal{M}$ и обозначается $deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{M})$ ($deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{M})$). Если такого n не существует, то полагаем

$$deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{M}) = \infty \ (deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{M}) = \infty).$$

Введем обозначение:

$$deg_2^{\exists}(\mathcal{M}) = \left(deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{M}), deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{M}) \right).$$

Структура $\mathcal{M}$ называется *$\forall$-семантически* (*$\forall$-синтаксически*) *n-жесткой*, $n \in \omega$, если $\mathcal{M}$ является семантически (синтаксически) A-жесткой структурой для любого своего подмножества A мощности n. Наименьшее n такое, что $\mathcal{M}$ является $\forall$-семантически ($\forall$-синтаксически) n-жесткой структурой, называется *$\forall$-семантической* (*$\forall$-синтаксической*) *степенью жесткости* структуры $\mathcal{M}$ и обозначается $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{M})$ ($deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{M})$). Если такого n не существует, то полагаем

$$deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{M}) = \infty \ (deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{M}) = \infty).$$

Введем обозначение:

$$deg_2^{\forall}(\mathcal{M}) = \left(deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{M}), deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{M}) \right).$$

Теорема 1. [1] *Для любой структуры $\mathcal{M}$ и любого $Q \in \{\forall, \exists\}$*

$$deg_{rig}^{Q-sem}(\mathcal{M}) \leq deg_{rig}^{Q-synt}(\mathcal{M}).$$

Предложение 1. *Если $\mathcal{A}$ — конечная структура конечного языка L, то $deg_{rig}^{Q-sem}(\mathcal{A}) = deg_{rig}^{Q-synt}(\mathcal{A})$, где $Q \in \{\forall, \exists\}$.*

Доказательство. Если $deg_{rig}^{Q-sem}(\mathcal{A}) = \infty$, то по теореме 1 $deg_{rig}^{Q-synt}(\mathcal{A}) = \infty$. Пусть $deg_{rig}^{Q-sem}(\mathcal{A}) = n, n \in \omega$ и множество $A_n = \{a_i \mid a_i \in A, 1 \leq i \leq n\}$ такое, что любой A_n-автоморфизм $\varphi \in Aut(\mathcal{A})$ тождественный. Введём отношение эквивалентности $\sim$ на множестве формул $F(L \cup A_n)$ от переменной x языка $L \cup A_n$: $\Phi(x) \sim \Psi(x)$, если $\Phi(\mathcal{A}) = \Psi(\mathcal{A})$. Множество $F(L \cup A_n)/\sim$ является конечным, так как A — конечное множество. Пусть $a \in A$ и $tp_1(a, A_n)/\sim = \{\Phi_1(x)/\sim, \Phi_2(x)/\sim, \ldots, \Phi_k(x)/\sim\}$. Если $b \in tp_1(a, A_n)$, то существует автоморфизм структуры $\mathcal{A}$, переводящий a в b и оставляющий элементы из A_n на месте, следовательно, $a = b$. Тогда $(\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \cdots \wedge \Phi_k)(\mathcal{A}) = \{a\}$. Таким образом, $deg_{rig}^{Q-synt}(\mathcal{A}) = n$. □

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — бесконечный связный унар, $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) \neq 0$, $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) \neq \infty$. Тогда $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A})$.*

Доказательство. Пусть условие леммы выполняется. Если $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = \infty$, то $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) = \infty$. Для элементов унара $\mathcal{A}$ введем отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом:

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists \varphi \in Aut(\mathcal{A}) : \varphi(a) = b.$$

Рассмотрим два случая.

1. Существуют $a, b \in \mathcal{A}, a \neq b, a \sim b, fa = fb$. Введём обозначения: $E_{a,b} = \mathcal{A} \backslash (\langle a \rangle_- \cup \langle b \rangle_-)$ и $E = \{E_{a,b} \mid a, b \in \mathcal{A}, a \sim b, a \neq b, fa = fb\}$. Зафиксируем $a, b \in \mathcal{A}$ такие, что $|E_{a,b}| = max\{\ |e| \mid e\ \in E\}$. Нетрудно понять, что $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = |E_{a,b}| + 1$. Множество $E_{a,b}$ конечно, поскольку $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) \neq \infty$. Следовательно, множество $\langle a \rangle_- \cup \langle b \rangle_-$ бесконечно. Из выбора элементов a, b следует, что в $E_{a,b}$ нет различных элементов c, d таких, что $fc = fd$ и $c \sim d$. Так как $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) \neq \infty$, то $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) = |E_{a,b}| + 1 = deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A})$.

2. Предположим, что случай 1 не выполняется и существуют $a, b \in \mathcal{A}$ такие, что $a \neq b, a \sim b, f^n a = f^m b$ для некоторых различных $n, m \in \omega$. Тогда в $\mathcal{A}$ есть цикл или цепь $\mathcal{C}$. Ясно, что a, b находятся в хвостах различных элементов $\mathcal{C}$. Так как п. 1 не выполняется, то из того, что $\varphi \in Aut(\mathcal{A})$ оставляет некоторый $c \in \mathcal{A}$ на месте, следует, что φ является тождественным автоморфизмом, т.е. $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = 1$. Так как $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) \neq \infty$, то $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) = deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = 1$.

□

Лемма 2. *Если унар $\mathcal{A}$ связный и содержит полуцепь, то*

$$deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}), deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) \in \{0,1,\infty\}.$$

Доказательство. Пусть унар $\mathcal{A}$ связный и содержит полуцепь $\mathcal{P} = \{p_i \mid i \in \omega\}$, $fp_i = p_{i+1}$. Предположим, что $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = n$, $n \in \omega$, $n > 1$, и зафиксируем n произвольных различных элементов из P. Пусть p_t — элемент с наименьшим индексом из зафиксированных. Тогда любой элемент p_s из зафиксированных может быть выражен формулой $p_s = f^{s-t}p_t$. Противоречие. □

Лемма 3. *Если унар $\mathcal{A}$ является копроизведением двух бесконечных унаров, то $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}), deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) \in \{0,1,\infty\}$. Причем если $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = 1$ ($deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) = 1$), то $\mathcal{A}$ — копроизведение двух изоморфных связных унаров $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ таких, что $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_1) = deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_2) = 0$ ($deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{B}_1) = deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{B}_2) = 0$).*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \coprod \mathcal{B}_2$. Если $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_1) = deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_2) = 0$ и $\mathcal{B}_1 \ncong \mathcal{B}_2$, то $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = 0$; если $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_1) = deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_2) = 0$ и $\mathcal{B}_1 \cong \mathcal{B}_2$, то $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = 1$; если $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_1) > 0$, то очевидно, что $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = \infty$. Те же рассуждения справедливы для $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A})$. □

2 Степени семантической и синтаксической жесткости унаров

Введем обозначения, используемые в доказательствах теорем 2 и 3.

Унар $\mathcal{U}_0$ определяем следующим образом: существуют различные элементы $c, a \in \mathcal{U}_0$, удовлетворяющие условиям: $fc = c, fa = c$, для любого $i \in \omega$ элемент a имеет ровно один хвост длины i, и, кроме того, a имеет один бесконечный хвост; других элементов в $\mathcal{U}_0$ нет.

Унар $\mathcal{V}_i$ ($i \in \omega$) определяем следующим образом: в унаре $\mathcal{V}_i$ есть петля, которая имеет $i+1$ хвост длины 1, если $i \in \omega$, или ω хвостов длины 1, если $i = \infty$; других элементов в V_i нет.

Теорема 2. *Для каждой пары $(u,v) \in (\omega \cup \{\infty\})^2, u \le v$, существует унар $\mathcal{A}$ такой, что $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (u,v)$.*

Доказательство. Заметим, что $deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{U}_0) = 0$ и $\mathcal{U}_0 = dcl(\{a'\})$, где a' содержится в хвосте длины ω элемента a, т.е. $deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{U}_0) = 1$. Следовательно, $deg_2^{\exists}(\mathcal{U}_0) = (0,1)$.

Пусть $i \in \omega \cup \{\infty\}, i \neq 0$. Унар $\mathcal{U}_i$ получается из унара $\mathcal{U}_0$ добавлением хвоста длины i к элементу c, если $i \in \omega$, или бесконечного хвоста, если $i = \infty$. Полагаем $\mathcal{U}_{0i} = \coprod\limits_{1 \le j \le i} \mathcal{U}_j$. Ясно, что $deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{U}_{0i}) = 0$ и $deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{U}_{0i}) = i$, т.е. $deg_2^{\exists}(\mathcal{U}_{0i}) = (0,i)$.

Заметим, что $deg_2^{\exists}(\mathcal{V}_i) = (i, i)$ для любого $i \in \omega \cup \{\infty\}$.

Пусть $(u, v) \in (\omega \cup \{\infty\})^2$, $u \leq v$ и $\mathcal{A} = \mathcal{V}_u \coprod \mathcal{U}_{0,v-u}$. Тогда $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (u, v)$. $\square$

Теорема 3.

1) Для любого $u \in \omega \cup \{\infty\}$ существуют унары $\mathcal{A}_u, \mathcal{B}_u, \mathcal{C}_u$ такие, что $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}_u) = (u, u)$, $deg_2^{\forall}(\mathcal{B}_u) = (u, \infty)$ и $deg_2^{\forall}(\mathcal{C}_u) = (0, u)$.

2) Для любого унара $\mathcal{A}$ выполняется свойство (*):

$$deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) \in \{(u, u) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\} \cup \{(u, \infty) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\} \cup \{(0, u) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\}.$$

Доказательство. Покажем 1). Пусть $u \in \omega \cup \{\infty\}$.

Построим унар $\mathcal{A}_u$ такой, что $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}_u) = (u, u)$. Если $u = 0$, то $\mathcal{A}_u$ является петлей. Если $u = 1$, то $\mathcal{A}_u$ является циклом длины 2. Если $u \geq 2$, то $\mathcal{A}_u = \mathcal{V}_u$.

Построим унар $\mathcal{B}_u$ такой, что $deg_2^{\forall}(\mathcal{B}_u) = (u, \infty)$. Поскольку унар $\mathcal{A}_\infty$ построен ($\mathcal{B}_\infty = \mathcal{A}_\infty$), можно считать, что $u \in \omega$. Полагаем $\mathcal{B}_0 = \mathcal{U}_0$ и $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0 \coprod \mathcal{B}_0$. Ясно, что $deg_2^{\forall}(\mathcal{B}_0) = (0, \infty)$ и $deg_2^{\forall}(\mathcal{B}_1) = (1, \infty)$. Для $u \in \omega, u \geq 2$, унар $\mathcal{B}'_u$ определим следующим образом: $\mathcal{B}'_u = \{c_i \mid 0 \leq i \leq u - 2\} \cup \{a_1, a_2\}, fc_0 = c_0, fc_i = fc_{i-1}$ при $i > 0$, $fa_1 = fa_2 = c_{u-2}, |\mathcal{B}'_u| = u + 1$. Унар $\mathcal{B}_u$ получается из унара $\mathcal{B}'_u$ добавлением к элементам a_1, a_2 ровно по одному хвосту длины l для любого $l \in \omega$ и одному бесконечному хвосту. Ясно, что $deg_2^{\forall}(\mathcal{B}_u) = (u, \infty)$.

Построим унар $\mathcal{C}_u$ такой, что $deg_2^{\forall}(\mathcal{C}_u) = (0, u)$. Поскольку унар $\mathcal{B}_0$ построен ($\mathcal{C}_\infty = \mathcal{B}_0$), можно считать, что $u \in \omega$. Индукцией по n определим частичные унары $\mathcal{R}_n$ и элементы $r_n \in \mathcal{R}_n$, $n \in \omega$, так, что f определена на множестве $\mathcal{R}_n \backslash \{r_n\}$. Пусть

$$\mathcal{R}_0 = \{r_0, s_1^0\},$$

где $fs_1^0 = r_0$. Предположим, что частичный унар $\mathcal{R}_{n-1}$ и элемент r_{n-1} определены, $\mathcal{R}_{n-1}^1$ — копия $\mathcal{R}_{n-1}$, элемент $r_{n-1}^1 \in \mathcal{R}_{n-1}^1$ — копия $r_{n-1} \in \mathcal{R}_{n-1}$. Частичный унар $\mathcal{R}_n$ определяем следующим образом:

$$\mathcal{R}_n = \{r_n, s_1^n, s_2^n, \ldots, s_n^n\} \cup \mathcal{R}_{n-1} \cup \mathcal{R}_{n-1}^1,$$

$fs_1^n = r_n, fs_i^n = s_{i-1}^n$ $(2 \leq i \leq n), fr_{n-1} = r_n, fr_{n-1}^1 = s_n^n$. Полагаем

$$\mathcal{R} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{R}_n.$$

Ясно, что $\mathcal{R}$ — унар. Поскольку для каждого частичного унара $\mathcal{R}_n$, $n \in \omega$, существует единственный автоморфизм, то $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{R}) = 0$. Отметим, что для любого элемента $r \in \mathcal{R}_n$ и любой формулы $\phi(x)$ языка $L = \{f\}$ такой, что $\mathcal{R} \models \phi(r)$, найдутся $m > n$ и $r' \in \mathcal{R}_m \backslash \mathcal{R}_n$ такие, что $\mathcal{R} \models \phi(r')$. Следовательно, $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{R}) > 0$. Кроме того, для любого элемента $r \in \mathcal{R}$ расстояния от него до различных копий этого элемента в $\mathcal{R}$ различны. Следовательно, $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{R}) = 1$. Таким образом, $deg_2^{\forall}(\mathcal{R}) = (0, 1)$. Пусть $u \geq 1$. Определим унар $\mathcal{M}_u$ следующим образом: $\mathcal{M}_u = \{m_0, m_1, \ldots, m_{u-1}\}$, $fm_0 = m_0$, $fm_i = fm_{i-1}$ для $1 \leq i \leq u$. Ясно, что $|\mathcal{M}_u| = u$ и $deg_2^{\forall}(\mathcal{M}_u) = (0,0)$. Полагаем $\mathcal{C}_u = \mathcal{R}\coprod\mathcal{M}_{u-1}$. Тогда $deg_2^{\forall}(\mathcal{C}_u) = (0,u)$.

Покажем 2). По предложению 1, по теореме 1 и по п. 1 теоремы 3 достаточно рассмотреть случай, когда $|\mathcal{A}| \geq \omega$, $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) > 0$, $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) \neq \infty$ и $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) \neq \infty$.

Если $\mathcal{A}$ — связный унар, то по лемме 1 для $\mathcal{A}$ выполняется свойство (*).

Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{D}\coprod\mathcal{E}$ и $\mathcal{D},\mathcal{E}$ бесконечны. Тогда по лемме 3 $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}), deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) \in \{0,1,\infty\}$. Следовательно, по теореме 1 свойство (*) выполняется.

Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{D}\coprod\mathcal{E}$, где $\mathcal{D}$ — бесконечный унар, $\mathcal{E}$ — конечный унар. Можно считать, что D — связный унар и $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{D}) \neq \infty$. Тогда по доказанному выше для $\mathcal{D}$ выполняется (*). Если $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{E}) > 0$, тогда $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = \infty$, т.е. свойство (*) выполняется. Предположим, что $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{E}) = 0$. Поскольку $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) > 0$, то $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{D}) > 0$ и выполняется равенство $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{D}) + |E|$. Тогда $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{D}) = deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{D})$ и $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) = deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{D}) + |E|$. Следовательно, $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A})$. Таким образом, свойство (*) выполняется для $\mathcal{A}$. □

3 Степени семантической и синтаксической жесткости проективных унаров

Следующие определения можно найти в [3, 5].

Унар P называется *проективным*, если для любого гомоморфизма $\varphi : P \to A$ и для любого эпиморфизма $\alpha : B \to A$ существует гомоморфизм $\bar{\varphi} : P \to B$ такой, что $\varphi = \alpha\bar{\varphi}$. В таких случаях говорим, что унар P проективен относительно эпиморфизмов из произвольного унара. Унар P называется *слабопроективным*, если он проективен относительно эпиморфизмов из полуцепи. Унар P называется *квазипроективным*, если он проективен относительно эпиморфизмов из себя. Унар P называется *псевдопроективным*, если для любых эпиморфизмов $\varphi, \alpha : P \to A$ существует эндоморфизм $\bar{\varphi} : P \to P$ такой, что $\varphi = \alpha\bar{\varphi}$.

Теорема 4. [5] *Следующие условия эквивалентны:*

1) унар $\mathcal{A}$ проективен;

2) унар $\mathcal{A}$ слабопроективен;

3) $\mathcal{A}$ является копроизведением полуцепей.

Теорема 5. [5] *Унар P квазипроективен тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:*

1) все компоненты связности — полуцепи;

2) выполняются следующие условия:

a) все компоненты связности содержат циклы одинаковой длины;

b) вне циклов нет элементов с двумя прообразами;

c) существует $n \in \omega$ такое, что для любого $p \in P$ верно $n \geqslant t(p)$;

d) глубины всех элементов без прообразов равны;

e) если существует компонента связности с двумя элементами без прообразов p_1 и p_2, то $f^{t(p_1)}p_1 = f^{t(p_2)}p_2$ и все остальные компоненты связности являются циклами.

Теорема 6. [3] *Унар P псевдопроективен тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:*

1) все компоненты связности — полуцепи;

2) все компоненты связности — цепи;

3) выполняются следующие условия:

a) все компоненты связности содержат циклы одинаковой длины;

b) вне циклов нет элементов с двумя прообразами;

c) существует $n \in \omega$ такое, что для любого $p \in P$ верно $n \geqslant t(p)$;

d) глубины всех элементов без прообразов равны;

e) если существует компонента связности с двумя листьями p_1 и p_2, то $f^{t(p_1)}p_1 = f^{t(p_2)}p_2$ и все остальные компоненты связности являются циклами.

Классы всех проективных, слабопроективных, квазипроективных, псевдопроективных полигонов будем обозначать $\mathbf{Proj}, \mathbf{WProj}, \mathbf{QProj}, \mathbf{PProj}$ соответственно. Имеют место следующие соотношения:

$$\mathbf{Proj} = \mathbf{WProj} \subset \mathbf{QProj} \subset \mathbf{PProj}. \tag{1}$$

Теорема 7. *Пусть $K \in \{\mathbf{Proj}, \mathbf{WProj}, \mathbf{QProj}, \mathbf{PProj}\}$.*

1) Для любого $u \in \omega \cup \{\infty\}$ существует унар $\mathcal{A}_u \in K$ такой, что $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}_u) = (u, u)$.

2) Для любого унара $\mathcal{A} \in K$

$$deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) \in \{(u, u) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\}.$$

Доказательство.

1) В силу соотношения (1) утверждение достаточно доказать для $K = \mathbf{Proj}$. По теореме 4 копроизведение полуцепей является проективным унаром. В качестве искомого унара $\mathcal{A}_u$ можно взять копроизведение $u+1$ экземпляра полуцепей, если $u \in \omega$, и копроизведение ω экземпляров полуцепей, если $u = \infty$. Тогда $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}_u) = (u, u)$.

2) В силу соотношения (1) и предложения 1 утверждение достаточно доказать для бесконечного унара $\mathcal{A} \in \mathbf{PProj}$. Если $\mathcal{A}$ является копроизведением бесконечного числа компонент связности или в $\mathcal{A}$ существует компонента связности, содержащая цикл с бесконечным числом листьев, то, пользуясь теоремой 6, легко понять, что $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (\infty, \infty)$. Если $\mathcal{A}$ является копроизведением u полуцепей, $u \in \omega$, то $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (u-1, u-1)$. Если $\mathcal{A}$ является копроизведением u цепей, $u \in \omega$, то $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (u, u)$. Если в $\mathcal{A}$ есть v циклов с одним хвостом и w циклов без хвостов, то, пользуясь теоремой 6, легко понять, что $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (v' + w', v' + w')$, где

$v' = 0$, если $v = 1$, и $v' = v - 1$, если $v > 1$, $w' = w$, если циклы не являются петлями, $w' = w - 1$, если циклы являются петлями. Если $\mathcal{A}$ является копроизведением v циклов без хвостов и цикла с w хвостами, $w > 1$, то, пользуясь теоремой 6, легко понять, что $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (v' + w - 1, v' + w - 1)$, где $v' = 0$, если $v = 1$, и $v' = v - 1$, если $v > 1$. □

Теорема 8. *Пусть $K \in \{\mathbf{Proj}, \mathbf{WProj}\}$.*

1) Для любого $u \in \{0, 1, \infty\}$ существует унар $\mathcal{A}_u \in K$ такой, что $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}_u) = (u, u)$

2) Для любого унара $\mathcal{A} \in K$

$$deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) \in \{(u, u) \mid u \in \{0, 1, \infty\}\}.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} \in K$, $\mathcal{P}$ — полуцепь. Если $\mathcal{A} = \mathcal{P}$, то $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) = (0, 0)$; если $\mathcal{A} = \mathcal{P}_1 \coprod \mathcal{P}_2$, то $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) = (1, 1)$. Рассмотрим случай, когда $\mathcal{A} = \coprod\limits_{\substack{1 \le i \le n, \\ n \ge 3}} \mathcal{P}_i$, где $\mathcal{P}_i$ — копии $\mathcal{P}$. Для любого $m \in \omega$ можно выбрать подмножество $P_m \subset P_3$ так, что P_m-автоморфизм $\varphi \in Aut(\mathcal{A})$ будет менять местами $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$. Следовательно, $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) = (\infty, \infty)$. □

Теорема 9. *Пусть $K \in \{\mathbf{QProj}, \mathbf{PProj}\}$.*

1) Для любого $u \in \omega \cup \{\infty\}$ существует унар $\mathcal{A}_u \in K$ такой, что $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}_u) = (u, u)$.

2) Для любого унара $\mathcal{A} \in K$

$$deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) \in \{(u, u) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\}.$$

Доказательство.

1) Пусть $\mathcal{C}$ — петля. Если $u \in \omega$, то искомый унар $\mathcal{A}_u$ — копроизведение $u+1$ копии унара $\mathcal{C}$; если $u = \infty$, то искомый унар $\mathcal{A}_u$ — копроизведение ω копий унара $\mathcal{C}$. По теореме 5 унар $\mathcal{A}_u \in \mathbf{QProj} \subseteq \mathbf{PProj}$.

2) В силу соотношения (1) утверждение достаточно доказать для унара $\mathcal{A} \in \mathbf{PProj}$. Если $\mathcal{A}$ является копроизведением бесконечного числа компонент связности или в $\mathcal{A}$ существует компонента связности, содержащая цикл с бесконечным числом листьев, то, пользуясь теоремой 6, легко понять, что $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) = (\infty, \infty)$. Если $\mathcal{A}$ является копроизведением цепей или полуцепей, то $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) = (u, u)$, где $u \in \{0, 1, \infty\}$. Если $\mathcal{A}$ является копроизведением циклов с одним хвостом и циклов без хвостов или копроизведением циклов без хвостов и цикла с хвостами, то очевидно, что $deg_{rig}^{\forall - sem}(\mathcal{A}) = deg_{rig}^{\forall - synt}(\mathcal{A})$. □

4 Степени семантической и синтаксической жесткости инъективных унаров

Унар Q называется *инъективным*, если для любого гомоморфизма $\varphi : A \to Q$ и для любого мономорфизма $\alpha : A \to B$ существует гомоморфизм $\bar{\varphi} : B \to Q$ такой, что $\varphi = \bar{\varphi}\alpha$. В таких случаях говорим, что унар Q

инъективен относительно вложений в произвольный унар. Унар Q называется *слабоинъективным*, если он инъективен относительно вложений в полуцепи. Унар Q называется *квазиинъективным*, если он инъективен относительно вложений в себя. Унар Q называется *псевдоинъективным*, если для любых мономорфизмов $\varphi, \alpha : A \to Q$ существует эндоморфизм $\bar{\varphi} : Q \to Q$ такой, что $\varphi = \bar{\varphi}\alpha$.

Теорема 10. [3] *Унар Q инъективен тогда и только тогда, когда он содержит петлю и не имеет листьев.*

Теорема 11. [3] *Унар Q слабоинъективен тогда и только тогда, когда он не имеет листьев.*

Теорема 12. [6] *Унар $Q = \coprod\limits_{i \in I} Q_i$, где Q_i связный для любого $i \in I$, квазиинъективен тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) если Q содержит полуцепь, то в Q нет листьев;

2) если Q_i, Q_j содержат соответственно циклы C_i, C_j такие, что длина C_i делится на длину C_j, то глубина любого элемента из Q_i не превосходит глубины любого листа из Q_j.

Теорема 13. [3] *Унар $Q = \coprod\limits_{i \in I} Q_i$, где Q_i связный для любого $i \in I$, псевдоинъективен тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) если Q_i содержит полуцепь, то в Q_i нет листьев;

2) если Q_i, Q_j содержат циклы равной длины, то глубина любого элемента из Q_i не превосходит глубины любого листа из Q_j.

Классы всех инъектинвых, слабоинъектинвых, квазиинъектинвых, псевдоинъектинвых полигонов будем обозначать $\mathbf{Inj}, \mathbf{WInj}, \mathbf{QInj}, \mathbf{PInj}$ соответственно. Имеют место следующие соотношения:

$$\mathbf{Inj} \subset \mathbf{WInj} \subset \mathbf{QInj} \subset \mathbf{PInj}. \tag{2}$$

Теорема 14. *Пусть $K \in \{\mathbf{Inj}, \mathbf{WInj}, \mathbf{QInj}, \mathbf{PInj}\}$. Для каждой пары $(u, v) \in (\omega \cup \{\infty\})^2, u \leq v$, существует унар $\mathcal{A} \in K$ такой, что $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (u, v)$.*

Доказательство. В силу соотношения (2) достаточно показать, что для каждой пары $(u, v) \in (\omega \cup \{\infty\})^2, u \leq v$, существует инъективный унар $\mathcal{A}$ такой, что $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (u, v)$. Напомним, что для частичного унара $\mathcal{U}$ с единственым элементом без образа обозначаем этот элемент $\bar{i}(\mathcal{U})$.

Построим унар $\mathcal{B}$ такой, что $deg_2^{\exists}(\mathcal{B}) = (0, 1)$. Определим частичные унары $\mathcal{B}_n$, $\overline{\mathcal{B}_n}$ $(n \in \omega)$ следующим образом: $\mathcal{B}_0 = \{b_i \mid i \in \omega\}$, где $f(b_i) = b_{i-1}$ для $i > 0$; $\overline{\mathcal{B}}_n = \mathcal{B}_n \cup \{c_i \mid 0 \leq i \leq n\}$, где $f\bar{i}(\mathcal{B}_n) = c_n$, $fc_i = c_{i-1}$ для $i > 0$; $\mathcal{B}_{n+1} = \bigcup\limits_{i \in \omega} \overline{\mathcal{B}}^i_n$, где $\overline{\mathcal{B}}^i_n$ - копии $\overline{\mathcal{B}}_n$, $f\bar{i}(\overline{\mathcal{B}}^i_n) = \bar{i}(\mathcal{B}^{i-1}_n)$ для $i > 0$, где $\mathcal{B}_n^i$ - копии $\mathcal{B}_n$ и $\mathcal{B}_n^i \subset \overline{\mathcal{B}}_n^i$. Унар $\mathcal{B}$ определим следующим образом: $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{B}_n \cup \{p_i \mid i \in \omega\}$, где $fp_i = p_{i+1}$ и $f\bar{i}(B_n) = p_0$ для всех $n \in \omega$. Ясно, что $deg_2^{\exists}(\mathcal{B}) = (0,1)$.

Для $n \in \omega$ унар $\mathcal{A}_n$ определим следующим образом: $\mathcal{A}_n = \mathcal{B} \cup \{a_i \mid i \in \omega\}$ и $fa_i = a_{i-1}$ при $i \geq 0$, $fa_0 = p_{n+1}$. Очевидно, $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}_n) = (0,1)$ для любого n. Пусть $\mathcal{A}_{0i}$ — копии $\mathcal{A}_0$, $i \in \omega, \mathcal{C}$ — петля.

Для $(u,v) \in \omega^2, u \leq v$ искомый унар $\mathcal{A}$ выглядит так:

$$\coprod_{0\leq i\leq u} \mathcal{A}_{0i} \sqcup \coprod_{1\leq j\leq v-u-1} \mathcal{A}_j \sqcup \mathcal{C}.$$

Для $(u,v) = (\infty,\infty)$ искомый унар $\mathcal{A}$ выглядит так:

$$\coprod_{i\in\omega} \mathcal{A}_{0i} \sqcup \mathcal{C}.$$

Для $(u,v) = (n,\infty), n \in \omega$ искомый унар $\mathcal{A}$ выглядит так:

$$\coprod_{1\leq i\leq n+1} \mathcal{A}_{0i} \sqcup \coprod_{j\in\omega\setminus\{0\}} \mathcal{A}_j \sqcup \mathcal{C}.$$

Теорема доказана. □

Теорема 15.

1) Для любого $u \in \omega \cup \{\infty\}$ *существуют унары* $\mathcal{A}_u, \mathcal{B}_u \in \mathbf{Inj}$ *такие, что* $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}_u) = (u,\infty)$, $deg_2^{\forall}(\mathcal{B}_u) = (u,u)$. *Кроме того, существует унар* $\mathcal{C}_{(0,2)} \in \mathbf{Inj}$ *такой, что* $deg_2^{\forall}(\mathcal{C}_{(0,2)}) = (0,2)$.

2) Для любого унара $\mathcal{A} \in \mathbf{Inj}$

$$deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) \in \{(u,\infty) \mid u \in \omega\} \cup \{(u,u) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\} \cup \{(0,2)\}.$$

Доказательство.

1) Покажем, что для любого $u \in \omega$ существует инъективный унар $\mathcal{A}_u$ такой, что $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}_u) = (u,\infty)$. Пусть $\mathcal{R}$ — частичный унар такой, что $\mathcal{R} = \{r_i \mid i \in \omega\}, fr_i = r_{i-1}(i > 0)$, $\mathcal{R}_i$ $(i \in \omega)$ — копии $\mathcal{R}$. Определим частичный унар $\mathcal{R}'$ следующим образом: $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup \bigcup\limits_{i\in\omega} \mathcal{R}_i, f\bar{i}(\mathcal{R}_i) = r_i \in \mathcal{R}$. Пусть $\mathcal{R}'_i$ — копии $\mathcal{R}'$. Определим частичные унары $\overline{\mathcal{R}}_i, i \in \omega$, следующим образом: $\overline{\mathcal{R}}_i = \mathcal{R}'_i \cup \{r'_j \mid 0 \leq j \leq i\}, f\bar{i}(\mathcal{R}'_i) = r'_i, fr'_j = r'_{j-1}, j > 0$. Пусть $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{i\in\omega} \overline{\mathcal{R}}_i/\Theta$, где Θ — отношение эквивалентности на $\bigcup\limits_{i\in\omega} \overline{\mathcal{R}}_i$ такое, что

$$(x,y) \in \Theta \Leftrightarrow x = y \vee \exists i,j \in \omega(x = \bar{i}(\overline{\mathcal{R}}_i), y = \bar{i}(\overline{\mathcal{R}}_j)).$$

Элемент $\bar{i}(\overline{\mathcal{R}}_i)/\Theta$ обозначим a. Тогда $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$, где полагаем $fa = a$. Ясно, что $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 \sqcup \mathcal{A}_0$. При $i \geq 2$ определим $\mathcal{A}_i$ следующим образом: $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}^1 \cup \mathcal{A}^2 \cup \{a_j \mid 0 \leq j \leq i-2\}$, где $\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2$ — копии частичного унара $\mathcal{A}$, $f\bar{i}(\mathcal{A}^1) = f\bar{i}(\mathcal{A}^2) = a_{i-2}$, $fa_j = a_{j-1}, j > 0, fa_0 = a_0$. Определим $\mathcal{A}_\infty$ как $\mathcal{A}_0 \sqcup \mathcal{A}_0 \sqcup \mathcal{A}_0$. Очевидно, $A_u \in \mathbf{Inj}$ для любого $u \in \omega \cup \{\infty\}$.

Покажем, что для любого $v \in \omega \cup \{\infty\}$ существует инъективный унар $\mathcal{B}_v$ такой, что $deg_2^{\forall}(\mathcal{B}_v) = (v,v)$. Если $v \in \omega$, то в качестве $\mathcal{B}_v$ можно взять копроизведение $v+1$ петли; если $v=\infty$, то в качестве $\mathcal{B}_v$ можно взять копроизведение ω петель.

Напомним, что для частичного унара $\mathcal{U}$ с единственным элементом без прообраза обозначаем этот элемент $\bar{p}(\mathcal{U})$. Построим инъективный унар $\mathcal{C}_{(0,2)}$ такой, что $deg_2^{\forall}(\mathcal{C}_{(0,2)}) = (0,2)$. Пусть $\mathcal{P} = \{a, b, p_0, p_1, p_2, \dots\}$ — частичный унар, $fb = a$ $fp_i = fp_{i-1}$ при $i > 0$, $fp_0 = a$. Для $u \geq 1$ введём обозначение: $\mathcal{S}_u = \bigcup\limits_{1\leq i\leq u} \mathcal{P}_i$, где $\mathcal{P}_i$ — копия $\mathcal{P}$ для всех i, $1 \leq i \leq u$, $f\bar{i}(\mathcal{P}_i) = \bar{p}(\mathcal{P}_{i-1})$ для $i > 1$. Сначала построим унар $\mathcal{C}_{(0,1)}$ такой, что $deg_2^{\forall}(\mathcal{C}_{(0,1)}) = (0,1)$. Пусть

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{S}_1,$$

$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cup \{s_1^2\} \cup \mathcal{S}_2,$$

$$\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_2 \cup \{s_1^3, s_2^3\} \cup \mathcal{R}_2^1 \cup \{s^3\} \cup \mathcal{S}_3,$$

$$\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_{n-1} \cup \{s_i^n \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \mathcal{R}_{n-1}^1 \cup \{s^n\} \cup \mathcal{S}_n,$$

где $n \geq 3$, $\mathcal{R}_{n-1}^1$ — копия $\mathcal{R}_{n-1}$, $fs_1^n = \bar{p}(\mathcal{R}_{n-1})$, $fs_i^n = s_{i-1}^n, i > 1$, $f\bar{i}(\mathcal{R}_{n-1}^1) = s_{n-1}^n$, $fs^n = \bar{p}(\mathcal{R}_{n-1}^1)$, $f\bar{i}(\mathcal{S}_n) = s^n$. Полагаем

$$\mathcal{C}_{(0,1)} = \bigcup_{i\in\omega\setminus\{0\}} \mathcal{R}_i \cup \{c_j \mid j \in \omega\},$$

где $f\bar{i}(\bigcup\limits_{i\in\omega\setminus\{0\}} \mathcal{R}_i) = c_0$, $fc_i = c_{i+1}$. Тогда $\mathcal{C}_{(0,2)} = \mathcal{C} \sqcup \mathcal{C}_{(0,1)} \in \mathbf{Inj}$, где $\mathcal{C}$ — петля. Ясно, что $deg_2^{\forall}(\mathcal{C}_{(0,2)}) = (0,2)$.

2) Пусть $\mathcal{A}$ — бесконечный инъективный унар, $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) = (u,v)$. Рассмотрим три случая.

а) Предположим, что $\mathcal{A}$ — бесконечный связный унар, a — петля в $\mathcal{A}$. Тогда a — формульный элемент. Следовательно, $u \neq 1$ и $v \neq 1$. По лемме 1, если $u \neq 0$, $u \neq \infty$ и $v \neq \infty$, то $u = v$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $u = 0$ и $v \neq \infty$. Предположим, что $v > 1$. Индукцией по $k \in \omega$ покажем, что любой элемент $\mathcal{A}$, находящийся на расстоянии k от a, формульный. Пусть b находится на расстоянии k от a и b — формульный элемент. Если у b число прообразов конечно, то, поскольку $u = 0$, все эти прообразы формульные. Предположим, что число прообразов b бесконечно и $C = \{c_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех прообразов b, где $|I| \geq \omega$. На множестве C для произвольного $k \in \omega$ введем отношение $\sim_k$ эквивалентности:

$$c \sim_k d \Leftrightarrow \text{частичные унары} \bigcup_{0\leq l\leq k} f^l(c) \text{ и } \bigcup_{0\leq l\leq k} f^l(d) \text{ изоморфны}$$

для любых $c, d \in C$. Пусть $c_0, \dots, c_v \in C$. Покажем, что c_0 — формульный элемент. Поскольку $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) = v$, то существует формула $\Psi(x, y_1, \dots, y_v)$ такая, что $\Psi(\mathcal{A}, c_1, \dots, c_v) = \{c_0\}$. Существует $k > 0$ такое, что в формуле $\Psi(x, y_1, \dots, y_v)$ частично описано строение и мощности $x/\sim_k$ и $y_i/\sim_k$ $(1 \leq i \leq v)$. Существуют формулы $\Phi_i(x)$ такие, что

$\Phi_i(\mathcal{A}) = c_i/\sim_k$. Отсюда следует, что

$$\{c_0\} = \exists y_1 \dots \exists y_v(\Psi(\mathcal{A}, y_1, \dots, y_v) \wedge \bigwedge_{1\leq i\leq v} \Phi_i(y_i)).$$

Таким образом, c_0 — формульный элемент и $v = 0$.

б) Предположим, что $\mathcal{A}$ — копроизведение бесконечного числа конечных унаров. Тогда по теореме 10 $\mathcal{A}$ — копроизведение циклов. Следовательно, $u = \infty$.

в) Предположим, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \coprod \mathcal{B}_2$ и в $\mathcal{A}$ есть бесконечный связный подунар. Можно считать, что $\mathcal{B}_1$ — бесконечный связный унар.

в.1) Пусть $\mathcal{B}_2$ — бесконечный унар. По лемме 3 $u, v \in \{0, 1, \infty\}$. Пусть $u = 1$. Тогда по лемме 3 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ — изоморфные связные унары и $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_1) = deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_2) = 0$. Тогда по теореме 10 в B_1 и B_2 есть петля. Следовательно, $v \in \{1, \infty\}$. Пусть $u = 0$. Тогда $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_1) = deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_2) = 0$. Можно считать, что унар $\mathcal{B}_1$ содержит петлю. По доказанному в п. а) $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{B}_1) \in \{0, \infty\}$. Так как $v \in \{0, 1, \infty\}$ и $u = 0$, то $v \in \{0, \infty\}$.

в.2) Пусть $\mathcal{B}_2$ — конечный унар. Если $\mathcal{B}_2$ содержит цикл длины больше 1 или две петли, то $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = \infty$. Следовательно, достаточно рассмотреть случай, когда $\mathcal{B}_2$ — петля. Тогда $u \neq 1, v \neq 1$. Пусть $u = 0$. В этом случае $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_1) = 0$. Предположим, что $v \geq 3$ и $v \neq \infty$. Тогда $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{B}_1) \geq 2$. По лемме 2 в $\mathcal{B}_1$ есть цикл. Поскольку $u = 0$, все элементы цикла формульные. Тогда так же, как в пункте а), доказывается, что $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{B}_1) \in \{0, \infty\}$. Следовательно, $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) \in \{0, \infty\}$. Противоречие. Пусть $u > 1$ и $u \neq \infty$. Тогда $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_1) > 0$. По лемме 1 $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{B}_1) = deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_1)$ или $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{B}_1) = \infty$. Следовательно, $u = v$ или $v = \infty$. □

Теорема 16. *Пусть* $K \in \{\mathbf{WInj}, \mathbf{QInj}\}$.

1) Для любого $u \in \omega \cup \{\infty\}$ *существуют унары* $\mathcal{A}_u, \mathcal{B}_u \in K$ *такие, что* $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}_u) = (u, \infty)$, $deg_2^{\forall}(\mathcal{B}_u) = (u, u)$. *Кроме того, существуют унары* $\mathcal{C}_{(0,1)}, \mathcal{C}_{(0,2)} \in K$ *такие, что* $deg_2^{\forall}(\mathcal{C}_{(0,1)}) = (0, 1)$, $deg_2^{\forall}(\mathcal{C}_{(0,2)}) = (0, 2)$.

2) Для любого унара $\mathcal{A} \in K$

$$deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) \in \{(u, \infty) \mid u \in \omega\} \cup \{(u, u) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\} \cup \{(0, 1), (0, 2)\}.$$

Доказательство.

1) Поскольку $\mathbf{Inj} \subset \mathbf{WInj} \subset \mathbf{QInj}$, унары $\mathcal{A}_u, \mathcal{B}_u, u \in \omega \cup \{\infty\}, \mathcal{C}_{(0,2)}$ построены в доказательстве теоремы 15. Заметим, что унар $\mathcal{C}_{(0,1)}$, построенный в доказательстве теоремы 15, является слабоинъективным и квазиинъективным.

2) Утверждение достаточно доказать для $K = \mathbf{QInj}$. Пусть $\mathcal{A} \in \mathbf{QInj}$, $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) = (u, v)$. Рассмотрим три случая.

а) Предположим, что $\mathcal{A}$ — бесконечный связный унар. Если $u \neq \{0, \infty\}$, то по лемме 1 $u = v$. Пусть $u = 0$. Если в $\mathcal{A}$ есть цикл, то все элементы цикла формульные и так же, как в пункте 2) а) доказательства теоремы 15, показывается, что $v \in \{0, \infty\}$. Предположим, что в $\mathcal{A}$ нет цикла. Тогда по лемме 2 $u, v \in \{0, 1, \infty\}$. Следовательно, если $u = 0$, то $v \in \{0, 1, \infty\}$; если $u = 1$, то $v \in \{1, \infty\}$.

б) Предположим, что $\mathcal{A}$ — копроизведение бесконечного числа конечных унаров. Если в $\mathcal{A}$ есть две изоморфных компоненты связности, то $u = \infty$. Если в $\mathcal{A}$ есть компонента связности, $\forall$-семантическая степень жесткости которой больше 0, то $u = \infty$. В остальных случаях $u = 0$.

в) Предположим, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \coprod \mathcal{B}_2$ и в $\mathcal{A}$ есть бесконечный связный подунар. Можно считать, что $\mathcal{B}_1$ — бесконечный связный унар.

в.1) Пусть $\mathcal{B}_2$ — бесконечный унар. По лемме 3 $u, v \in \{0, 1, \infty\}$. Следовательно, если $u = 0$, то $v \in \{0, 1, \infty\}$; если $u = 1$, то $v \in \{1, \infty\}$.

в.2) Пусть $\mathcal{B}_2$ — конечный унар. Если в $\mathcal{B}_1$ есть полуцепь, то по теореме 12 $\mathcal{B}_2$ — копроизведение циклов, причем если $\mathcal{B}_2$ содержит цикл длины больше 1 или две петли, то $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = \infty$; если $\mathcal{B}_2$ — петля, то $\mathcal{A}$ — инъектвный унар и по 15 пункт 2) теоремы 16 выполняется. Предположим, что в $\mathcal{B}_1$ нет полуцепи. Если в $\mathcal{B}_1$ есть листья, то по теореме 12 все они имеют одинаковую глубину и их число бесконечно, тогда $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_1) = \infty$ и $u = \infty$. Если в $\mathcal{B}_1$ нет листьев и $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_1) \neq \infty$, то по п. а) данной теоремы $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_1) = 0$ или $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_1) = deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{B}_1)$, при этом если $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_2) = 0$, то $u = 0$ и $v \in \{0, \infty\}$, иначе $u = \infty$. $\square$

Теорема 17.

*1) Для любого $u \in \omega \cup \{\infty\}$ существуют унары $\mathcal{A}_u, \mathcal{B}_u, \mathcal{C}_u \in$ **PInj** такие, что $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}_u) = (u, \infty)$, $deg_2^{\forall}(\mathcal{B}_u) = (u, u)$, $deg_2^{\forall}(\mathcal{C}_u) = (0, u)$.*

*2) Для любого унара $\mathcal{A} \in$ **PInj***

$$deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) \in \{(u, u) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\} \cup \{(u, \infty) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\} \cup \{(0, u) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\}.$$

Доказательство.

1) Поскольку **Inj** $\subset$ **WInj** $\subset$ **PInj**, унары $\mathcal{A}_u, \mathcal{B}_u$ $(u \in \omega \cup \{\infty\})$, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_{(0,1)}$, $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_{(0,2)}$ из теоремы 15 являются псевдоинъективными. Построим унары $\mathcal{C}_u$ для $u \geq 3$:

$$\mathcal{C}_u = \mathcal{C}_1 \sqcup \{c_i \mid 0 \leq i \leq u-2\}, fc_i = c_{i-1} \ (i > 0), fc_0 = c_0.$$

2) Пусть $\mathcal{A} \in$ **PInj**, $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) = (u, v)$. Рассмотрим три случая.

а) Предположим, что $\mathcal{A}$ — бесконечный связный унар. Предположим, что в $\mathcal{A}$ нет цикла. Тогда по лемме 2 $u, v \in \{0, 1, \infty\}$. Следовательно, если $u = 0$, то $v \in \{0, 1, \infty\}$; если $u = 1$, то $v \in \{1, \infty\}$. Предположим, что в $\mathcal{A}$ есть цикл. В силу леммы 1 достаточно рассмотреть случай, когда $u = 0$. Тогда все элементы цикла и листья формульные. Так же как в пункте 2) а) доказательства теоремы 15, показывается, что $u = v$, либо $v = \infty$.

б) Предположим, что $\mathcal{A}$ — копроизведение бесконечного числа конечных унаров. Если в $\mathcal{A}$ есть две изоморфных компоненты связности, то $u = \infty$. Если в $\mathcal{A}$ есть компонента связности, $\forall$-семантическая степень жесткости которой больше 0, то $u = \infty$. В остальных случаях $u = 0$.

в) Предположим, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \coprod \mathcal{B}_2$ и в $\mathcal{A}$ есть бесконечный связный подунар. Можно считать, что $\mathcal{B}_1$ — бесконечный связный унар.

в.1) Пусть $\mathcal{B}_2$ — бесконечный унар. По лемме 3 $u, v \in \{0, 1, \infty\}$. Следовательно, если $u = 0$, то $v \in \{0, 1, \infty\}$; если $u = 1$, то $v \in \{1, \infty\}$.

в.2) Пусть $\mathcal{B}_2$ — конечный унар. Если в $\mathcal{B}_2$ есть две изоморфных компоненты связности, то $u = \infty$. Если в $\mathcal{B}_2$ есть компонента связности, $\forall$-семантическая степень жесткости которой больше 0, то $u = \infty$. Предположим, что для $\mathcal{B}_2$ эти условия не выполняются. Тогда $deg_2^{\forall}(\mathcal{B}_2) = (0, 0)$. Если $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_1) \neq 0$, то по лемме 1 $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{B}_1) = deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_1)$ и $u = v$. $\square$

References

[1] S.V. Sudoplatov, *Variations of Rigidity*, The Bulletin of Irkutsk State University, Series Mathematics, **47** (2024), 119–136.

[2] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, *Variations of Rigidity for Ordered Theories*, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **48** (2024), 129–144.

[3] I.A. Sakharov, *Projective and injective unars*, Dal'nevost. Mat. Zh., **24**:1 (2024), 107–119.

[4] L.A. Skornyakov, *Elements of General Algebra*, Moscow, Nauka, 1983.

[5] M. Kilp, U. Knauer, A.V. Mikhalev *Monoids, acts and categories*, Berlin, W. de Gruyter, 2000.

[6] E. Jungabel, D. Masulovic. *Homomorphism-homogeneous monounary algebras*, Math. Slovaca, **63**:5 (2013), 993–1000.

Igor Aleksandrovich Sakharov
Far Eastern Federal University,
10 Ajax Bay, Russky Island,
690922, Vladivostok, Russia
Email address: sakharov.ial@dvfu.ru

Alena Andreevna Stepanova
Far Eastern Federal University,
10 Ajax Bay, Russky Island,
690922, Vladivostok, Russia
Email address: stepltd@mail.ru