Примеры J-логик с интерполяционными свойствами*

В.Ф. Юн

13 декабря 2025 г.

Аннотация

Статья посвящена проблеме интерполяции над минимальной логикой J. Мы рассматриваем два расширения минимальной логики J. Используя алгебраические критерии интерполяционных свойств докажем, что одна из этих логик обладает CIP, другая — нет, но имеет свойство IPR.

1 Введение

Статья посвящена проблеме интерполяции [1] в расширениях минимальной логики Йохансона J [2].

Известно, что сама логика J и наиболее важные ее расширения обладают свойством CIP [3]. В то же время неизвестно, конечно или бесконечно число J-логик с этим свойством.

Проблема интерполяции полностью решена для класса стройных J-логик [4, 5, 6], включающего в себя суперинтуиционистские и негативные логики. В частности, доказано, что существует лишь конечное число стройных логик с интерполяционными свойствами CIP и IPR. Все эти логики описаны, и доказаны их узнаваемость и разрешимость свойств CIP и IPR на классе стройных логик. В классе конечнослойных предгейтинговых логик доказано, что существует лишь конечное число логик со свойством CIP [7]. Однако проблема интерполяции над логикой J еще далека от своего решения.

В этой статье мы рассматриваем два расширения минимальной логики. Используя алгебраические критерии интерполяционных свойств докажем, что одна из этих логик обладает CIP, другая — нет, но имеет свойство IPR.

2 Предварительные сведения

Язык логики J содержит в качестве исходных связок $\&$, $\vee$, $\to$, $\bot$, $\top$; отрицание определяется как сокращение: $\neg A = A \to \bot$; $(A \leftrightarrow B) = (A \to B)\&(B \to A)$. Формула называется *позитивной*, если она не содержит вхождений константы $\bot$. Логика J может быть задана исчислением, которое имеет те же

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0011)

самые схемы аксиом, что и позитивное интуиционистское исчисление Int^+, и единственное правило вывода modus ponens: $A, A \to B \ / \ B$.

Под J-*логикой* мы понимаем любое множество формул, содержащее все аксиомы исчисления J и замкнутое относительно modus ponens и правила подстановки. Если A – произвольная формула, через $(L + A)$ обозначаем наименьшую логику, содержащую $L \cup \{A\}$. Обозначаем

$$\mathrm{Int} = \mathrm{J} + (\bot \to p),\ \mathrm{Neg} = \mathrm{J} + \bot,\ \mathrm{For} = \mathrm{J} + p,$$

$$\mathrm{Od} = \mathrm{J} + \neg\neg(\bot \to p),\ \mathrm{JX} = \mathrm{J} + ((p \to q) \vee (q \to p)).$$

Логика называется *нетривиальной*, если она не совпадает с множеством всех формул For. *Суперинтуиционистской логикой* (с.и.л.) называется J-логика, содержащая интуиционистскую логику Int, а *негативной* – J-логика, содержащая логику Neg. Логика L называется *паранепротиворечивой*, если не содержит ни Int, ни Neg. J-логику называем *стройной,* если она содержит JX, *предгейтинговой,* если она содержит Od.

Если $\mathbf{p}$ — список переменных, то через $A(\mathbf{p})$ обозначаем формулу, все переменные которой входят в $\mathbf{p}$, а через $\mathcal{F}(\mathbf{p})$ — множество всех таких формул.

Говорим, что логика L обладает *интерполяционным свойством Крейга CIP* [1, 8], если она удовлетворяет условию (здесь списки $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ попарно не пересекаются):

CIP. Если $\vdash_L A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to B(\mathbf{p}, \mathbf{r})$, то существует такая формула $C(\mathbf{p})$, что $\vdash_L A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to C(\mathbf{p})$ и $\vdash_L C(\mathbf{p}) \to B(\mathbf{p}, \mathbf{r})$.

Мы также рассмотрим *ограниченное интерполяционное свойство* IPR, введенное в [9]:

IPR. Если $A(\mathbf{p}, \mathbf{q}), B(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \vdash_L C(\mathbf{p})$, то существует формула $A'(\mathbf{p})$ такая, что $A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \vdash_L A'(\mathbf{p})$ и $A'(\mathbf{p}), B(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \vdash_L C(\mathbf{p})$.

Во всех J-логиках свойство CIP влечет IPR.

В [10] было найдено описание всех суперинтуиционистских логик с интерполяционным свойством Крейга CIP. Существует лишь конечное число суперинтуиционистских логик, обладающих свойством CIP. Все позитивные логики со свойством CIP были описаны в [11], где было также начато изучение этого свойства в J-логиках.

3 Алгебраическая семантика

Алгебраическая семантика минимальной логики строится с помощью так называемых J-*алгебр*, то есть алгебр $\mathbf{A} =< A; \&, \vee, \to, \bot, \top >$, удовлетворяющих условиям:

$< A; \&, \vee, \to, \bot, \top >$ есть решетка относительно $\&, \vee$ с наибольшим элементом $\top$,

$z \leq x \to y \iff z \& x \leq y$,

$\bot$ — произвольный элемент в A.

Далее под алгебрами мы понимаем J-алгебры.
J-алгебра называется *гейтинговой*, если $\bot$ — наименьший элемент множества A, и *негативной алгеброй*, если $\bot$ — наибольший элемент множества A.

Формула B *общезначима в алгебре* $\mathbf{A}$, если в $\mathbf{A}$ выполнено тождество $B = \top$.

Напомним [11], что J-алгебра $\mathbf{A}$ является подпрямо неразложимой тогда и только тогда, когда она имеет опремум $\Omega_{\mathbf{A}}$, т.е. наибольший элемент в множестве $\mathbf{A} - \{\top\}$. Алгебра $\mathbf{A}$ называется *вполне связной*, если удовлетворяет условию:

$$x \vee y = \top \Rightarrow (x = \top \text{ или } y = \top).$$

Называем алгебру *финитно неразложимой*, если она не разлагается в подпрямое произведение конечного числа отличных от нее сомножителей. Известно, что алгебра финитно неразложима тогда и только тогда, когда она вполне связна.

Известно [12], что класс всех J-алгебр образует многообразие, то есть может быть задан системой тождеств [13]. Для любой J-логики L через $V(L)$ обозначается многообразие J-алгебр, в которых общезначимы все формулы из L.

Говорим, что класс алгебр *порождает логику* L, если он порождает многообразие $V(L)$.

Хорошо известно, что любая логика L порождается классом всех финитно неразложимых конечно порожденных алгебр, удовлетворяющих L.

Пусть V — класс алгебр, замкнутый относительно изоморфизмов. Класс V называется *амальгамируемым*, если он удовлетворяет следующему условию AP для любых алгебр $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ из V:

(AP) если $\mathbf{A}$ есть общая подалгебра алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, то существуют $\mathbf{D}$ из V и мономорфизмы $\delta : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$.

Тройка $(\mathbf{D}, \delta, \varepsilon)$ называется *амальгамой* для $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$.

Класс V обладает *ограниченным свойством амальгамируемости* RAP [9], если выполнено условие:

(RAP) Для любых $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$ таких, что $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, существуют $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и ограничение δ' гомоморфизма δ на $\mathbf{A}$ является мономорфизмом.

Следующая теорема была доказана в [11].

Теорема 3.1. *Для любой логики L из $E(J)$ следующие условия эквивалентны:*

1) L обладает интерполяционным свойством Крейга;

2) $V(L)$ амальгамируемо;

3) выполнено условие AP для любых вполне связных $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ *из $V(L)$.*

Что касается ограниченного интерполяционного свойства, имеет место

Теорема 3.2. [11] *Для любой логики L из $E(\mathrm{J})$ следующие условия эквивалентны:*

1) L имеет IPR;

2) $V(L)$ имеет RAP;

3) для любых подпрямо неразложимых J*-алгебр* $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ *из $V(L)$, имеющих общий опремум Ω, если* $\mathbf{A}$ *есть общая подалгебра алгебр* $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$*, то* *существуют подпрямо неразложимая алгебра* $\mathbf{D}$ *из* $V(L)$ *и мономорфизмы* $\delta : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *такие, что* $\delta(x) = \varepsilon(x)$ *для всех* $x \in \mathbf{A}$ *и* $\delta(\Omega)$ *является опремумом в* $\mathbf{D}$.

В [7] рассматривались алгебры $G_{m,n}$. Напомним определения данных алгебр и перечислим их некоторые свойства, доказанные там же.

Пусть $0 < m + n < \omega$. Обозначим через $G_{m,n}$ J-алгебру, полученную из конечной булевой алгебры с множеством атомов $At_{m,n} = \{a_1, \ldots, a_{m+n}\}$ добавлением нового наибольшего элемента $\top_{m,n}$. При этом каждый элемент, отличный от $\top_{m,n}$, представим как сумма атомов, опремум $\Omega_{m,n}$ есть сумма всех атомов, $\bot_{m,n} = \bigvee_{m+1 \leq i \leq m+n} a_i$.

Через $0_{m,n} = \bigvee_{i \in \emptyset} a_i$ обозначаем наименьший элемент алгебры $G_{m,n}$.

Имеет место

Лемма 3.3. *(1) Алгебра* $G_{m,n}$ *имеет* $(m + n)$ *атомов* $a_1, \ldots, a_{m+n}$*, где* $\bot_{m,n} = \bigvee_{m+1 \leq i \leq m+n} a_i$*, и любой элемент, отличный от* $\top$ *и* $0_{m,n}$*, единственным образом представим в виде суммы атомов.*

(2) Пусть $I, J \subseteq K = \{1, \ldots, m + n\}$, $0_{m,n} = \bigvee_{i \in \emptyset} x_i$*. Тогда в алгебре* $G_{m,n}$*:*

$$(\bigvee_{i \in I} x_i) \& (\bigvee_{j \in J} x_j) = (\bigvee_{j \in I \cap J} x_j); \ (\bigvee_{i \in I} x_i) \vee (\bigvee_{j \in J} x_j) = (\bigvee_{j \in I \cup J} x_j);$$

$(\bigvee_{i \in I} x_i) \to (\bigvee_{j \in J} x_j) = \top$ *при* $I \subseteq J$,

$(\bigvee_{i \in I} x_i) \to (\bigvee_{j \in J} x_j) = (\bigvee_{j \in (K-I) \cup J} x_j)$ *при* $I \not\subseteq J$.

Предложение 3.4. *При* $0 < m \leq m_1$, $n \leq n_1$ *алгебра* $G_{m,n}$ *вложима в* G_{m_1,n_1}.

4 Примеры логик

Обозначим через B_0 двухэлементную булеву алгебру;

E — одноэлементная J-алгебра;

L_2^- — двухэлементная негативная алгебра;

L_3 — трехэлементная гейтинговая алгебра с носителем $\{\bot, a, \top\}$, $\bot < a < \top$;

G_1 — трехэлементная J-алгебра с носителем $\{b, \bot, \top\}$, $b < \bot < \top$;

$\mathbf{A}_1$ — 4-элементная J-алгебра с носителем $\{f, \bot, \Omega, \top\}$, $f < \bot < \Omega < \top$;

$G_{1,1}$ — 5-элементная J-алгебра с носителем $\{0_{1,1}, a_1, a_2, \Omega_{1,1}, \top_{1,1}\}$, где $0_{1,1} < a_1 < \Omega_{1,1} < \top_{1,1}$, $0_{1,1} < a_2 < \Omega_{1,1}$, a_1 и a_2 несравнимы, $\bot_{1,1} = a_2$.

Нам понадобится предложение, доказанное в [3]:

Предложение 4.1. *Если логика* L *содержит формулу* $E_2^Q = (\bot \to A) \vee (\bot \to (A \to B))$ *и удовлетворяет алгебрам* $\mathbf{A}_1$ *и* $G_{1,1}$*, то она не имеет IPR.*

Рассмотрим логику, порожденную алгеброй $G_{2,1}$. Нетрудно заметить, что она является конечнослойной предгейтинговой логикой. Напомним, что L — *логика конечного слоя* (*конечнослойная*) [16], если $L \vdash \pi_n$ для некоторого n, где $\pi_0 = p_0$, $\pi_{n+1} = p_{n+1} \vee (p_{n+1} \to \pi_n)$.

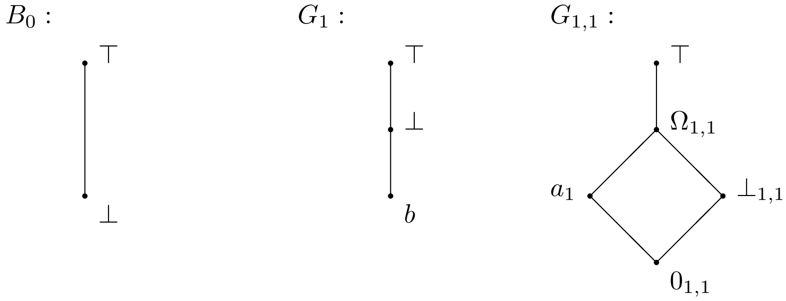

Рис. 1: Алгебры B_0, G_1 и $G_{1,1}$

Теорема 4.2. *(1) Логика, порожденная алгеброй $G_{2,1}$, обладает интерполяционным свойством CIP.*

(2) Логика L_0, порожденная алгебрами G_1, $G_{2,1}$, не обладает свойством CIP, но имеет IPR.

Доказательство. (1) Для доказательства мы используем алгебраический критерий справедливости интерполяционных свойств.

Пусть L_0 — логика, порожденная алгеброй $G_{2,1}$. Докажем, что логика L_0 обладает интерполяционным свойством CIP: покажем амальгамируемость класса финитно неразложимых алгебр из $V(L_0)$.

Заметим, что каждая невырожденная финитно неразложимая алгебра из $V(L_0)$ конечна, следовательно, является подпрямо неразложимой. По известной теореме Йонсона [17] любая подпрямо неразложимая алгебра из $V(L_0)$ является гомоморфным образом некоторой подалгебры алгебры $G_{2,1}$.

Таким образом, любая финитно неразложимая алгебра из $V(L_0)$ изоморфна некоторой алгебре из следующего списка: $E, B_0, L_2^-, L_3, G_{1,1}, G_{2,0}, G_{2,1}$.

Пусть $\mathbf{A}$ — общая подалгебра финитно неразложимых алгебр $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ из $V(L_0)$. Если одна из этих алгебр негативная, то и остальные тоже. В этом случае в качестве амальгамы можно взять алгебру L_2^-. В противном случае каждая алгебра из тройки $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ изоморфна одной из алгебр $B_0, L_3, G_{1,1}, G_{2,0}, G_{2,1}$, и в качестве амальгамы можно взять $G_{2,1}$. Действительно, алгебра L_3 изоморфна $G_{1,0}$, а при $0 < m \leq m_1$, $n \leq n_1$ алгебра $G_{m,n}$ вложима в G_{m_1,n_1} по предложению 3.4.

(2) Заметим сначала, что формула

$$E_2^Q = (\bot \to A) \vee (\bot \to (A \to B))$$

общезначима в алгебрах G_1 и $G_{2,1}$.

В алгебре G_1 имеем $\bot \to x \neq \top$ только для $x = b$, наименьшего элемента алгебры. Но $\bot \to (b \to y) = \bot \& b \to y = b \to y = \top$ для любого y из G_1. Таким образом формула E_2^Q общезначима в алгебре G_1.

Докажем общезначимость E_2^Q в алгебре $G_{2,1}$. Так как $\bot \to x = \top$ для всех x таких, что $\bot \leq x$ и $\bot = a_3$ в $G_{2,1}$, то $E_2^Q = \top$ для всех $a_3 \leq x$.

Пусть $\bot \not\leq x$, тогда x — один из $0_{2,1}$, a_1, a_2, $a_1 \vee a_2$. Тогда $\bot \& x = a_3 \& x = 0_{2,1}$, так как $(\bigvee_{i \in I} x_i) \& (\bigvee_{j \in J} x_j) = (\bigvee_{j \in I \cap J} x_j)$ по лемме 3.3.

Таким образом $\perp \to (x \to y) = \perp \& x \to y = 0_{2,1} \to y = \top$ для всех y из $G_{2,1}$. Следовательно формула E_2^Q общезначима в алгебре $G_{2,1}$.

Предположим, что логика L_0 имеет CIP.

Рассмотрим алгебры $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, где

$$\mathbf{A} = \{\perp, \top\}, \perp < \top,$$

$$\mathbf{B} = \{d, c, \perp, \Omega, \top\}, \text{ где } d < \perp < \Omega < \top, \ d < c < \Omega, \ c \text{ и } \perp \text{ несравнимы},$$

$$\mathbf{C} = \{a, \perp, \top\}, \text{ где } a < \perp < \top.$$

Заметим (см. рис.1), что $\mathbf{A}$ — общая подалгебра $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, алгебра $\mathbf{B}$ изоморфна $G_{1,1}$, алгебра $\mathbf{C}$ изоморфна G_1, алгебра $G_{1,1}$ вложима в $G_{2,1}$. Поэтому алгебры $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ входят в $V(L_0)$.

Так как по предположению L_0 имеет CIP, то по теореме 3.1 многообразие $V(L_0)$ амальгамируемо. Пусть $(\mathbf{D}, \delta, \varepsilon)$ — любая амальгама для алгебр $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$. Рассмотрим подмножество $D' = \varepsilon(\mathbf{C}) \cup \{\delta(\Omega)\}$.

Покажем, что D' замкнуто относительно операций алгебры $\mathbf{D}$. В $\mathbf{D}$ имеем: $\varepsilon(a) < \perp < \delta(\Omega) < \top$, следовательно множество D' замкнуто относительно & и $\vee$. Кроме того,

$\varepsilon(a) \leq \delta(\Omega) \to \varepsilon(a) \leq \perp \to \varepsilon(a) = \varepsilon(\perp \to a) = \varepsilon(a) \in D'$.

Легко доказать, что $(x \to y) \in D'$ для остальных пар $x, y \in \mathbf{C}$. Поэтому D' образует подалгебру алгебры $\mathbf{D}$, а значит, принадлежит $V(L_0)$.

Заметим, что алгебра D' изоморфна $\mathbf{A}_1$. Так как логика L_0 содержит формулу E_2^Q и удовлетворяет алгебрам $\mathbf{A_1}$ и $G_{1,1}$, то она не имеет IPR по предложению 4.1. Таким образом получили противоречие.

Для доказательства IPR используем теорему 3.2 и докажем существование амальгамы для любой тройки подпрямо неразложимых алгебр с общим опремумом.

По теореме Йонсона каждая подпрямо неразложимая алгебра из $V(L_0)$ изоморфна одной из алгебр списка $B_0, L_2^-, G_1, L_3, G_{1,1}, G_{2,0}, G_{2,1}$.

Пусть $\mathbf{A}$ — общая подалгебра подпрямо неразложимых алгебр $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ из $V(L_0)$, причем все три алгебры имеют общий опремум. Если одна из этих алгебр негативная, то все алгебры изоморфны L_2^- и ее можно взять в качестве амальгамы. В случае, если опремум алгебр совпадает с $\perp$, то каждая алгебра из тройки $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ изоморфна одной из алгебр B_0, G_1 и можно в качестве амальгамы взять G_1. Если опремум отличен от $\perp$, то три алгебры изоморфны алгебрам из списка $G_{1,0}$, $G_{1,1}$, $G_{2,0}$, $G_{2,1}$. По предложению 3.4 алгебра $G_{m,n}$ вложима в G_{m_1,n_1} при $0 < m \leq m_1$, $n \leq n_1$. Поэтому в качестве амальгамы можно взять алгебру $G_{2,1}$. Во всех случаях вложения δ и ε определяются единственным образом.

$\square$

Список литературы

[1] *W.Craig*. Three uses of Herbrand-Gentzen theorem in relating model theory. J. Symbolic Logic, 22 (1957), 269–285.

[2] *I.Johansson*. Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus. Compositio Mathematica 4 (1937), 119–136.

[3] *Л.Л.Максимова, В.Ф. Юн*. Расширения минимальной логики и проблема интерполяции. Сибирский математический журнал. т.59, №4 (2018), 863–878.

[4] *Л.Л.Максимова*. Разрешимость интерполяционного свойства Крейга в стройных J-логиках. Сибирский мат. журнал. 53, № 5 (2012), 1048–1064.

[5] *Л.Л.Максимова*. Интерполяция и проективное свойство Бета в стройных логиках. Алгебра и логика, 51, № 2 (2012), 244-275.

[6] *Л.Л.Максимова*. Проективное свойство Бета в стройных логиках. Алгебра и логика, 52, № 2(2013), 172–202.

[7] *Л.Л.Максимова, В.Ф. Юн*. Проблема интерполяции в конечнослойных предгейтинговых логиках. Алгебра и логика, 2019, 58, № 2, 210-–228.

[8] *Л.Л.Максимова*. Интерполяционная теорема Крейга и амальгамируемые многообразия. Доклады АН СССР, 237, № 6 (1977), 1281–1284.

[9] *L.Maksimova*. Restricted interpolation in modal logics. Advances in Modal Logic, Volume 4, King's College Publications, London, 2003, 297–311.

[10] *Л.Л.Максимова*. Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия. Алгебра и логика, 16, № 6 (1977), 643–681.

[11] *Л.Л.Максимова*. Неявная определимость в позитивных логиках. Алгебра и логика, 42, № 1 (2003), 65–93.

[12] *S.Odintsov*. Logic of classic refutability and class of extensions of minimal logic. Logic and Logical Philosophy, 9 (2001), 91–107.

[13] *А.И.Мальцев*. Алгебраические системы. М., Наука, 1970.

[14] *L.Maksimova*. Problem of restricted ibterpolation in superintuitionistic and some modal logics. Logic J. of the IGPL, 18, №3 (2010),367–380.

[15] *Л.Л.Максимова*. Неявная определимость в позитивных логиках. Алгебра и логика, 42, № 1 (2003), 65–93.

[16] *Л.Л.Максимова, В.Ф. Юн*. Слои над минимальной логикой. Алгебра и логика, 55, №4 (2016), 449–464.

[17] *B. Jonsson* . Algebras whose congruence lattices are distributive. Matematica Scandinavica, 21 (1967), 110–121.

Юн Вета Федоровна
Институт математики им. С.Л.Соболева,
Новосибирский государственный университет
630090, Новосибирск, Россия;

E-mail: yun@math.nsc.ru