S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 519.151
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 05B35

КОМБИНАТОРНЫЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НАСЛЕДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

А.В. Ильев and **В.П. Ильев**

Представлено П.П. Петровым

Abstract: Hereditary systems are universal combinatorial objects whose special cases are matroids. Hereditary systems have numerous applications in combinatorial optimization since they are feasible sets of many discrete optimization problems. We propose equivalent definitions of hereditary system in terms of rank function, surfaces of different rank and closure.

Keywords: hereditary system, matroid, independent set, rank, surface, closure.

1 Введение

Статья посвящена изучению свойств универсальных комбинаторных объектов — наследственных систем. Класс наследственных систем очень широк, он содержит в себе матроиды и находит многочисленные приложения в комбинаторной оптимизации, поскольку наследственные системы и матроиды являются множествами допустимых решений значительного

Il'ev, A.V., Il'ev, V.P., Combinatorial and geometric properties of hereditary systems.

Исследование А.В. Ильева выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2026-0033), исследование В.П. Ильева выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2026-0019).

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

числа дискретных оптимизационных задач, большинство из которых являются NP-трудными.

В качестве характерного примера упомянем задачи кластеризации на графах, где вершины исходного графа взаимно однозначно соответствуют некоторым объектам, а рёбра — парам схожих объектов, и требуется найти ближайший к исходному кластерный граф — т. е. граф, каждая компонента связности которого является полным графом [10]. Эти задачи эквивалентны задачам аппроксимации наследственных систем графов матроидами разбиений.

В настоящей работе предложены новые эквивалентные определения наследственной системы в терминах рангов, поверхностей и замыкания. Как и в случае матроидов, эквивалентные определения наследственных систем позволяют лучше понять, насколько богата и многогранна структура этих универсальных комбинаторных объектов. Они также могут быть использованы в разработке алгоритмов точного и приближенного решения комбинаторных оптимизационных задач на наследственных системах.

2 Наследственные системы и матроиды

Наследственная система может быть определена как пара $H = (U, \mathcal{I})$, где U — непустое конечное множество, $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(U)$ — непустое семейство подмножеств, обладающее *свойством наследственности*:

(i1) $X \in \mathcal{I},\ Y \subseteq X \Rightarrow Y \in \mathcal{I}$.

Множества семейства $\mathcal{I}$ называются *независимыми*, все остальные подмножества U называются *зависимыми*. Очевидно, что семейство $\mathcal{D} = \mathcal{P}(U) \setminus \mathcal{I}$ всех зависимых множеств наследственной системы обладает свойством *наследственности «вверх»*:

$X \in \mathcal{D},\ Y \supseteq X \Rightarrow Y \in \mathcal{D}$.

Поэтому всякая наследственная система $H = (U, \mathcal{I})$ может быть задана указанием любого из семейств $\mathcal{I}$ и $\mathcal{D}$.

Примерами являются наследственные системы, в которых

- $\mathcal{I}$ — семейство независимых множеств вершин произвольного графа;
- $\mathcal{D}$ — семейство вершинных покрытий произвольного графа;
- $\mathcal{D}$ — семейство гамильтоновых подграфов полного графа, рассматриваемых как множества рёбер;
- $\mathcal{D}$ — семейство k-связных остовных подграфов полного графа, рассматриваемых как множества рёбер, $k \geqslant 1$;
- $\mathcal{I}$ — семейство ациклических остовных подграфов связного графа, рассматриваемых как множества рёбер;
- $\mathcal{I}$ — семейство линейно-независимых множеств вектор-столбцов произвольной матрицы.

Две последние наследственные системы представляют собой хорошо известные примеры матроидов, которые являются важными частными случаями наследственных систем.

Матроид — это наследственная система, семейство $\mathcal{I}$ независимых множеств которой кроме свойства (i1) обладает также *свойством пополнения*:

(i2) $X, Y \in \mathcal{I},\ |X| = |Y| + 1 \Rightarrow \exists x \in X \setminus Y\ :\ Y \cup \{x\} \in \mathcal{I}.$

Существует множество эквивалентных определений матроида. К наиболее известным, помимо определения в терминах независимых множеств, относятся определения в терминах ранговой функции и в терминах замыканий.

Ранг множества $X \subseteq U$ в наследственной системе $H = (U, \mathcal{I})$ определяется следующим образом:

$$r(X) = \max\big\{|A| \bigm| A \subseteq X,\ A \in \mathcal{I}\big\}.$$

Определённая таким образом функция множеств $r : \mathcal{P}(U) \to \mathbb{Z}_+$ называется *ранговой функцией* наследственной системы H. Если наследственная система не является матроидом, то функцию $r(X)$ иногда называют *функцией верхнего ранга*.

Эквивалентность следующего определения матроида приведённому ранее определению в терминах независимых множеств впервые была доказана Уитни [12].

Матроид — это пара $M = (U, r)$, где U — непустое конечное множество, а $r : \mathcal{P}(U) \to \mathbb{Z}_+$ — ранговая функция, удовлетворяющая следующим условиям: для всех $X, Y \subseteq U$

(R1) $0 \leqslant r(X) \leqslant |X|$;

(R2) $X \subseteq Y \Rightarrow r(X) \leqslant r(Y)$;

(R3) $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leqslant r(X) + r(Y)$.

Хорошо известно также эквивалентное определение матроида в терминах замыканий.

Отображение $X \xrightarrow{\varphi} \overline{X}$ множества $\mathcal{P}(U)$ всех подмножеств множества U в себя называется *оператором замыкания*, если оно обладает свойствами: для всех $X, Y \subseteq U$

(φ1) $X \subseteq \overline{X}$;

(φ2) $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{X} \subseteq \overline{Y}$;

(φ3) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

Матроид — это пара $M = (U, \varphi)$, где U — непустое конечное множество, а φ — оператор замыкания, помимо свойств (φ1)–(φ3) обладающий также свойством (φ4):

(φ4) для любых элементов $u, v \in U$

$$v \notin \overline{X},\ v \in \overline{X \cup \{u\}} \Rightarrow u \in \overline{X \cup \{v\}}.$$

Матроид $M = (U, \varphi)$ называется *обыкновенным*, если он, кроме того, обладает свойством (φ5):

(φ5) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ и $\overline{\{u\}} = \{u\}$ для любого $u \in U$.

Множество $X \subseteq U$ называется *замкнутым*, если $\overline{X} = X$. Замкнутые множества матроида называются его *поверхностями*.

Приведённое определение в терминах оператора замыкания часто принимают в качестве определения *комбинаторной геометрии*, отождествляя комбинаторные геометрии и обыкновенные матроиды. Матроид общего вида в этом случае называют *комбинаторной предгеометрией*.

Хотя изучению вопросов, связанных с комбинаторными геометриями, посвящена обширная литература (см. напр., [5, 6, 7, 8, 9, 11]), авторам не удалось обнаружить общего геометрического определения комбинаторной предгеометрии, которое было бы эквивалентно определению матроида. По этой причине нами в статье [3] было предложено следующее определение комбинаторной предгеометрии в терминах поверхностей различного ранга и доказана эквивалентность этого определения определению матроида в терминах независимых множеств.

Комбинаторная предгеометрия — это пара $G = (U, \mathcal{F})$, где U — непустое конечное множество *точек*, а $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(U)$ — семейство её *поверхностей*, каждой из которых приписан ранг $k \in \mathbb{Z}_+$, обладающее следующими свойствами:

(G1) поверхность ранга 0 существует;

(G2) никакая поверхность ранга k не лежит в поверхности ранга $k-1$;

(G3) всякая поверхность ранга k и точка, не лежащая в ней, лежат в единственной поверхности ранга $k+1$;

(G4) любые k точек, не лежащие ни в какой поверхности ранга, меньшего k, лежат в единственной поверхности ранга k.

Комбинаторная геометрия — это комбинаторная предгеометрия, для которой выполнено свойство (G5):

(G5) $\emptyset$ и все точки являются поверхностями.

Как уже было отмечено, определение наследственной системы в терминах независимых множеств можно получить из определения матроида простым отбрасыванием аксиомы пополнения (i2). Возникает естественный вопрос: можно ли подобным образом получить определения наследственной системы в терминах рангов, замыкания и поверхностей из соответствующих определений матроида?

Ответ на этот вопрос даётся в настоящей работе. Предложенные нами эквивалентные определения наследственной системы в терминах рангов, поверхностей и замыкания довольно сильно отличаются от соответствующих определений матроида, несмотря на некоторое сходство с ними.

3 Определение наследственной системы в терминах ранговой функции

Пусть $H = (U, \mathcal{I})$ — наследственная система, $\mathcal{I}$ — семейство её независимых множеств. *Базой* множества $X \subseteq U$ называется любое максимальное по включению независимое подмножество X.

Замечание 1. *Базы множества X могут иметь разную мощность.*

Напомним, что *рангом* множества X называется максимальная мощность базы X, т. е.

$$r(X) = \max\bigl\{|A| \bigm| A \subseteq X,\ A \in \mathcal{I}\bigr\}. \tag{1}$$

Утверждение 1. *В наследственной системе $H = (U, \mathcal{I})$ множество A независимо тогда и только тогда, когда $r(A) = |A|$, т. е.*

$$\mathcal{I} = \bigl\{A \subseteq U \bigm| r(A) = |A|\bigr\}. \tag{2}$$

В статье [4] дано следующее определение наследственной системы через ранговую функцию, эквивалентное ранее приведенному определению через независимые множества.

Наследственная система — это пара $H = (U, r)$, где U — непустое конечное множество, а $r : \mathcal{P}(U) \to \mathbb{Z}_+$ — функция множеств, удовлетворяющая следующим условиям: для всех $X, Y \subseteq U$

(r1) $0 \leqslant r(X) \leqslant |X|$;
(r2) $r(X) = \max\bigl\{|A| \bigm| A \subseteq X,\ r(A) = |A|\bigr\}$;
(r3) $X \subseteq Y \Rightarrow r(X) \leqslant r(Y)$;
(r4) $r(X \cup Y) \leqslant r(X) + r(Y)$.

Дадим более простое эквивалентное определение наследственной системы через ранговую функцию с использованием аксиомы (r3′). В следующем параграфе будет доказана эквивалентность этому определению нового определения наследственной системы в терминах поверхностей различного ранга.

Теорема 1. 1) *Пусть $H = (U, \mathcal{I})$ — наследственная система. Тогда функция множеств $r : \mathcal{P}(U) \to \mathbb{Z}_+$, определённая по правилу* (1), *удовлетворяет условиям: для всех $X \subseteq U$*

(r1) $0 \leqslant r(X) \leqslant |X|$*;*
(r2) $r(X) = \max\bigl\{|A| \bigm| A \subseteq X,\ r(A) = |A|\bigr\}$*;*
(r3′) $r(X) = |X| \Rightarrow r(Y) = |Y|$ *для всех $Y \subset X$;*
причём имеет место равенство (2).

2) *И наоборот, пусть U — непустое конечное множество, а $r : \mathcal{P}(U) \to \mathbb{Z}_+$ — функция множеств, удовлетворяющая условиям* (r1), (r2) *и* (r3′). *Тогда семейство $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(U)$, определённое по правилу* (2), *обладает свойством наследственности* (i1)*, причём имеет место равенство* (1).

Доказательство. 1) Выполнение условий (r1) и (r2) очевидно следует из (1).

Условие (r3′) выполнено в силу утверждения 1 и свойства (i1).

Равенство (2) выполнено в силу утверждения 1.

2) Докажем, что $\mathcal{I}$ обладает свойством (i1).

Из (r1) следует, что $r(\emptyset) = 0$, т. е. $\emptyset \in \mathcal{I}$ и, следовательно, семейство $\mathcal{I}$ непусто. Рассмотрим множество $X \in \mathcal{I}$, т. е. $r(X) = |X|$ согласно (2). В силу (r3′) для всех $Y \subset X$ верно, что $r(Y) = |Y|$, т. е. $Y \in \mathcal{I}$. Таким образом, свойство наследственности (i1) выполнено.

Выполнение равенства (1) непосредственно следует из (r2) и (2). □

Отметим, что из равенства (1) непосредственно вытекает справедливость условия (r3).

Замечание 2. *Для всех $X, Y \subseteq U$ если $X \subseteq Y$, то $r(X) \leqslant r(Y)$.*

Вывод. Таким образом, мы можем сформулировать новое эквивалентное определение наследственной системы в терминах ранговой функции.

Наследственная система — это пара $H = (U, r)$, где U — непустое конечное множество, а $r : \mathcal{P}(U) \to \mathbb{Z}_+$ — функция множеств, удовлетворяющая следующим условиям: для всех $X, Y \subseteq U$

(r1) $0 \leqslant r(X) \leqslant |X|$;

(r2) $r(X) = \max\big\{|A| \;\big|\; A \subseteq X,\ r(A) = |A|\big\}$;

(r3′) $r(X) = |X| \Rightarrow r(Y) = |Y|$ для всех $Y \subset X$.

Соглашение. Во избежание загромождения записи в дальнейшем при обозначении одноэлементных множеств будут опускаться фигурные скобки. По этой же причине во всех примерах, в которых множество U содержит менее девяти элементов, при обозначении множеств точек будут опускаться фигурные скобки и запятые, разделяющие элементы этих множеств.

4 Определение наследственной системы в терминах поверхностей различного ранга

Пусть $H = (U, r)$ — наследственная система с ранговой функцией r. Тогда множество X ранга k называется *поверхностью ранга* k, если X — это максимальное по включению множество ранга k, т. е.

$$X = U \;\text{ или }\; \forall u \in U \backslash X \quad r(X \cup u) = k + 1. \tag{3}$$

В дальнейшем для обозначения поверхности ранга k будет использоваться запись F_k, а семейство всех поверхностей различного ранга будет обозначаться как $\mathcal{F}$.

Утверждение 2. *Для любого множества $X \subseteq U$ его ранг $r(X) = k$ тогда и только тогда, когда X лежит в какой-то поверхности ранга k и не лежит ни в какой поверхности ранга, меньшего k. Т. е.*

$$r(X) = k \iff \exists F_k \in \mathcal{F} : X \subseteq F_k \;\;\&\;\; \forall\, p < k \;\; \forall F_p \in \mathcal{F} \;\; X \nsubseteq F_p. \tag{4}$$

Доказательство. Необходимость. Очевидно в силу (r2) и (3).

Достаточность. Пусть A — максимальное по мощности подмножество X такое, что $r(A) = |A| = l$. Тогда в силу (r2) ранг $r(X) = l$, причем A не лежит ни в какой поверхности ранга, меньшего l. Следовательно, $l \leqslant k$, так как A лежит в поверхности ранга k. Покажем, что множество X должно лежать в поверхности ранга l.

Действительно, мы можем дополнять множество X элементами из $U\backslash X$ произвольным образом, пока не получим какую-то поверхность F_l ранга l (которая в общем случае может и совпасть с X). А поскольку X не лежит ни в какой поверхности ранга, меньшего k, то $l \geqslant k$. Следовательно, $r(X) = k$. □

Определим наследственную систему в терминах поверхностей различного ранга.

Теорема 2. 1) *Пусть $H = (U, r)$ — наследственная система с ранговой функцией $r : \mathcal{P}(U) \to \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющей условиям* (r1), (r2) *и* (r3′). *Тогда семейство $\mathcal{F}$ её поверхностей, определённое по правилу* (3), *обладает свойствами:*

(g1) *поверхность ранга* 0 *существует;*

(g2) *никакая поверхность ранга k не лежит в другой поверхности ранга k или ранга, меньшего k;*

(g3) *всякая поверхность ранга k и точка, не лежащая в ней, лежат в какой-то поверхности ранга $k + 1$;*

(g4) *если множество X не лежит ни в какой поверхности ранга меньшего k, то существует подмножество X, состоящее из k точек, которое также не лежит ни в какой поверхности ранга меньшего k;*

причём выполнено условие (4).

2) *И наоборот, пусть U — непустое конечное множество, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(U)$ — семейство поверхностей различного ранга, удовлетворяющее условиям* (g1)–(g4). *Тогда функция множеств $r : \mathcal{P}(U) \to \mathbb{Z}_+$, определённая по правилу* (4), *обладает свойствами* (r1), (r2) *и* (r3′), *причём выполнено условие* (3).

Доказательство. 1) Свойство (g1) следует непосредственно из (r1).

Свойство (g2) выполнено в силу (3), согласно которому никакая поверхность ранга k не лежит в другой поверхности ранга k, и в силу замечания 2, согласно которому никакая поверхность ранга k не лежит в поверхности ранга, меньшего k.

Свойство (g3) доказывается с использованием (3).

Если F_k — поверхность ранга k и элемент $u \notin F_k$, то $r(F_k \cup u) = k + 1$. Добавляем к множеству $F_k \cup u$ элементы из $U\backslash(F_k \cup u)$ произвольным образом до тех пор, пока не получим максимальное по включению множество ранга $k + 1$ — оно и будет поверхностью ранга $k + 1$.

Докажем свойство (g4).

Если множество X не лежит ни в какой поверхности ранга, меньшего k, то в силу утверждения 2 его ранг $r(X) \geqslant k$. Следовательно, по свойству (r2) существует подмножество $A \subseteq X$ такое, что $r(A) = |A| = r(X)$. Тогда по свойству (r3′) существует подмножество $B \subseteq A$ такое, что $r(B) = |B| = k$. Т. е. множество $B \subseteq X$ состоит из k точек и в силу замечания 2 не может лежать ни в какой поверхности ранга, меньшего k.

Условие (4) доказано в виде утверждения 2.

Для доказательства п. 2 теоремы нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пусть U — непустое конечное множество, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(U)$ — семейство поверхностей различного ранга, удовлетворяющее условиям* (g1)–(g4), *а также по правилу* (4) *определена ранговая функция множеств $r : \mathcal{P}(U) \to \mathbb{Z}_+$. Тогда любые k точек, не лежащие ни в какой поверхности ранга, меньшего k, лежат в какой-то поверхности ранга k.*

Доказательство утверждения. Рассмотрим множество X, состоящее из k точек, не лежащих ни в какой поверхности ранга, меньшего k, в том числе и в поверхности F_0 ранга 0, которая существует в силу (g1). Следовательно, существует хотя бы одна точка $x_1 \in X$, не лежащая в F_0, а значит в силу (g3) множество $F_0 \cup x_1$ лежит в поверхности F_1 ранга 1. Аналогично, существует хотя бы одна точка $x_2 \in X$, не лежащая в F_1, а значит в силу (g3) множество $F_1 \cup x_2$ лежит в поверхности F_2 ранга 2 и т. д. В итоге мы непременно получим поверхность F_k ранга k, в которой будут лежать все k точек множества X. □

Теперь вернёмся к доказательству теоремы 2.

2) Докажем свойство (r1).

Для любого $X \subseteq U$ по определению $r(X) \geqslant 0$. Рассмотрим множество X такое, что $r(X) = l$ и предположим, что $|X| = k < l$. В силу (4) X не лежит ни в какой поверхности ранга, меньшего l, в том числе и ни в какой поверхности ранга k. Но это противоречит тому, что согласно утверждению 3 множество X должно лежать в поверхности ранга k. Таким образом, $0 \leqslant r(X) \leqslant |X|$.

Докажем свойство (r2).

Пусть $r(X) = k$, тогда в силу (4) множество X не лежит ни в какой поверхности ранга, меньшего k и лежит в поверхности F_k ранга k. Согласно (g4) существует $A \subseteq X$ такое, что $|A| = k$ и A не лежит ни в какой поверхности ранга, меньшего k, но лежит в поверхности F_k ранга k как подмножество X. Следовательно, $r(A) = k = |A|$.

С другой стороны, в силу (4) не может существовать множество $B \subseteq X$ такое, что $r(B) = |B| = l > k$, так как это B не должно лежать ни в какой поверхности ранга k. Таким образом, множество A является максимальным по мощности подмножеством X таким, что $r(A) = |A|$.

Докажем свойство (r3′).

Пусть $r(X) = |X| = k$. Предположим в качестве противного, что существует $Y \subset X$ такое, что $|Y| = k - 1$ и $r(Y) = l < k - 1$, поскольку l не может быть больше $k - 1$ в силу свойства (r1), доказанного ранее. Тогда согласно (4) множество Y лежит в какой-то поверхности F_l ранга l. Но по условию (g3) поверхность F_l и единственная точка $x \in X \setminus Y$ должны лежать в поверхности F_{l+1} ранга $l + 1 < k$. Следовательно, $X = Y \cup x \subseteq F_{l+1}$ и возникает противоречие с тем, что в силу (4) множество X не лежит ни в какой поверхности ранга, меньшего k.

Таким образом, для любого множества $Y \subset X$ такого, что $|Y| = k - 1$ имеет место $r(Y) = |Y|$. Тогда с помощью аналогичных рассуждений получаем, что для любого множества $Y' \subset Y \subset X$ верно, что $r(Y') = |Y'|$.

Осталось доказать выполнение условия (3).

Очевидно, что множество U является поверхностью максимального ранга в силу (g3). Рассмотрим $F_k \neq U$ — поверхность ранга k. Тогда согласно (g2) для любого элемента $u \in U \setminus F_k$ множество $F_k \cup u$ не лежит ни в какой поверхности ранга, не превосходящего k, но лежит в поверхности ранга $k + 1$ в силу (g3). Поэтому из (4) следует, что $r(F_k \cup u) = k + 1$. □

Вывод. Теперь мы можем сформулировать эквивалентное определение наследственной системы в терминах поверхностей различного ранга.

Наследственная система — это пара $H = (U, \mathcal{F})$, где U — непустое конечное множество, а $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(U)$ — семейство её поверхностей, каждой из которых приписан ранг $k \in \mathbb{Z}_+$, обладающее следующими свойствами:

(g1) поверхность ранга 0 существует;

(g2) никакая поверхность ранга k не лежит в другой поверхности ранга k или ранга, меньшего k;

(g3) всякая поверхность ранга k и точка, не лежащая в ней, лежат в какой-то поверхности ранга $k + 1$;

(g4) если множество X не лежит ни в какой поверхности ранга меньшего k, то существует подмножество X, состоящее из k точек, которое также не лежит ни в какой поверхности ранга меньшего k.

5 Определение наследственной системы в терминах замыкания

Напомним, что *матроидом* называется пара $M = (U, \mathcal{I})$, где U — непустое конечное множество, $\mathcal{I}$ — непустое семейство его независимых подмножеств, удовлетворяющее условиям: для всех $X, Y \subseteq U$

(i1) $X \in \mathcal{I},\ Y \subseteq X \Rightarrow Y \in \mathcal{I}$;

(i2) $X, Y \in \mathcal{I},\ |X| = |Y| + 1 \ \Rightarrow \exists x \in X \setminus Y\ :\ Y \cup x \in \mathcal{I}$.

Теперь напомним эквивалентное определение матроида в терминах замыкания.

Матроид — это пара $M = (U, \varphi)$, где U — непустое конечное множество, φ — отображение множества $\mathcal{P}(U)$ в себя, которое ставит в соответствие любому множеству $X \subseteq U$ его замыкание $\overline{X} \subseteq U$ и обладает следующими свойствами: для всех $X, Y \subseteq U$

(φ1) (*направленность*) $X \subseteq \overline{X}$;

(φ2) (*монотонность*) $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{X} \subseteq \overline{Y}$;

(φ3) (*идемпотентность*) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$;

(φ4) (*аксиома замены*) для любых элементов $u, v \in U$

$$v \notin \overline{X},\ v \in \overline{X \cup u}\ \Rightarrow u \in \overline{X \cup v}.$$

Отображение $X \xrightarrow{\varphi} \overline{X}$ множества $\mathcal{P}(U)$ в себя называется *оператором замыкания*, если оно обладает свойствами $(\varphi1)$ — $(\varphi3)$.

В случае матроида для задания оператора замыкания и семейства независимых множеств используются правила:

$$\overline{X} = X \cup \{v \in U \,:\, \exists\, A \subseteq X \text{ такое, что } A \in \mathcal{I},\ A \cup v \notin \mathcal{I}\}, \tag{5}$$

и

$$\mathcal{I} = \{A \subseteq U \,:\, a \notin \overline{A \setminus a} \text{ для всех } a \in A\}. \tag{6}$$

Доказательство следующей теоремы можно найти в книгах [1, 2].

Теорема 3. 1) *Пусть $M = (U, \mathcal{I})$ — матроид, где U — непустое конечное множество, $\mathcal{I}$ — семейство его независимых подмножеств. Тогда отображение $X \xrightarrow{\varphi} \overline{X}$ множества $\mathcal{P}(U)$ в себя, определённое по правилу* (5), *обладает свойствами* $(\varphi1)$ — $(\varphi4)$, *причём имеет место равенство* (6).

2) *И наоборот, если $\varphi : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$ — оператор замыкания, обладающий свойством* $(\varphi4)$, *то семейство $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(U)$, определённое по правилу* (6), *обладает свойствами* (i1) *и* (i2), *причём имеет место равенство* (5).

Но при применении правила (5) в случае наследственных систем свойство $(\varphi3)$ выполняется не всегда, поэтому введём определение слабого замыкания.

Отображение $X \xrightarrow{\varphi} \overline{X}$ множества $\mathcal{P}(U)$ в себя называется *оператором слабого замыкания*, если оно обладает свойствами $(\varphi1)$ и $(\varphi2)$.

Однако, как показывает следующий пример, одна и та же наследственная система может соответствовать разным операторам слабого замыкания, обладающим свойством $(\varphi4)$.

Пример 1. 1) $U=123,\ \mathcal{I}=\{\emptyset, 1\}$.
$\overline{\emptyset}=23,\ \overline{1}=123,\ \overline{2}=23,\ \overline{3}=23,\ \overline{12}=123,\ \overline{13}=123,\ \overline{23}=123,\ \overline{123}=123.$

2) $U=123,\ \mathcal{I}=\{\emptyset, 1\}$.
$\overline{\emptyset}=23,\ \overline{1}=123,\ \overline{2}=123,\ \overline{3}=123,\ \overline{12}=123,\ \overline{13}=123,\ \overline{23}=123,\ \overline{123}=123.$

Поэтому, чтобы дать эквивалентное определение наследственной системы в терминах слабого замыкания, необходимо не просто отбросить свойство $(\varphi3)$, но заменить его на более слабое утверждение. В настоящей работе предложены два варианта замены свойства $(\varphi3)$. Первый из них — свойство $(\varphi3')$:

$(\varphi3')$ для любых $u, v \in U$ и $X \subseteq U$

$$u \in \overline{X},\ v \in \overline{X \cup u} \setminus \overline{X} \Rightarrow \exists w \in X \,:\, v \in \overline{X \cup u \setminus w}.$$

Следующая теорема установливает взаимно однозначное соответствие между операторами слабого замыкания и наследственными системами.

Теорема 4. 1) *Пусть* $H = (U, \mathcal{I})$ — *наследственная система, где* U — *непустое конечное множество,* $\mathcal{I}$ — *семейство его независимых подмножеств. Тогда отображение* $X \xrightarrow{\varphi} \overline{X}$ *множества* $\mathcal{P}(U)$ *в себя, определённое по правилу* (5), *обладает свойствами* (φ1), (φ2), ($\varphi 3'$) *и* (φ4), *причём имеет место равенство* (6).

2) *И наоборот, если* $\varphi : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$ — *оператор слабого замыкания, обладающий свойствами* ($\varphi 3'$) *и* (φ4), *то семейство* $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(U)$, *определённое по правилу* (6), *удовлетворяет свойству наследственности* (i1), *причём имеет место равенство* (5).

Доказательство. 1) Пусть $H = (U, \mathcal{I})$ — наследственная система. Очевидно, что отображение $X \xrightarrow{\varphi} \overline{X}$ множества $\mathcal{P}(U)$ в себя, определённое по правилу (5), обладает свойствами (φ1) и (φ2).

Докажем свойство (φ4). Пусть $v \notin \overline{X}$, $v \in \overline{X \cup u}$. Из (5) следует существование такого множества $A \subseteq X \cup u$, что $A \in \mathcal{I}$ и $A \cup v \notin \mathcal{I}$. Поскольку $v \notin \overline{X}$, то $u \in A$ и $(A \setminus u) \cup v \in \mathcal{I}$. Таким образом, существует множество $A' = (A \setminus u) \cup v \subseteq X \cup v$ такое, что $A' \in \mathcal{I}$ и $A' \cup u = A \cup v \notin \mathcal{I}$. Поэтому $u \in \overline{X \cup v}$ в силу (5).

Докажем свойство ($\varphi 3'$). Пусть $X \subseteq U$ и u, v — произвольные элементы такие, что $u \in \overline{X}$, $v \in \overline{X \cup u} \setminus \overline{X}$. Очевидно, $u \notin X$. Тогда из (5) следует существование множества $A_1 \subseteq X$ такого, что $A_1 \in \mathcal{I}$ и $A_1 \cup u \notin \mathcal{I}$. Так как $v \notin X \cup u$, то в силу (5) существует такое множество $A_2 \subseteq X \cup u$, что $A_2 \in \mathcal{I}$, $A_2 \cup v \notin \mathcal{I}$ (это также означает, что $v \in \overline{A_2}$). Так как $v \notin \overline{X}$, значит для любого $A \subseteq X$ если $A \in \mathcal{I}$, то $A \cup v \in \mathcal{I}$. Тогда $u \in A_2$.

Поскольку $A_1 \cup u \subseteq X \cup u$, то $X \cup u \neq A_2$ в силу свойства наследственности. Поэтому существует $w \in (X \cup u) \setminus A_2 = X \setminus A_2$. Следовательно,

$$v \in \overline{A_2} = \overline{A_2 \setminus w} \subseteq \overline{X \cup u \setminus w}.$$

Докажем, что имеет место равенство (6). Для этого покажем, что непустое множество A принадлежит семейству $\mathcal{I}$ тогда и только тогда, когда $a \notin \overline{A \setminus a}$ для всех $a \in A$.

Пусть $A \in \mathcal{I}$ и $a \in A$. В силу свойства наследственности $A \setminus a \in \mathcal{I}$ и для любого независимого множества $A' \subseteq A \setminus a$ выполнено $A' \cup a \in \mathcal{I}$ (так как $A' \cup a \subseteq A$). Следовательно, в соответствии с (5) $a \notin \overline{A \setminus a}$.

Пусть теперь $A \notin \mathcal{I}$, следовательно, A содержит цикл C — минимальное по включению множество из семейства $\mathcal{P}(U) \setminus \mathcal{I}$. Тогда $A'' = C \setminus a \in \mathcal{I}$, где $a \in C$ — произвольный элемент. Таким образом, существует подмножество $A'' \subseteq A \setminus a$ такое, что $A'' \in \mathcal{I}$ и $A'' \cup a = C \notin \mathcal{I}$. В соответствии с (5) это означает, что $a \in \overline{A \setminus a}$.

2) Обратно, пусть $\varphi : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$ — оператор слабого замыкания, обладающий свойствами ($\varphi 3'$) и (φ4), и семейство $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(U)$ определено по правилу (6). Рассмотрим непустое множество $A_1 \in \mathcal{I}$ и его непустое подмножество $A_2 \subseteq A_1$. В силу (6) $a \notin \overline{A_1 \setminus a}$ для всех $a \in A_1$. Из (φ2) следует, что $\overline{A_2 \setminus a} \subseteq \overline{A_1 \setminus a}$. Тогда для любого $a \in A_2$ имеем $a \notin \overline{A_1 \setminus a}$,

откуда $a \notin \overline{A_2 \setminus a}$. В соответствии с (6) это означает, что $A_2 \in \mathcal{I}$. Таким образом, семейство $\mathcal{I}$ обладает свойством наследственности.

Докажем, что имеет место равенство (5). Для этого покажем, что для любого $X \subseteq U$

$$v \in \overline{X} \setminus X \iff v \notin X \text{ и } \exists\ A \subseteq X \text{ такое, что } A \in \mathcal{I} \text{ и } A \cup v \notin \mathcal{I}.$$

Пусть $v \in \overline{X} \setminus X$. Выберем минимальное по включению множество $A \subseteq X$ такое, что $v \in \overline{A}$. Докажем, что $A \in \mathcal{I}$. Предположим, что $A \notin \mathcal{I}$, т. е. $A \neq \emptyset$ и в силу (6) существует такой элемент $u \in A$, что $u \in \overline{A \setminus u}$. Положим $Y = A \setminus u$, следовательно, $u \in \overline{Y} \setminus Y$, $v \in \overline{Y \cup u}$. Кроме того, $v \notin \overline{Y}$ в силу выбора множества A. Поэтому в силу ($\varphi 3'$) для $u \in \overline{Y}$ и $v \in \overline{Y \cup u} \setminus \overline{Y}$ существует такой элемент $w \in Y$, что $v \in \overline{Y \cup u \setminus w} = \overline{A \setminus w}$. Но это противоречит выбору множества A. Следовательно, $A \in \mathcal{I}$. Кроме того, в силу (6) $A \cup v \notin \mathcal{I}$, так как $v \in \overline{A} = \overline{A \cup v \setminus v}$.

Наоборот, пусть $A \subseteq X$, причем $A \in \mathcal{I}$ и $A \cup v \notin \mathcal{I}$ для некоторого $v \notin X$. Если $A = \emptyset$, то в силу (6) $v \in \overline{A \cup v \setminus v} = \overline{\emptyset}$ и в силу ($\varphi 2$) $v \in \overline{X}$. Предположим, что $A \neq \emptyset$ и $v \notin \overline{A}$. Рассмотрим произвольный элемент $a \in A$. Из (6) следует, что $a \notin \overline{A \setminus a}$. Если при этом $a \in \overline{(A \setminus a) \cup v}$, то по аксиоме замены ($\varphi 4$) $v \in \overline{(A \setminus a) \cup a} = \overline{A}$, что невозможно, так как по нашему предположению $v \notin \overline{A}$. Поэтому $a \notin \overline{(A \setminus a) \cup v} = \overline{(A \cup v) \setminus a}$ и, кроме того, $v \notin \overline{(A \cup v) \setminus v} = \overline{A}$. В силу (6) получаем, что $A \cup v \in \mathcal{I}$ — противоречие. Значит, $v \in \overline{A}$ и в силу ($\varphi 2$) $v \in \overline{X}$. □

Замечание 3. *Из доказательства теоремы 4 можно сделать вывод, что свойство ($\varphi 3'$) используется только при доказательстве равенства (5), а точнее при доказательстве следующего предложения:*

Для любого $X \subseteq U$

$$v \in \overline{X} \setminus X \Rightarrow \exists\ A \subseteq X \text{ такое, что } A \in \mathcal{I} \text{ и } A \cup v \notin \mathcal{I}. \tag{7}$$

Поэтому, чтобы сделать равнозначную замену свойству ($\varphi 3'$), достаточно проверить, является ли эта замена свойством наследственной системы, и доказать с её помощью предложение (7).

Свойство ($\varphi 3'$) можно заменить на следующее:
($\varphi 3''$) для всех $u \in U$, $X \subseteq U$

$$u \in \overline{X},\ \forall v \in X\ \ u \notin \overline{X \setminus v} \Rightarrow \forall w \in X\ \ w \notin \overline{X \setminus w}.$$

Докажем для ($\varphi 3''$) теорему, аналогичную теореме 4 для ($\varphi 3'$).

Теорема 5. 1) *Пусть $H = (U, \mathcal{I})$ — наследственная система, где U — непустое конечное множество, $\mathcal{I}$ — семейство его независимых подмножеств. Тогда отображение $X \xrightarrow{\varphi} \overline{X}$ множества $\mathcal{P}(U)$ в себя, определённое по правилу (5), обладает свойствами ($\varphi 1$), ($\varphi 2$), ($\varphi 3''$) и ($\varphi 4$), причём имеет место равенство (6).*

2) *И наоборот, если* $\varphi : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$ *— оператор слабого замыкания, обладающий свойствами* $(\varphi 3'')$ *и* $(\varphi 4)$*, то семейство* $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(U)$*, определённое по правилу* (6)*, удовлетворяет свойству наследственности* (i1)*, причём имеет место равенство* (5).

Доказательство. 1) Пусть $H = (U, \mathcal{I})$ — наследственная система. Проверим выполнимость свойства $(\varphi 3'')$.

Пусть $u \in \overline{X}$ и $u \notin \overline{X \setminus v}$ для любого $v \in X$, т. е. X — минимальное по включению множество такое, что $u \in \overline{X}$. Если $u \in X$, то u — единственный элемент множества X в силу $(\varphi 1)$. Так как $u \notin \overline{X \setminus u} = \overline{u \setminus u}$, то условие $(\varphi 3'')$ выполнено. Если же $u \notin X$, то из (5) следует, что существует $A \subseteq X$ такое, что $A \in \mathcal{I}$ и $A \cup u \notin \mathcal{I}$, а значит $u \in \overline{A}$. Тогда $A = X$ и поэтому $X \in \mathcal{I}$. И в силу (6), которое как и в теореме 4 доказывается только с помощью (i1) и (5), для любого $w \in X$ верно, что $w \notin \overline{X \setminus w}$.

2) Пусть $\varphi : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$ — оператор слабого замыкания, обладающий свойствами $(\varphi 3'')$ и $(\varphi 4)$, и семейство $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(U)$ определено по правилу (6). Воспользуемся замечанием 3 и докажем предложение (7).

Пусть $v \in \overline{X} \setminus X$. Выберем минимальное по включению множество $A \subseteq X$ такое, что $v \in \overline{A}$. Это означает, что $v \notin \overline{A \setminus u}$ для любого $u \in A$. Тогда в силу $(\varphi 3'')$ $w \notin \overline{A \setminus w}$ для всех $w \in A$, т. е. $A \in \mathcal{I}$. Также в силу (6) $A \cup v \notin \mathcal{I}$, так как $v \in \overline{A} = \overline{A \cup v \setminus v}$. □

Вывод. С помощью условий $(\varphi 3')$ и $(\varphi 3'')$ можно сформулировать два эквивалентных определения наследственной системы в терминах слабого замыкания.

Наследственная система — это пара $H = (U, \varphi)$, где U — непустое конечное множество, $X \xrightarrow{\varphi} \overline{X}$ — отображение множества $\mathcal{P}(U)$ в себя, обладающее либо свойствами $(\varphi 1)$, $(\varphi 2)$, $(\varphi 3')$ и $(\varphi 4)$, либо свойствами $(\varphi 1)$, $(\varphi 2)$, $(\varphi 3'')$ и $(\varphi 4)$: для всех $X, Y \subseteq U$

$(\varphi 1)$ $X \subseteq \overline{X}$;

$(\varphi 2)$ $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{X} \subseteq \overline{Y}$;

$(\varphi 3')$ для любых $u, v \in U$

$$u \in \overline{X},\ v \in \overline{X \cup u} \setminus \overline{X} \Rightarrow \exists w \in X \ :\ v \in \overline{X \cup u \setminus w};$$

$(\varphi 3'')$ для всех $u \in U$

$$u \in \overline{X},\ \forall v \in X \ \ u \notin \overline{X \setminus v} \Rightarrow \forall w \in X \ \ w \notin \overline{X \setminus w};$$

$(\varphi 4)$ для любых $u, v \in U$

$$v \notin \overline{X},\ v \in \overline{X \cup u} \Rightarrow u \in \overline{X \cup v}.$$

6 Заключение

Наследственная система может быть определена как семейство подмножеств непустого конечного множества, обладающее свойством наследственности. Предложены эквивалентные определения наследственной системы в терминах ранговой функции, поверхностей различного ранга и замыкания. Как и для матроидов, которые являются частными случаями наследственных систем, эквивалентные определения наследственных систем позволяют гораздо лучше понять богатую и многогранную структуру этих универсальных комбинаторных объектов, имеющих широкие приложения в дискретной оптимизации.

References

[1] M. Aigner, *Combinatorial Theory*, Springer New York, N.Y., 1979.
[2] M.O. Asanov, V.A. Baransky, V.V. Rasin, *Discrete mathematics: graphs, matroids, algorithms*, Lan', SPb, 2010.
[3] A.V. Il'ev, V.P. Il'ev, *A characterization of matroids in terms of surfaces*, Prikl. Diskr. Mat., **3(33)** (2016), 5–15.
[4] V.P. Il'ev, A.V. Morshinin, *Characterization of hereditary systems and comatroids in terms of rank and girth functions*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **22**:1 (2025), 692–700.
[5] H.H. Crapo, G.-C. Rota, *On the foundations of combinatorial theory II: combinatorial geometries*, MIT Press, Cambridge, 1970.
[6] E. Delucchi, *Combinatorial geometries in algebra and topology*, Habilitationsschrift, Universität Bremen, 2011.
[7] I.M. Gelfand, R.M. Goresky, R.D. MacPherson, V. Serganova, *Combinatorial geometries, convex polyhedra and Schubert cells*, Advances in Mathematics, **63** (1987), 301–316.
[8] G. Gordon, J. McNulty, *Matroids: a geometric introduction*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.
[9] L.S. Pitsoulis, *Topics in matroid theory*, Springer New York, N.Y., 2014.
[10] R. Shamir, R. Sharan, D. Tsur, *Cluster graph modification problems*, Discrete Appl. Math., **144** (2004), 173–182.
[11] N. White, ed. *Combinatorial geometries*, Encyclopedia Math. Appl., **29**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
[12] H. Whitney, *On the abstract properties of linear dependence*, Amer. J. Math., **57**:3 (1935), 509–533.

Artem Victorovich Il'ev
Sobolev Institute of Mathematics,
Pevtsova str., 13,
644099, Omsk, Russia
E-mail address: artyom_iljev@mail.ru

Victor Petrovich Il'ev
Sobolev Institute of Mathematics,
Pevtsova str., 13,
644099, Omsk, Russia
Dostoevsky Omsk State University,
Mira pr., 55A,
644077, Omsk, Russia
E-mail address: iljev@mail.ru