Ответ на рецензию.

Прежде всего благодарю рецензента за высокую оценку потенциальной практической значимости моей работы. Конечно, у меня была уверенность, что кроме некоторого теоретического значения у этой работы могут найтись и определённые практические применения, но какие именно я представлял лишь смутно.

Тем не менее, имеется необходимость дать кое-какие комментарии к рецензии, чтобы уточнить и прояснить некоторые моменты и устранить возникшие недоразумения.

Вслед за рецензентом будем использовать упрощенную запись некоторых фрагментов формул, в частности, не будем ставить крышечки над наборами переменных, а также в основном сосредоточимся на анализе рецензентом работы [7].

Напомним, что базисные переменные — это d_t, f_t, q_t, x_t и z_t, а знак " $\approx$ " — это *символ отношения равенства* в логике предикатов первого порядка, использующейся в [7] (см. замечание 2 в п. 3.1), а также в известной монографии (или учебнике?) по математической логике Ю.Л. Ершова и Е.А Палютина. Поэтому даже формулы вида $d_t \approx \alpha$ или $d_t \approx h$, вовсе не означают *реального* равенства, где α — это константа (точнее, бинарный код символа константы α), а h — вспомогательная переменная, значение которой к этому моменту уже как-то определено. В теперешней, рассматриваемой работе 2025 года (для краткости — работа [0]) применяются равносильные им формулы исчисления высказываний с кванторами: $d_t \equiv \alpha$ и $d_t \equiv h$, где $\equiv$ — символ отношения эквивалентности формул. Однако ни там, ни здесь появление подобных формул не означает, строго говоря, что переменные получили какие-то определённые значения, так как такие формулы могут быть ложными. *Реальное* равенство в обеих работах обозначается обычным знаком "$=$".

При построении формул никакие значения свободным переменным (в роли которых часто выступают базисные для многих формул из [7]) не присваиваются, тем более, сами формулы никак не могут назначать переменным какие-либо значения, это можем делать только *мы (автор и/или читатели)*. Формула $\varphi(k)(y_t, y_{t+1})$ не являются исключением из этого правила. Она лишь формально описывает в подразделе 4.2 *процедуру трансформации* формулы $\Psi K(t)(y_t)$ в $\Psi K(t+1)(y_{t+1})$. В частности, её подформула $\Delta^{cop}(u(\beta))$ предписывает заменить каждую клаузу (или квазиравенство) $\psi_t(w \to g)$ формулой $\psi_{t+1}(w \to g)$, когда верно $\neg w \approx u(\beta)$. Что в развёрнутом виде означает замену формул $x_t \approx w \to f_t \approx g$ квазиравенствами $x_{t+1} \approx w \to f_{t+1} \approx g$ согласно определениям из п. 4.1. Конечно, условие $\neg w \approx u(\beta)$ не формально означает (если оно истинно), что w не равно $u(\beta)$, и с учётом смысла терма $u(\beta)$, описанного во втором абзаце п. 4.2, равносильно $w \neq u + s$ в обозначениях рецензента. Однако формула $\varphi(k)(y_t, y_{t+1})$ ничего не говорит о значениях базисных переменных x_t и f_t (w — переменная вспомогательная). Таким образом, формула $\Delta^{cop}(u(\beta))$ не имеет того смысла, который утверждается в пункте (а) в конце первой страницы рецензии.

Примерно то же самое можно сказать и о пунктах (б) и (в) в начале второй страницы рецензии. Отметим только, что автор и сам порой сбивался (и сбивается) в том числе и при написании данного текста на подобное слишком вольное толкование формул. Но не будем задерживаться на этом, а перейдём к рассмотрению предлагаемого рецензентом контрпримера к предложению 6.1.

Рецензент справедливо отмечает, что индукционный переход в одну сторону в этом предложении, в частности, означает, что если $K(t) \vdash^1 K(t+1) \vdash^1 K(t+2)$, то из *тождественной* истинности формулы

$$\Psi K(t)(y_t) \wedge \exists v(\Phi^{(0)}(y_t.v) \wedge \Phi^{(0)}(v, y_{t+2})) \to \Psi K(t+2)(y_{t+2}) \tag{1}$$

должно следовать, что формула

$$\Psi K(t)(y_t) \wedge \exists v(\Phi^{(0)}(y_t.v) \wedge \Phi^{(0)}(v, y_{t+2})) \to \Psi L(t+2)(y_{t+2}) \tag{2}$$

не может быть тождественно истинной, когда конфигурация $L(t+2)$ отлична от $K(t+2)$.

Докажем это утверждение для случая последовательного применения двух команд $M(k_1) = q_i\alpha \to q_jR$, $M(k_2) = q_j\gamma \to q_lR$ с номерами k_1 и k_2. Для этого подберём подходящие значения свободных переменных y_t, y_{t+2}, а также $v = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)$, чтобы формула (1) стала истинной, а формула $\Psi L(t+2)(y_{t+2})$ — ложной, вследствие этого вся формула (2) тоже станет ложной. Можно считать, что переменная v_0 ставится на место d_{t+1}, v_1 — на место q_{t+1}, v_2 — на место z_{t+1}, v_3 — на место x_{t+1}, а v_4 — на место f_{t+1}.

Прежде всего положим $d_t(v_0) = \alpha$, $q_t(v_1) = i$ и $z_t(v_2) = \eta$, поскольку формула $\Psi K(t)$ содержит таймер $d_t \approx \alpha \wedge q_t \approx i \wedge z_t \approx \eta$ как конъюнктивный член, а **мы хотим** сделать всю эту формулу истинной для выбранных значений переменных. Формула $\Psi K(t)$ содержит именно такой таймер на основании сделанных рецензентом предположений, что она корректно описывает конфигурацию $K(t)$, в которой головка наведена на ячейку с номером η и видит там α, а машина при этом находится в состоянии с номером i (последнее следует из того, что к данной конфигурации применима команда $q_i\alpha \to \ldots$).

В любой формуле $\varphi(s)$, написанной по команде отличной от $M(k_1)$, содержится в качестве первой посылки таймер $\pi_t(\theta, b, u) = (d_t \approx \theta \wedge q_t \approx b \wedge z_i \approx u)$, в котором $\theta \neq \alpha$ или $b \neq i$, так как рассматриваемая машина детерминированная. При выбранных значениях переменных d_t и q_t эти таймеры становятся ложными, поэтому все формулы $\varphi(s)$ при $s \neq k_1$ — истинные.

Необходимо заметить, что связанные вспомогательные переменные u, h, w, g, участвующие в записи формул $\varphi(s)$, у каждой из этих формул *свои собственные*, поэтому считаем, что в запись $\varphi(k_1)$ входят u_1, h_1, w_1 и g_1, а в запись $\varphi(k_2)$ — u_2, h_2, w_2 и g_2.

Формула $\varphi(k_1)$ (точнее её бескванторная часть) при $u_1 \neq \eta$ истинна ввиду ложности её первой посылки, поэтому рассмотрим случай $u_1 = \eta$. Поскольку мы описываем сдвиг головки вправо, то мы имеем $u_1(\beta) = u_1(R) = u_1 + 1 = \eta + 1$. Согласно сделанным предположениям, сдвинувшись вправо, головка увидит там символ γ, а внутреннее состояние машины станет q_j. Ввиду этого, если мы положим $d_{t+1} = \gamma$, $q_{t+1} = j$, $z_{t+1} = \eta + 1$, то добьёмся того, что таймер $\pi_{t+1}(\gamma, j, \eta+1) = (d_{t+1} \approx \gamma \wedge q_{t+1} \approx j \wedge z_{t+1} \approx \eta + 1)$ в формуле $\Psi K(t+1)$ станет истинным. Кроме того, при этих значениях d_{t+1}, q_{t+1}, z_{t+1} и при $u_2 = \eta + 1$ будет истинным таймер из посылки формулы $\varphi(k_2)$.

Однако в заключении формулы $\varphi(k_1)$ стоит немного другой таймер $\pi_{t+1}(h_1, j, \eta+1) = (d_{t+1} \approx h_1 \wedge q_{t+1} \approx j \wedge z_{t+1} \approx \eta + 1)$, в котором значение переменной h_1 ещё не определено. С другой стороны, у нас имеются пока ещё свободные переменные x_t и f_t, а формула $\Psi K(t)$ имеет конъюнктивный член — клаузу $\psi_t(\eta + 1 \to \gamma) = (x_t \approx \eta + 1 \to f_t \approx \gamma)$. Определив $x_t = \eta + 1$ и $f_t = \gamma$, получаем, что в этом квзиравенстве верны и посылка и заключение, а остальные клаузы из $\Psi K(t)$ истинны на основании леммы 4.3(i). Значит и вся формула $\Psi K(t)$ истинна при выбранных значениях её свободных переменных. Кроме того, становятся верными и все клаузы цвета t, входящие в $\Delta^{cop}(u_1(\beta)) = \Delta^{cop}(\eta+1)$ опять ввиду леммы 4.3(i). А при $h_1 = \gamma$ также истинны $\Gamma^{ret}(\beta) = \Gamma^{ret}(R)$ и таймер $\pi_{t+1}(h_1, j, \eta+1) = (d_{t+1} \approx h_1 \wedge q_{t+1} \approx j \wedge z_{t+1} \approx \eta + 1)$ из заключения формулы $\varphi(k_1)$. Хотя при $h_1 \neq \gamma$ формула $\Gamma^{ret}(R)$ — ложная, но в этом случае становится истинной вся бескванторная часть формулы $\varphi(k_1)$, поскольку ложна одна из её посылок.

Используя подобные соображения, зададим следующие значения части переменных $d_{t+2} = \lambda$, $q_{t+2} = l$, $z_{t+2} = \eta + 2$, $x_{t+1} = \eta + 2$ и $f_{t+1} = \lambda$, где λ — это символ на ленте, стоящий в ячейке с номером $\eta + 2$. Теперь станут истинными:

1) таймер $\pi_{t+2}(\lambda, l, \eta+2) = (d_{t+2} \approx \lambda \wedge q_{t+2} \approx l \wedge z_{t+2} \approx \eta + 2)$, входящий в $\Psi K(t+2)$ и в $\Psi L(t+2)$;

2) все клаузы из $\Psi K(t+1)$, а значит и вся эта формула, поскольку в одной из её клауз истинны и посылка и заключение, а в других ложна посылка;

3) квазиравенства цвета $t+1$, входящие в $\Delta^{cop}(u_1(\beta)) = \Delta^{cop}(\eta+1)$ (из $\varphi(k_1)$) и $\Delta^{cop}(u_2(\beta)) = \Delta^{cop}(\eta+2)$ (из $\varphi(k_2)$ ввиду леммы 4.3(i));

4) формула $\Delta^{wr}(u_1(R)) = \psi_{t+1}(\eta + 1 \to \gamma) = (x_{t+1} \approx \eta + 1 \to f_{t+1} \approx \gamma)$ из $\varphi(k_1)$ (по лемме 4.3(i)) и поэтому вся формула $\varphi(k_1)$;
5) при $h_2 = \lambda$ формула $\Gamma^{ret}(R)$ и заключительный таймер $\pi_{t+2}(h_2, l, \eta + 2)$ в формуле $\varphi(k_2)$;
6) при $h_2 \neq \lambda$ формула $\varphi(k_2)$, ввиду ложности одной из её посылок $\Gamma^{ret}(R)$.

Неопределёнными остались:
а) все клаузы из $\Psi K(t+2)$, а значит и вся эта формула;
б) квазиравенства цвета $t+2$, входящие в $\Delta^{cop}(u_2(\beta)) = \Delta^{cop}(\eta + 2)$ из $\varphi(k_2$;
в) формула $\Delta^{wr}(u_2(R)) = \psi(\eta + 2 \to \lambda) = (x_{t+2} \approx \eta + 2 \to f_{t+2} \approx \lambda)$ из $\varphi(k_2)$;
г) значения переменных x_{t+2} и f_{t+2}.

Вспомним теперь, что *мы хотим*(!) обнаружить ошибку в конфигурации $L(t+2)$, где в ячейке $\eta - 1$ стоит δ' вместо нужного δ. Ввиду этого определим $x_{t+2} = \eta - 1$ и $f_{t+2} = \delta$. Сразу получаем ложность клаузы $\psi_{t+2}((\eta-1) \to \delta') = (x_{t+2} \approx \eta - 1 \to f_{t+1} \approx \delta'$ и истинность квазиравенства $\psi_{t+2}((\eta-1) \to \delta)$, входящих, соответственно, в $\Psi L(t+2)$ и $\Psi K(t+2)$. Значит, формула $\Psi L(t+2)$ — ложна, а $\Psi K(t+2)$ — истинна, так как истинность остальных её клауз получается применением леммы 4.3(i). На основании этой же леммы получаем истинность формул пунктов **б)** и **в)** из списка выше.

Итак, при выше описанных значениях переменных все компоненты формулы (1) истинны, а в (2) посылка — истинна, а заключение — ложно.

Таким образом, контрпример рецензента не срабатывает.

Замечание 1. В этом тексте, а также в работах [7] и [0], автор несколько раз употребляет выражение «...все клаузы такого-то цвета из формулы $\Delta^{cop}(u(\beta))$ ...», хотя в этой формуле формально имеется только одно квазиравенство данного цвета. Это своеобразная вольность речи: автор неявно имеет в виду, что формула $\Delta^{cop}(u(\beta))$, начинающаяся с универсального квантора, равносильна очень длинной конъюнкции соответствующих формул.

Замечание 2. Обычно (хотя и не всегда) рассматривать формулы при каких-то значениях свободных переменных имеет смысл только для доказательства ложности каких-то формул, как это сделано выше при доказательстве не тождественной истинности формулы (2), а также предложений 5.1(ii) в [7] и 2(ii) в [0].

Тождественную истинность, как правило, доказывают с применением законов логики в форме правил вывода того или иного формального исчисления. Например, в работах [7] и [0] при доказательстве предложений 5.2 и 3, соответственно, в основном многократно используются следующие варианты классического правила modus ponens:

$$\chi \wedge \phi,\ \phi \to \psi\ \vdash\ \psi; \qquad \chi \wedge \phi,\ \phi \wedge \psi\ \vdash\ \psi; \qquad \tau \to \psi\ \vdash\ \psi,$$

где χ, ϕ и ψ — *любые* формулы исчисления предикатов в [7] или исчисления высказываний в [0], а τ — тождественно истинная формула (тавтология).

Обе эти особенности доказательств также проявляются при обосновании предложений 4(ii) в [0] и 6.1(ii) в [7], но не так ярко.

Замечание 3. Обратим внимание на то обстоятельство, что при доказательстве не тождественной истинности формулы (2), равно как и предложений 5.1(ii) в [7] и 2(ii) в [0], мы не только *сами подбирали* значения свободных переменных, но и имели при этом некоторую свободу выбора, разумеется, в определённых рамках.

С уважением,
Латкин Иван Васильевич.