РЕЦЕНЗИЯ

на статью И. В. Латкина

«The definability of the turing machine computations by boolean formulae»

Статья посвящена исследованию взаимосвязи между классами вычислительной сложности и формулами логики предикатов. Изучение этой взаимосвязи является одной из наиболее актуальных задач математической логики, так как имеет как теоретическое, так и практическое значение. Например, выполнение SQL-запросов к базам данных по факту является проверкой истинности формулы логики предикатов на конечной алгебраической системе, поэтому известный факт о PSPACE-полноте этой задачи постоянно требует от разработчиков СУБД внедрения всё новых форм оптимизации запросов. С другой стороны, найденные соответствия сложностных классов и логических языков помогают развитию теории и тех, и других. Именно в последней области и лежит тематика рецензируемой работы, поэтому её актуальность несомненна.

Декларируемый результат о совпадении класса EXPTIME с PSPACE и, следовательно, о несовпадении классов PTIME и PSPACE, а также распространение этого результата на их обобщения было бы безусловно одним из крупнейших вкладов в теорию сложности вычислений, начиная с момента её создания. К сожалению, при прочтении в работе обнаружен серьёзный изъян, который делает доказательство полностью некорректным. Я не исключаю, это может быть следствием того, что автор попытался максимально формально выполнить построения, из-за чего они стали очень громоздкими, поэтому заметить некорректную часть оказалось нелегко.

Начну с работы того же автора, которая указана в библиографическом перечне под номером [7]. Фактически, методы, которые использованы в обеих статьях, одинаковы, поэтому ошибка одна и та же, но поскольку работа [7] проще, то мне будет проще описать допущенный просчёт для неё, а потом перейти к собственно представленной в «Сибирские электронные математические известия» работе.

Технически главным утверждением в [7] является пункт (ii) предложения 6.1, в котором как раз доказывается, что истинность построенной формулы в алгебре $\mathcal{B}$ эквивалентна переходу машины Тьюринга из конфигурации $K(t)$ в конфигурацию $K(t+e)$ (будем обозначать это для краткости $K(t) \vdash^{t+e} K(t+e)$), здесь $e = \exp(s)$ — количество шагов. И именно в доказательстве этого утверждения допущена ошибка, точнее, неверным является индукционный переход от s к $s+1$. То, что из $K(t) \vdash^{t+2e} K(t+2e)$ следует истинность формулы $\Omega^{(s+1)}$, доказано верно. А вот в обратную сторону рассуждение некорректно.

Прежде, чем указывать на ошибку, проанализируем построенные автором формулы. Формула $\Phi^{(0)}$ описывает переход машины за один шаг, она является конъюнкцией всевозможных формул $\varphi(k)$, каждая из которых описывает переход по одной команд машины Тьюринга. Для команды $k = (q_i, \alpha \to q_j, \beta)$ эта формула $\varphi(k)(y_t, y_{t+1})$, где $y = (d, q, z, x, f)$, говорит

(0) если $d_t = \alpha$ и $q_t = i$, то выполнены три следующие пункта:

(a) если $x_t = x_{t+1} \neq z_t + s_\beta$, то $f_t = f_{t+1}$, где s_β — сдвиг головки, ± 1 или 0;

(б) если $\beta \notin \{L, R\}$, то $d_{t+1} = \beta$, $q_{t+1} = j$, $z_{t+1} = z_t + s_\beta$, а если ещё и $x_{t+1} = z_t + s_\beta$, то $f_{t+1} = \beta$;

(в) если $\beta \in \{L, R\}$, то $x_t = z_t + s_\beta$ $(*)$, а если ещё и $x_{t+1} = z_t + s_\beta$, то $f_{t+1} = f_t$, $d_{t+1} = f_t$, $q_{t+1} = j$, $z_{t+1} = z_t + s_\beta$.

Равенство $(*)$ автором явно не указано, но оно следует вот откуда. Если предположить, что $(*)$ не выполнено, то есть $x_{t+1} \neq z_t + s_\beta$, то формула Γ^{ret} оказывается истинной для любого h в силу ложности посылки импликации. Поэтому для любого h должно выполняться $d_{t+1} = h$. Но этого, конечно, быть не может, если только $\mathcal{B}$ не состоит из одного элемента, что не так.

Далее обратим внимание на формулировку предложения 6.1 пункт (ii). Чтобы доказать индукционный переход от $s = 0$ к $s = 1$ в прямом направлении, нужно из истинности формулы

$$\Psi K(t)(y_t) \wedge \exists v(\Phi^{(0)}(y_t, v) \wedge \Phi^{(0)}(v, y_{t+2})) \to \Psi K(t+2)(y_{t+2}) \tag{1}$$

для любых значений свободных переменных в $\mathcal{B}$ сделать вывод о том, что конфигурация $K(t)$ переходит в $K(t+2)$ за два шага. Последнее означает, что $K(t) \vdash^1 K(t+1) \vdash^1 K(t+2)$ для некоторой конфигурации $K(t+1)$. Иными словами ни для какой конфигурации $L(t+2) \neq K(t+2)$ формула

$$\Psi K(t)(y_t) \wedge \exists v(\Phi^{(0)}(y_t, v) \wedge \Phi^{(0)}(v, y_{t+2})) \to \Psi L(t+2)(y_{t+2}) \tag{2}$$

не может оставаться истинной для любых значений свободных переменных в $\mathcal{B}$.

Чтобы показать ложность последнего, рассмотрим такую конфигурацию $K(t)$, в которой машина Тьюринга должна будет сделать подряд два шага вправо, выполняя команды $k_1 = (q_i, \alpha \to q_j, R)$ и $k_2 = (q_j, \gamma \to q_\ell, R)$ соответственно.

Пусть в конфигурации $K(t)$ головка находится в ячейке с номером η, в которой написано α, а справа от неё — γ. Допустим, что в конфигурациях $K(t)$, $K(t+1)$, $K(t+2)$ в ячейке с номером $\eta - 1$ написано δ (её содержимое на протяжении рассматриваемых двух шагов, очевидно, не изменится). Рассмотрим конфигурацию $L(t+2)$, которая отличается от $K(t+2)$ тем, что в ячейке с номером $\eta - 1$ написано $\delta' \neq \delta$. Покажем, что из истинности формулы (1) для любых значений свободных переменных в $\mathcal{B}$ следует истинность формулы (2) для любых значений свободных переменных в $\mathcal{B}$. Это и опровергнет рассуждения из пункта (ii) предложения 6.1.

Для этого рассмотрим произвольные конкретные значения y_t, y_{t+2} и $v = y_{t+1}$, делающие истинными левую часть обеих формул (1) и (2), это влечёт истинность $\Psi K(t+2)(y_{t+2})$. Сразу отметим, что должно быть $z_{t+1} = \eta + 1$, поскольку $z_t = \eta$, $z_{t+2} = \eta + 2$, а z_{t+1} не может отличаться от этих двух значений более чем на единицу, что следует из пунктов (б) и (в). Согласно пункту (в), для истинности $\varphi(k_1)(y_t, y_{t+1})$ должно быть $x_t = z_t + 1$. Из $\Psi K(t)$ вытекает, что $f_t = \gamma$.

Рассмотрим случай $x_{t+1} = z_t + 1$. Тогда из (в) получаем $f_{t+1} = f_t = \gamma$, $d_{t+1} = f_t = \gamma$, $q_{t+1} = j$, $z_{t+1} = z_t + 1$. Снова согласно пункту (в) для истинности $\Phi^{(0)}(y_{t+1}, y_{t+2})$ должно быть $x_{t+1} = z_{t+1} + 1 = z_t + 2$. Получили противоречие, значит, случай $x_{t+1} = z_t + 1$ невозможен.

Пусть теперь $x_{t+1} \neq z_t + 1$. Тогда $x_{t+1} \neq x_t$, поэтому пункты (а) и (в) для формулы $\varphi(k_1)(y_t, y_{t+1})$ будут выполняться независимо от значений f_{t+1}. Допустим, что формула (2) ложна. Формула $\Psi L(t+2)(y_{t+2})$ отличается от $\Psi K(t+2)(y_{t+2})$ только тем, что одним из членов конъюнкции в ней вместо импликации $x_{t+2} = \eta - 1 \to f_{t+2} = \delta$ является $x_{t+2} = \eta - 1 \to f_{t+2} = \delta'$. Тогда делаем вывод, что $x_{t+2} = \eta - 1$, но $f_{t+2} = \delta \neq \delta'$.

Заменим в наборе y_{t+2} значение переменной f_{t+2} на δ', обозначим полученный набор y'_{t+2}. Теперь формула $\Psi K(t+2)(y'_{t+2})$ станет ложной. Но формула (1) истинна, значит, ложной должна стать и формула $\Phi^{(0)}(y_{t+1}, y'_{t+2})$, поскольку это — единственная формула в левой части импликации, содержащая f_{t+2}. Формула $\Phi^{(0)}(y_{t+1}, y_{t+2})$ является конъюнкцией импликаций $\varphi(k)(y_{t+1}, y_{t+2})$, в которых условия (0) попарно несовместны. Выберем из них ту $\varphi(k_3)(y_{t+1}, y_{t+2})$, условие которой истинно, пусть она соответствовала команде $k_3 = (q_n, \theta \to q_m, \beta)$ машины Тьюринга. Поскольку мы не меняли значения переменных d_{t+1} и q_{t+1}, то истинность условий (0) для импликаций $\varphi(k)(y_{t+1}, y_{t+2})$ не поменялась. Значит, ложной стала именно $\varphi(k_3)(y_{t+1}, y'_{t+2})$. Формула $\varphi(k_3)(y_{t+1}, y'_{t+2})$ могла стать ложной только в трёх случаях: (а) либо $x_{t+1} = x_{t+2} \neq z_{t+1} + s_\beta$ и $f_{t+1} = \delta$; (б) либо $\beta = \delta$ и $x_{t+2} = z_{t+1} + s_\beta$; (в) либо $\beta \in \{L, R\}$ и $x_{t+1} = x_{t+2} = z_{t+1} + s_\beta$ и $f_{t+1} = \delta$. В двух последних случаях $x_{t+2} = \eta - 1$ противоречит ранее установленному $z_{t+1} = \eta + 1$, поэтому два последних случая невозможны. Итак, мы получили $x_{t+1} = x_{t+2} = \eta - 1$ и $f_{t+1} = \delta$.

Поскольку $x_{t+1} = \eta - 1 \neq z_{t+1} + s_\beta$, то $\beta \notin \{L, R\}$, что снова следует из пункта (в). Заменим теперь в наборе y_{t+1} значение f_{t+1} на δ', обозначим полученный набор y'_{t+1}. Как мы уже отметили истинность формулы $\Phi^{(0)}(y_t, y_{t+1})$ при изменении f_{t+1} не изменится. Рассмотрим истинность формулы $\varphi(k)(y'_{t+1}, y'_{t+2})$ по сравнению с $\varphi(k)(y_{t+1}, y'_{t+2})$. Пункт (б) не поменяет своего значения из-за $x_{t+1} = \eta - 1 \neq z_{t+1} + s_\beta$. А пункт (а) снова станет истинным. Следовательно, истинной станет вся формула $\varphi(k)(y'_{t+1}, y'_{t+2})$ и, следовательно, $\Phi^{(0)}(y'_{t+1}, y'_{t+2})$. Но теперь получается, что для наборов y_t, $v = y'_{t+1}$ и y'_{t+2} истинной является левая часть импликации (1), но ложной правая. Это противоречит истинности (1) для всех значений наборов свободных переменных.

Полученное противоречие доказывает, что (2) будет истинной, если истинной была (1), а значит истинность формулы (1) не гарантирует перехода $K(t) \vdash^2 K(t+2)$.

Теперь вернёмся к собственно рецензируемой статье. Отличие её от работы [7] только в том, что формулы строятся для двухленточной машины Тьюринга со второй рабочей лентой и с обычной «трёхоперандной» системой команд, вместо упрощённой двухоперандной. Все шаги построения всех формул остаются ровно такими же, как и в работе [7] с точностью до переименования некоторых объектов: конфигурации обозначаются буквой C вместо K, вместо v используется Y и т. д. Поэтому описанная мной ошибка, будет по прежнему присутствовать, только теперь это будет пункт (ii) предложения 4.

Хочу при этом отметить, что я не вижу, как эту ошибку можно было бы исправить.

Таким образом, работа И. В. Латкина «The definability of the turing machine computations by boolean formulae» содержит серьёзную ошибку, видимых путей её исправления я не представляю, поэтому рекомендую статью не публиковать.

Рецензент
доктор физ.-мат. наук