

## О ДВУДОЛЬНЫХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ НЕБОЛЬШИХ ДИАМЕТРОВ

А.А. МАХНЕВ, В.В.БИТКИНА, А.А. ТОКБАЕВА 

*Представлено А.А. МАХНЕВЫМ*

**Abstract:** Within the class of bipartite distance-regular graphs of diameter  $5 \leq d \leq 7$ , the following intersection arrays are admissible:  $\{k, k-1, k-c, c, 1; 1, c, k-c, k-1, k\}$ , where  $k = r(r^2 + 3r + 1)$ ,  $c = r(r+1)$  (the bipartite double of the Krein graph  $\text{Kre}(r)$ ),  $\{55, 54, 50, 5, 1; 1, 5, 50, 54, 55\}$ ,  $\{7, 6, 6, 5, 4, 3; 1, 1, 2, 3, 4, 7\}$  and  $\{7, 6, 6, 5, 2, 1, 1; 1, 1, 2, 5, 6, 6, 7\}$ .

Since the Krein graph  $\text{Kre}(r)$  does not exist for  $r = 3$  and  $r = 4$ , distance-regular graphs with the intersection arrays  $\{57, 56, 45, 12, 1; 1, 12, 45, 56, 57\}$  and  $\{116, 115, 96, 20, 1; 1, 20, 96, 115, 116\}$  do not exist (Theorem 1).

J. Koolen proved that a graph with the intersection array  $\{7, 6, 6, 5, 4, 3; 1, 1, 2, 3, 4, 7\}$  does not exist.

A graph with the intersection array  $\{7, 6, 6, 5, 2, 1, 1; 1, 1, 2, 5, 6, 6, 7\}$  is a 2-cover of an unknown near heptagon and has an antipodal quotient with the intersection array  $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ . A. Makhnev, V. Bitkina, and A. Gutanova proved that a graph with the intersection array  $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$  does not exist. Therefore, a distance-regular graph with the intersection array  $\{7, 6, 6, 5, 2, 1, 1; 1, 1, 2, 5, 6, 6, 7\}$  does not exist (Theorem 2).

This work also studies the existence problem for a graph with the intersection array  $\{26, 25, 24, 2, 1; 1, 2, 24, 25, 26\}$ .

**Keywords:** distance-regular graph, bipartite graph.

## 1 Введение

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если  $a, b$  — вершины графа  $\Gamma$ , то через  $d(a, b)$  обозначается расстояние между  $a$  и  $b$ , а через  $\Gamma_i(a)$  — подграф графа  $\Gamma$ , индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии  $i$  в  $\Gamma$  от вершины  $a$ . Подграф  $\Gamma_1(a)$  называется *окрестностью вершины  $a$*  и обозначается через  $[a]$ . Через  $a^\perp$  обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром  $a$ .

Граф  $\Gamma$  называется *регулярным графом степени  $k$* , если  $[a]$  содержит точно  $k$  вершин для любой вершины  $a$  из  $\Gamma$ . Граф  $\Gamma$  называется *реберно регулярным графом с параметрами  $(v, k, \lambda)$* , если  $\Gamma$  содержит  $v$  вершин, является регулярным степени  $k$ , и каждое ребро из  $\Gamma$  лежит в  $\lambda$  треугольниках. Граф  $\Gamma$  называется *вполне регулярным графом с параметрами  $(v, k, \lambda, \mu)$* , если  $\Gamma$  реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф  $[a] \cap [b]$  содержит  $\mu$  вершин в случае  $d(a, b) = 2$ . Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Число вершин в  $[a] \cap [b]$  обозначим через  $\lambda(a, b)$  (через  $\mu(a, b)$ ), если  $d(a, b) = 1$  (если  $d(a, b) = 2$ ), а соответствующий подграф назовем  $(\mu)$ - $\lambda$ -подграфом.

Если вершины  $u, w$  находятся на расстоянии  $i$  в  $\Gamma$ , то через  $b_i(u, w)$  (через  $c_i(u, w)$ ) обозначим число вершин в пересечении  $\Gamma_{i+1}(u)$  (в пересечении  $\Gamma_{i-1}(u)$ ) с  $[w]$ . Граф диаметра  $d$  называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений  $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$* , если значения  $b_i = b_i(u, w)$  и  $c_i = c_i(u, w)$  не зависят от выбора вершин  $u, w$  на расстоянии  $i$ . Положим  $a_i = k - b_i - c_i$  и  $k_i = |\Gamma_i(u)|$  (значение  $k_i$  не зависит от выбора вершины  $u$ ). Числа пересечений графа  $p_{ij}^l$  и параметры Крейна  $q_{ij}^l$  определены в [1] (стр. 43 и 48 соответственно).

Пусть  $\Gamma$  является дистанционно регулярным графом диаметра  $d$ . Для  $i \in \{1, 2, \dots, d\}$  граф  $\Gamma_i$  определен на множестве вершин графа  $\Gamma$  и две вершины  $u, w$  смежны в  $\Gamma_i$  тогда и только тогда, когда  $d_\Gamma(u, w) = i$ . Для  $I \subset \{1, 2, \dots, d\}$  граф  $\Gamma_I$  определен на множестве вершин графа  $\Gamma$  и две вершины  $u, w$  смежны в  $\Gamma_I$  тогда и только тогда, когда  $d_\Gamma(u, w) \in I$ .

В классе двудольных дистанционно регулярных графов диаметра  $5 \leq d \leq 7$  имеются допустимые массивы пересечений:  $\{k, k-1, k-c, c, 1; 1, c, k-c, k-1, k\}$ , где  $k = r(r^2 + 3r + 1)$ ,  $c = r(r+1)$  (двудольное удвоение графа Крейна  $Kre(r)$ ),  $\{55, 54, 50, 5, 1; 1, 5, 50, 54, 55\}$ ,  $\{7, 6, 6, 5, 4, 3; 1, 1, 2, 3, 4, 7\}$  и  $\{7, 6, 6, 5, 2, 1, 1; 1, 1, 2, 5, 6, 6, 7\}$ .

**Теорема 1.** *Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений  $\{57, 56, 45, 12, 1; 1, 12, 45, 56, 57\}$  и  $\{116, 115, 96, 20, 1; 1, 20, 96, 115, 116\}$  не существуют.*

Граф Крейна  $Kre(r)$  не существует при  $r = 3$  [4] и  $r = 4$  [5]. Отсюда следует теорема 1.

**Предложение 1.** *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{7, 6, 6, 5, 4, 3; 1, 1, 2, 3, 4, 7\}$  не существует.*

Дж. Кулен [2] доказал, что граф с массивом пересечений  $\{7, 6, 6, 5, 4, 3; 1, 1, 2, 3, 4, 7\}$  не существует.

**Теорема 2.** *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{7, 6, 6, 5, 2, 1, 1; 1, 1, 2, 5, 6, 6, 7\}$  не существует.*

Граф с массивом пересечений  $\{7, 6, 6, 5, 2, 1, 1; 1, 1, 2, 5, 6, 6, 7\}$  является двудольным удвоением неизвестного почти 7-угольника [1, chapter 4.2D] и имеет антиподальное частное с массивом пересечений  $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ . А. Махнев, В. Биткина и А. Гутнова [3] доказали, что граф с массивом пересечений  $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$  не существует. Теорема 2 доказана.

**Предложение 2.** *Недвудольный сильно регулярный граф без треугольников с  $\mu = 5$  имеет параметры  $(650, 55, 0, 5)$ .*

Граф, удовлетворяющий условиям предложения 2, имеет степень  $k = r^2 + 5r + 5$  для некоторого целого числа  $r$ ,  $v - k - 1 = (r^2 + 5r + 5)(r^2 + 5r + 4)/5$ . Далее,  $\Gamma$  имеет собственные значения  $r, -(r + 5)$ , причем кратность  $r$  равна  $(r + 4)(r^2 + 5r + 5)(r^2 + 6r + 10)/(10r + 25)$ . Отсюда  $2r + 5$  делит  $15(r + 2)(7r + 20)$  и  $75$ . Поэтому  $2r + 5 \in \{15, 25, 75\}$  и  $r \in \{5, 10, 35\}$ . Но в случае  $r = 35$  число  $5(70 + 5)$  не делит  $(r + 4)(r^2 + 5r + 5)(r^2 + 6r + 10) = 39 \cdot 1405 \cdot 1445$ , а в случае  $r = 10$  число  $5(20 + 5)$  не делит  $14 \cdot 155 \cdot 170$ . Отсюда  $\Gamma$  имеет параметры  $(650, 55, 0, 5)$ . Предложение 2 доказано.

**Теорема 3.** *Пусть  $\Gamma$  является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений  $\{55, 54, 50, 5, 1; 1, 5, 50, 54, 55\}$ . Тогда  $\Gamma_{1,3}$  – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{649, 648, 1; 1, 648, 649\}$ .*

## 2 Тройные числа пересечений

Пусть  $\Gamma$  – дистанционно регулярный граф диаметра  $d$ . Если  $u_1, u_2, u_3$  – вершины графа  $\Gamma$ ,  $r_1, r_2, r_3$  – неотрицательные целые числа, не большие  $d$ , то  $\left\{ \begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right\}$  – множество вершин  $w \in \Gamma$  таких, что  $d(w, u_i) = r_i$ ,  $\left[ \begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right] = \left| \left\{ \begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right\} \right|$ . Числа  $\left[ \begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right]$  называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин  $u_1, u_2, u_3$  вместо  $\left[ \begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right]$  будем писать  $[r_1 r_2 r_3]$ .

Пусть  $u, v, w$  – вершины графа  $\Gamma$ ,  $W = d(u, v)$ ,  $U = d(v, w)$ ,  $V = d(u, w)$ . Так как имеется точно одна вершина  $x = u$  такая, что  $d(x, u) = 0$ , то число  $[0jh]$  равно 0 или 1. Отсюда  $[0jh] = \delta_{jW} \delta_{hV}$ . Аналогично,  $[i0h] = \delta_{iW} \delta_{hU}$  и  $[ij0] = \delta_{iU} \delta_{jV}$ , где  $\delta$  – символ Кронекера.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из  $\{u, v, w\}$ , и сосчитав число вершин всех расстояний от третьей, получим:

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^d [ljh] = p_{jh}^U - [0jh] \\ \sum_{l=1}^d [ilh] = p_{ih}^V - [i0h] \\ \sum_{l=1}^d [ijl] = p_{ij}^W - [ij0] \end{cases} \quad (*)$$

При этом некоторые тройки исчезают. При  $|i - j| > W$  или  $i + j < W$  имеем  $p_{ij}^W = 0$ , поэтому  $[ijh] = 0$  для всех  $h \in \{0, \dots, d\}$ .

Положим  $S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^d Q_{ri} Q_{sj} Q_{th} \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$ . Если параметр Крейна  $q_{ij}^h = 0$ , то  $S_{ijh}(u, v, w) = 0$  [7].

### 3 Свойства графа с массивом пересечений

$$\{55, 54, 50, 5, 1; 1, 5, 50, 54, 55\}$$

В этом разделе  $\Gamma$  — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{55, 54, 50, 5, 1; 1, 5, 50, 54, 55\}$ . Антиподальное частное графа  $\Gamma$  является сильно регулярным графом с параметрами  $(650, 55, 0, 5)$ . Далее,  $\Gamma$  имеет  $1+55+594+594+55+1 = 1300$  вершин, спектр  $55^1, 10^{220}, 5^{429}, -5^{429}, -10^{220}, -55^1$  и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 220 & 429 & 429 & 220 & 1 \\ 1 & 40 & 39 & -39 & -40 & -1 \\ 1 & \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{10}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{10}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{13}{3} & \frac{10}{3} & -1 \\ 1 & -40 & 39 & 39 & -40 & 1 \\ 1 & -220 & 429 & -429 & 220 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Лемма 1.** Числа пересечений графа  $\Gamma$  равны:

$$\begin{aligned} p_{11}^1 &= 0, p_{12}^1 = 54, p_{23}^1 = 540, p_{34}^1 = 54, p_{45}^1 = 1, \\ p_{11}^2 &= 5, p_{12}^2 = 0, p_{13}^2 = 50, p_{22}^2 = 543, p_{24}^2 = 50, p_{33}^2 = 543, p_{35}^2 = 1, \\ p_{44}^2 &= 5, \\ p_{12}^3 &= 50, p_{23}^3 = 543, p_{34}^3 = 50, p_{35}^3 = 1, \\ p_{13}^4 &= 54, p_{15}^4 = 1, p_{22}^4 = 540, p_{15}^4 = 1, p_{24}^4 = 54, p_{33}^4 = 540, \\ p_{14}^5 &= 55, p_{23}^5 = 594. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Прямые вычисления. □

Пусть  $u, v, w$  — вершины графа  $\Gamma$ ,  $\{ijl\} = \begin{Bmatrix} uvw \\ ijl \end{Bmatrix}$ ,  $[ijl] = \begin{bmatrix} uvw \\ ijl \end{bmatrix}$ . Положим  $\Sigma = \Gamma_2(u)$ ,  $\Lambda = \Sigma_2$ . Тогда  $\Lambda$  — регулярный граф степени  $p_{22}^2 = 543$  на  $k_2 = 594$  вершинах.

**Лемма 2.** Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 4$ . Тогда тройные числа пересечений равны:

$$\begin{aligned}
[113] &= [131] = 5, [133] = 45; \\
[222] &= 494, [224] = [242] = 49; \\
[313] &= [331] = 49, [333] = 494, [315] = [351] = 1; \\
[422] &= 45, [424] = [442] = 5; \\
[533] &= 1.
\end{aligned}$$

*Доказательство.* Упрощение формул из предыдущего раздела.  $\square$

Для числа ребер  $d$  между  $\Lambda(v)$  и  $\Lambda - (\{v\} \cup \Lambda(v))$  в графе  $\Lambda$  верно равенство  $d = 494 \cdot 50 = 24700$ .

С другой стороны,  $d = 543(542 - \lambda)$ , где  $\lambda$  — среднее значение параметра  $\lambda(\Lambda)$ . Поэтому  $542 - \lambda = 45.488$  и  $\lambda = 496.512$ .

**Лемма 3.** Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$ . Тогда тройные числа пересечений равны:

$$\begin{aligned}
[111] &= -r_1 + 497, [113] = [131] = r_1 - 492, [133] = -r_1 + 542; \\
[222] &= r_1, [224] = [242] = -r_1 + 542, [244] = r_1 - 492; \\
[311] &= r_1 - 492, [313] = [331] = -r_1 + 542, [333] = r_1, [335] = [353] = 1; \\
[422] &= -r_1 + 542, [424] = [442] = r_1 - 492, [444] = -r_1 + 497; \\
[533] &= 1, \\
&\text{где } 492 \leq r_1 \leq 497.
\end{aligned}$$

*Доказательство.* Упрощение формул из предыдущего раздела.  $\square$

По лемме 3.3 получим  $492 \leq [222] = r_1 + 492 \leq 497$ .

Найдем параметры графа  $\Gamma_{1,3}$ . Имеем  $v = 1300$ ,  $k = k_1 + k_3 = 55 + 594 = 649$ ,  $\lambda = 0$  (т.к.  $p_{11}^1 = p_{13}^1 = p_{33}^1 = p_{13}^3 = p_{33}^3 = 0$ ),  $\mu = 648$  (т.к.  $p_{11}^2 + 2p_{13}^2 + p_{33}^2 = 5 + 2 \cdot 50 + 543$  и  $2p_{13}^4 + p_{33}^4 = 2 \cdot 54 + 540$ ). Итак,  $\Gamma_{1,3}$  — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{649, 648, 1; 1, 648, 649\}$ .

Теорема 3 доказана.

## References

- [1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1989.
- [2] J. Koolen, *A New Condition for Distance-regular Graphs*, Europ. J. Comb., **13** (1992), 63–64.
- [3] A. Makhnev, V. Bitkina, A. Gutnova, *Distance-regular graphs with intersection arrays  $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$  and  $\{42, 30, 2; 1, 10, 36\}$  do not exist*, Vlad. Math. Zhurnal, **23**:4 (2021), 68–76.
- [4] A. Gavrilyuk, A. Makhnev, *On Krein graphs without triangles*, Dokl. mathematics, **72**:1 (2005), 591–594.
- [5] A. Makhnev, *Krein graph Kre(4) do not exist*, Dokl. mathematics, **96** (2017), 348–350.
- [6] J. Vidali, *Using Symbolic Computation to Prove Nonexistence of Distance-Regular Graphs*, Electron. Journal of Comb., **25**:4 (2018), 1–10.
- [7] K. Coolsaet, A. Jurishich, *Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs*, J. Comb. Theory, Series A., **115**:6 (2008), 1086–1095.

ALEXANDER ALEKSEEVICH MAKHNEV  
N.N. KRASOVSKII INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS OF UB RAS,  
S. KOVALEVSKAYA ST., 16,  
620108, YEKATERINBURG, RUSSIA  
*Email address:* [makhnev@imm.uran.ru](mailto:makhnev@imm.uran.ru)

VICTORIA VASILIEVNA BITKINA  
NORTH OSSETIAN STATE UNIVERSITY,  
VATUTINA ST., 44-46,  
362025, NORTH OSSETIA - ALANIA, VLADIKAVKAZ, RUSSIA  
*Email address:* [bviktoriyav@mail.ru](mailto:bviktoriyav@mail.ru)

ALBINA ANIAROVNA TOKBAEVA  
KABARDINO-BALKARIAN STATE UNIVERSITY NAMED AFTER H.M. BERBEKOV,  
CHERNYSHEVSKY ST., 175,  
360004, NALCHIK, RUSSIA  
*Email address:* [nirova\\_m@mail.ru](mailto:nirova_m@mail.ru)