УДК 519.63;
MSC: 35K20; 65N12

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ[1)]

А.К. Баззаев[a, b, *]

[a] *Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова*
[b] *Владикавказский институт управления*
e-mail: [*] *a.k.bazzaev@yandex.ru*

Аннотация

This work is devoted to the construction and analysis of finite difference schemes for a boundary value problem with a nonlocal boundary condition for a one-dimensional parabolic equation. The considered differential problem arises in the mathematical modeling of the gettering technological process, which is used, for example, in the purification of silicon wafers from impurities. The paper investigates a family of weighted difference schemes. Using the method of energy inequalities for the difference problem, an a priori estimate is obtained, which implies the stability of the difference schemes and the convergence of the numerical solution to the exact one.

Ключевые слова: уравнение параболического типа, краевая задача, априорная оценка, аппроксимация, устойчивость разностной схемы, сходимость разностной схемы, нелокальное граничное условие, нелокальная краевая задача.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x,t): \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le t \le T\}$ рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \ (x,t) \in Q_T, \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ 0 < x < 1, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \ 0 < t < T, \tag{1.3}$$

$$p(t)u(1,t) + \int\limits_0^1 u(x,t)dx = p_0\varphi(1) + \int\limits_0^1 \varphi(x)dx, \ 0 \le t \le T, \tag{1.4}$$

где $\varphi(x) \in C[0;1], \ k(t) \in C^1[0;1], \ p(t) \in C^1[0;1], \ f(x,t) \in C[0;1]$ — заданные функции такие, что

$$0 < c_0 \le k(t) \le c_1 < \infty, \ 0 < c_2 \le p(t) \le c_3 < \infty,$$

c_0, c_1, c_2, c_3, T — заданные положительные числа.

Задача (1.1) — (1.4) возникает при математическом моделировании технологического процесса внешнего геттерирования, применяющегося, например, при очистке кремниевых плат от примеси. В этом случае $u_0(x)$ есть распределение примеси в плате $\{0 \le x \le 1\}$ в начальный момент времени $t = 0$, а $u(x,t)$ — ее распределение в момент времени t.

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Соглашение № 075-02-2025-1530.

Коэффициент диффузии $k(t)$ в этом процессе зависит от температуры, которую можно изменять с течением времени в определенных пределах, откуда и возникают ограничения на коэффициент $k(t)$ и зависящий от $k(t)$ коэффициент $p(t)$.

Условие (1.3) означает, что диффузионный поток через левую границу платы $\{x = 0\}$ отсутствует.

Если бы равнялся нулю диффузионный поток и через правую границу $\{x = 1\}$ (т.е., $\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0$), то закон сохранения количества вещества принял бы вид:

$$\int_0^1 u(x,t)dx = \int_0^1 \varphi(x)dx, \ 0 \le t \le T.$$

Условие (1.4) означает, что часть вещества сосредотачивается (сегрегируется) на правой границе пластины ($p(t) = \alpha \cdot (1 + \beta k^{-\gamma}(t))$, где $\alpha, \ \beta, \ \gamma > 0$ — коэффициент сегрегации).

Следует отметить, что нелокальные параболические задачи возникают также при исследовании процесса теплопередачи. Так, например, в работе [3] рассматривается задача о распространении тепла в тонком нагретом стержне $\{0 \le x \le 1\}$, если задано количество тепла на части стержня $0 \le x \le X(t), \ 0 \le t \le T$. Этот процесс приводит к изучению граничной задачи для уравнения (1.1) с нелокальным краевым условием

$$\int_0^{X(t)} u(x,t)dx = E(t), \ 0 \le t \le T,$$

где $E(t), \ X(t)$ — известные функции.

В работе [1] доказана корректная разрешимость в соответствующем энергетическом пространстве краевой задачи с нелокальным граничным условием для одномерного параболического уравнения, а также получены заменяющие принцип максимума двусторонние равномерные оценки решения задачи.

В работе [2] доказано существование и единственность классического решения краевой задачи (1.1) — (1.4), если $E(t)$ и $X(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0, T]$.

В работе [3] в более общей постановке для аналогичной задачи установлена однозначная разрешимость в предположении, что $E(t)$ и $X(t)$ удовлетворяют условию Гельдера.

В целом, исследование моделей процессов переноса в различных природных системах представляет одно из быстро развивающихся направлений современной математики. Повышенный интерес к данной проблеме объясняется тем, что процессы переноса имеют самое широкое распространение в природе и технике. Теория процессов переноса опирается в своих исследованиях на ряд основополагающих аксиом классической термодинамики необратимых процессов. Однако некоторые из них накладывают серьезные ограничения на область применения этой теории. Процессы переноса по своей сути нелокальны и имеют место в системах, которые, строго говоря, не находятся в состоянии термодинамического равновесия.

Многие процессы в сложных системах обладают нелокальностью. Нелокальные краевые задачи возникают при изучении диффузии частиц в турбулентной плазме, переноса влаги в почво - грунтах, распространения тепла в тонком нагретом стержне, если задан закон изменения общего количества тепла стержня. К первым работам для параболических уравнений с неклассическими (интегральными) граничными условиями относятся, по - видимому, работы Камынина Л.И. [3] и Чудновского А.Ф. [4]. После появления работы Бицадзе А.В. и Самарского А.А. [5] внимание математиков все чаще стали привлекать нелокальные задачи математической физики. Различные классы нелокальных краевых задач изучались в работах Ионкина Н.И. [6], [7], Ильина В.А., Моисеева Е.И. [8], Ионкина Н.И., Моисеева Е.И. [9], Гордезиани Д.Г. [10], Нахушева А.М. [11], Солдатова А.П., Шханукова М.Х. [12] и др.

В работе [13] исследована задача для параболического уравнения с неклассическими краевыми условиями. Для рассматриваемой задачи исследовано семейство разностных схем с весами. Приведен алгоритм нахождения численного решения. На основании принципа максимума для разностной задачи получена априорная оценка, доказаны устойчивость и сходимость разностного решения к точному в равномерной метрике.

В работе [14] исследуется семейство разностных схем с весами для уравнения диффузии дробного порядка с неклассическими краевыми условиями. Приведен алгоритм нахождения численного решения. С помощью принципа максимума для разностной задачи получена априорная оценка, из которой следует устойчивость разностных схем и сходимость численного решения к точному в норме C с порядком, равным погрешности аппроксимации.

2. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Введем по пространственной переменной x на отрезке $[0,1]$ сетку $\overline{\omega}_{\hbar} = \{x_i = i\hbar : \ i = 0, 1 \ldots, N\}$ с шагом $\hbar$, где

$$\hbar = \begin{cases} h = \dfrac{1}{N}, & \text{i = 1, 2, \ldots, N-1;} \\ \dfrac{h}{2}, & \text{i = 0, N.} \end{cases}$$

На отрезке $[0,T]$ также введем сетку $\overline{\omega}_{\tau} = \{x_i = j\tau : \ \ j = 0, 1 \ldots, j_0\}$ с шагом $\tau = \dfrac{T}{j_0}$ по переменной t. На множестве $\overline{Q}_T$ рассмотрим сетку

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_{\tau} = \{(x_i, t_j), \ i = 0, 1, 2, \ldots, N; \ j = 0, 1, 2, \ldots, j_0\}.$$

Дифференциальное уравнение (1.1) аппроксимируем разностным уравнение

$$y_{\bar{t}}^{j+1} = \Lambda y^{(\sigma)} + f_i^{j+1}, \tag{2.1}$$

где

$$y_{\bar{t}}^{j+1} = \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau}, \ y_i^{(\sigma)} = \sigma \hat{y}_i + (1-\sigma) y_i,$$

$$\Lambda y = k^{j+1} y_{\bar{x}x}, \ a_i = 0.5(k_{i-1} + k_i), \ k_i = k(\bar{t}),$$

$$f_i = f_i^j = f(x_i, \bar{t}), \ \varphi_i = \varphi(x_i), \ \bar{t} = t_j + 0.5\tau,$$

$$\hat{y} = y_i^{j+1}, \ y = y_i^j, \ \check{y} = y_i^{j-1}, \ y_{\bar{x},N} = \frac{y_N - y_{N-1}}{h}.$$

Начальное условие (1.2) заменим разностным

$$y_i^0 = \varphi_i, \ i = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{2.2}$$

К (2.1), (2.2) необходимо присоединить разностный аналог для граничных условий (1.3) — (1.4). Разностный аналог для (1.3) имеет вид:

$$y_{x,0} = 0, \ i = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{2.3}$$

Условие (2.3) имеет первый порядок аппроксимации. Применяя известный прием повышения порядка аппроксимации граничных условий на решениях уравнения (1.1) (см. [16], Гл. II, §1, п. 7 с. 84), получим:

$$y_{\bar{t},0} = \frac{k^{j+1} y_{x,0}^{(\sigma)}}{0.5h} + f_0. \tag{2.4}$$

Граничное условие (1.4) аппроксимируем следующим образом:

$$p^{j+1} y_N^{j+1} + \sum_{i=0}^{N} y_i^{(\sigma)} \hbar = p_0 \varphi_N + \sum_{i=0}^{N} \varphi_i \hbar. \tag{2.5}$$

Таким образом дифференциальной задаче (1.1) — (1.4) поставим в соответствие однопараметрическое по $\sigma,\ 0 \le \sigma \le 1$ семейство разностных схем:

$$y_{\bar{t}}^{j+1} = \Lambda y^{(\sigma)} + f_i^{j+1},\ i = 1, 2, \ldots, N-1,\ j = 1, 2, \ldots, j_0 - 1, \tag{2.6}$$

$$y_i^0 = \varphi_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, N, \tag{2.7}$$

$$y_{\bar{t},0} = \frac{k^{j+1} y_{x,0}^{(\sigma)}}{0.5h} + f_0,\ i = 1, 2, \ldots, N-1,\ j = 1, 2, \ldots, j_0 - 1, \tag{2.8}$$

$$p^{j+1} y_N^{(\sigma)} + \sum_{i=0}^{N} y_i^{(\sigma)} \hbar = p_0 \varphi_N + \sum_{i=0}^{N} \varphi_i \hbar,\ i = 1, 2, \ldots, N-1,\ j = 1, 2, \ldots, j_0 - 1. \tag{2.9}$$

3. УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Так как для нелокальных краевых задач, вообще говоря, не установлен принцип максимума Самарского [15, 16], то априорную оценку для решения разностной задачи будем получать с помощью метода энергетических неравенств [16].

Для упрощения дальнейших выкладок запишем схему в следующем виде:

$$y_{\bar{t}}^{j+1} = \Lambda y^{(\sigma)} + f_i^{j+1},\ i = 1, 2, \ldots, N-1,\ j = 1, 2, \ldots, j_0 - 1, \tag{3.1}$$

$$y_i^0 = \varphi_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, N, \tag{3.2}$$

$$y_{\bar{t},0}^{j+1} = \frac{(ky)_{x,0}^{(\sigma)}}{0.5h} + f_0,\ j = 0, 1, 2, \ldots, j_0 - 1, \tag{3.3}$$

$$y_{\bar{t},N}^{j+1} = -\frac{1}{\sigma\tau(p^{j+1} + 0.5h)} \left[(p^{j+1} + 0.5h) y_N^j + \sum_{i=0}^{N-1} y_i^{(\sigma)} \hbar \right] + \frac{C}{\sigma\tau(p^{j+1} + 0.5h)},\ j = 0, 1, 2, \ldots, j_0 - 1, \tag{3.4}$$

где $C = p_0 \varphi_N + \sum\limits_{i=0}^{N} \varphi_i \hbar$, или, что тоже самое:

$$y_{\bar{t}}^{j+1} = \overline{\Lambda} y^{(\sigma)} + \overline{\varphi}^{j+1}, \tag{3.5}$$

$$y_i^0 = \varphi_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, N, \tag{3.6}$$

$$\overline{\Lambda} y = \begin{cases} \Lambda y = (k y_{\bar{x}x,i})^{(\sigma)}, & \text{i=1,2,\ldots,N-1;} \\ \Lambda^- y = \dfrac{(k y_{x,0})^{(\sigma)}}{0.5h}, & \text{i=0;} \\ \Lambda^+ y = -\dfrac{1}{\sigma\tau(p^{j+1} + 0.5h)} \left[(p^{j+1} + 0.5h) y_N^j + \sum\limits_{i=0}^{N-1} y_i^{(\sigma)} \hbar \right], & \text{i=N,} \end{cases} \tag{3.7}$$

$$F = \begin{cases} f_i, & \text{i=1,2,\ldots,N-1;} \\ f_0, & \text{i=0;} \\ \dfrac{C}{\sigma\tau(p^{j+1} + 0.5h)}, & \text{i=N,} \end{cases} \tag{3.8}$$

$$C = p_0 \varphi_N + \sum_{i=0}^{N} \varphi_i \hbar.$$

Введем скалярное произведение

$$[u, v] = \sum_{i=0}^{N} u_i v_i \hbar,$$

а также норму
$$\|u\| = \sqrt{(u,u)}.$$

Умножим уравнение (3.5) скалярно на $y^{(\sigma)}$, тогда получим
$$[y_{\bar t}^{j+1}, y^{(\sigma)}] - [\overline{\Lambda} y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}] = [F^{j+1}, y^{(\sigma)}]. \tag{3.9}$$

Преобразуем каждое слагаемое в (3.9).
$$[y_{\bar t}^{j+1}, y^{(\sigma)}] = \frac{1}{2}\|y^{j+1}\|_{\bar t}^2 + \tau\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\|y_{\bar t}^{j+1}\|^2. \tag{3.10}$$

$$[\overline{\Lambda} y^{j+1}, y^{(\sigma)}] = \left(\Lambda y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right) + \Lambda^- y^{(\sigma)}\, y^{(\sigma)}\hbar + \Lambda^+ y^{(\sigma)}\, y^{(\sigma)}\hbar = \tag{3.11}$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} k_i \left(y_{\bar x,i}^{(\sigma)}\right)^2 h + k_N y_{\bar x,N}^{(\sigma)} y_N^{(\sigma)} - \frac{1}{\sigma\tau(p^{j+1}+0.5h)}\left[(p^{j+1}+0.5h)y_N^j + \sum_{i=0}^{N-1} y_i^{(\sigma)}\hbar\right] y_N^{(\sigma)} 0.5h. \tag{3.12}$$

Подставим (3.10), (3.12) в (3.9), тогда получим
$$\frac{1}{2}\|y^{j+1}\|_{\bar t}^2 + \tau\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\|y_{\bar t}^{j+1}\|^2 + \sum_{i=1}^{N} k_i \left(y_{\bar x,i}^{(\sigma)}\right)^2 h - k_N y_{\bar x,N}^{(\sigma)} y_N^{(\sigma)} +$$
$$+\frac{1}{\sigma\tau(p^{j+1}+0.5h)}\left[(p^{j+1}+0.5h)y_N^j + \sum_{i=0}^{N-1} y_i^{(\sigma)}\hbar\right] y_N^{(\sigma)} 0.5h = [F^{j+1}, y^{(\sigma)}]. \tag{3.13}$$

Оценим теперь слагаемые, входящие в (3.13).

С помощью неравенства Юнга с параметром $\varepsilon_1 > 0$ для $-k_N y_{\bar x,N}^{(\sigma)} y_N^{(\sigma)}$ получаем:
$$|-k_N y_{\bar x,N}^{(\sigma)} y_N^{(\sigma)}| \le \frac{k_N}{2}\left(\varepsilon_1 \big(y_{\bar x,N}^{(\sigma)}\big)^2 + \frac{1}{\varepsilon_1}\big(y_N^{(\sigma)}\big)^2\right) \le \frac{c_1\varepsilon_1}{2}\big(y_{\bar x,N}^{(\sigma)}\big)^2 + \frac{c_1}{2\varepsilon_1}\big(y_N^{(\sigma)}\big)^2. \tag{3.14}$$

Оценим теперь нелокальное слагаемое, используя неравенство Коши – Буняковского:
$$\left|\frac{0.5h}{\sigma\tau(p^{j+1}+0.5h)}\left[(p^{j+1}+0.5h)y_N^j + \sum_{i=0}^{N-1} y_i^{(\sigma)}\hbar\right] y_N^{(\sigma)}\right| \le$$
$$\le \frac{0.5h}{\sigma\tau(p^{j+1}+0.5h)}\left[(p^{j+1}+0.5h)|y_N^j| + \|y^{(\sigma)}\|\sqrt{\sum_{i=0}^{N-1}\hbar}\right]\left|y_N^{(\sigma)}\right| \le$$
$$\le \frac{0.5h}{\sigma\tau(p^{j+1}+0.5h)}\left[(p^{j+1}+0.5h)|y_N^j| + \|y^{(\sigma)}\|\right]\left|y_N^{(\sigma)}\right|. \tag{3.15}$$

так как $\sum\limits_{i=0}^{N-1}\hbar = 1 - 0.5h < 1$.

Применяя к (3.15) неравенство Юнга с параметром $\varepsilon_2 > 0$, а также учитывая, что $p^{j+1} \ge c_2 > 0$, $p^{j+1} + 0.5h \ge c_2$, получаем:
$$\left|\frac{0.5h}{\sigma\tau(p^{j+1}+0.5h)}\left[(p^{j+1}+0.5h)y_N^j + \sum_{i=0}^{N-1} y_i^{(\sigma)}\hbar\right] y_N^{(\sigma)}\right| \le$$
$$\le \frac{0.5h}{\sigma\tau c_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\left((c_2+0.5h)^2(y_N^j)^2 + \|y^{(\sigma)}\|^2\right) + \frac{\varepsilon_2}{2}\big(y_N^{(\sigma)}\big)^2\right). \tag{3.16}$$

Для правой части также с помощью неравенства Юнга получаем оценку:

$$[F^{j+1}, y^{(\sigma)}] \le \|F^{j+1}\| \|y^{(\sigma)}\| \le \frac{1}{2}\|F^{j+1}\|^2 + \frac{1}{2}\|y^{(\sigma)}\|^2. \qquad (3.17)$$

Подставим теперь все оценки (3.14) — (3.17) в неравенство (3.13), тогда получим

$$\frac{1}{2}\|y^{j+1}\|_{\bar{t}}^2 + \tau\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\|y_{\bar{t}}^{j+1}\|^2 + \sum_{i=1}^{N} k_i \left(y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\right)^2 h \le \frac{c_1\varepsilon_1}{2}\big(y_{\bar{x},N}^{(\sigma)}\big)^2 + \frac{c_1}{2\varepsilon_1}\big(y_N^{(\sigma)}\big)^2 +$$

$$+\frac{0.5h}{\sigma\tau c_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\left((c_2+0.5h)^2(y_N^j)^2 + \|y^{(\sigma)}\|^2\right) + \frac{\varepsilon_2}{2}\big(y_N^{(\sigma)}\big)^2\right) + \frac{1}{2}\|F^{j+1}\|^2 + \frac{1}{2}\|y^{(\sigma)}\|^2. \qquad (3.18)$$

Выберем ε_1 достаточно малым, например, $\varepsilon_1 = \dfrac{c_0}{c_1}$, тогда получим:

$$\frac{1}{2}\|y^{j+1}\|_{\bar{t}}^2 + \tau\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\|y_{\bar{t}}^{j+1}\|^2 + \frac{c_0}{2}\sum_{i=1}^{N}\big(y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\big)^2 h \le$$

$$\le \frac{c_1^2}{2c_0}\big(y_N^{(\sigma)}\big)^2 + \frac{0.5h}{\sigma\tau c_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\left((c_2+0.5h)^2(y_N^j)^2 + \|y^{(\sigma)}\|^2\right) + \frac{\varepsilon_2}{2}\big(y_N^{(\sigma)}\big)^2\right) + \frac{1}{2}\|F^{j+1}\|^2 + \frac{1}{2}\|y^{(\sigma)}\|^2. \quad (3.19)$$

Оценивая далее нелокальный член и другие слагаемые, содержащие $y_N^{(\sigma)}$ и $y^{(\sigma)}$, выбирая ε_2 достаточно большим, а также после приведения подобных слагаемых, получаем:

$$\frac{1}{2}\|y^{j+1}\|_{\bar{t}}^2 + \tau\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\|y_{\bar{t}}^{j+1}\|^2 + \frac{c_0}{2}\sum_{i=1}^{N}\big(y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\big)^2 h \le M_1\big(y_N^j\big)^2 + M_2\|y^{(\sigma)}\|^2 + M_3\big(y_N^{(\sigma)}\big)^2 + \frac{1}{2}\|F^{j+1}\|^2, \quad (3.20)$$

где M_1, M_2, M_3 — положительные постоянные, не зависящие от h и τ.

При $\sigma \ge \dfrac{1}{2}$ слагаемое $\tau\left(\sigma - \dfrac{1}{2}\right)\|y_{\bar{t}}^{j+1}\|^2 \ge 0$, поэтому в (3.20) его можно отбросить.

$$\frac{1}{2}\|y^{j+1}\|_{\bar{t}}^2 + \frac{c_0}{2}\sum_{i=1}^{N}\big(y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\big)^2 h \le M_1\big(y_N^j\big)^2 + M_2\|y^{(\sigma)}\|^2 + M_3\big(y_N^{(\sigma)}\big)^2 + \frac{1}{2}\|F^{j+1}\|^2. \qquad (3.21)$$

Умножим неравенство (3.21) на 2τ и просуммируем по всем j' от 0 до j, тогда получим

$$\|y^{j'+1}\|^2 - \|y^0\|^2 + c_0\tau\sum_{j'=0}^{j}\sum_{i=1}^{N}\big(y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\big)^2 h \le 2\tau\sum_{j'=0}^{j}\left(M_1\big(y_N^{j'}\big)^2 + M_2\|y^{(\sigma)}\|^2 + M_3\big(y_N^{(\sigma)}\big)^2 + \frac{1}{2}\|F^{j'+1}\|^2\right). \qquad (3.22)$$

Оценим слагаемые в правой части (3.22):

$$\|y^{(\sigma)}\|^2 = \|\sigma y^{j+1} + (1-\sigma)y^j\|^2 \le 2\sigma^2\|y^{j+1}\|^2 + 2(1-\sigma)^2\|y^j\|^2.$$

Аналогично для граничного значения

$$\|y_N^{(\sigma)}\|^2 = \|\sigma y_N^{j+1} + (1-\sigma)y_N^j\|^2 \le 2\sigma^2(y_N^{j+1})^2 + 2(1-\sigma)^2(y_N^j)^2.$$

Учитывая, что $(y_N^j)^2 \le \|y^j\|^2$ (так как норма включает все узлы), из (3.22) получаем

$$\|y^{j'+1}\|^2 - \|y^0\|^2 + c_0\tau\sum_{j'=0}^{j}\sum_{i=1}^{N}\big(y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\big)^2 h \le$$

$$= 2\tau \sum_{j'=0}^{j} \Big[\big(M_1 + 2(M_2+M_3)(1-\sigma)^2\big) \|y^{j'}\|^2 + 2\big(M_2+M_3\big)\sigma^2 \|y^{j'+1}\|^2 \Big] + \tau \sum_{j'=0}^{j} \|F^{j'+1}\|^2. \qquad (3.23)$$

Введем следующие обозначения:

$$A = M_1 + 2(M_2+M_3)(1-\sigma)^2, \;\; B = 2\big(M_2+M_3\big)\sigma^2.$$

С учетом введенных обозначений неравенство (3.23) примет вид:

$$\|y^{j'+1}\|^2 - \|y^0\|^2 + c_0\tau \sum_{j'=0}^{j} \sum_{i=1}^{N} \big(y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\big)^2 h \le 2\tau \sum_{j'=0}^{j} \Big[A\|y^{j'}\|^2 + B\|y^{j'+1}\|^2 \Big] + \tau \sum_{j'=0}^{j} \|F^{j'+1}\|^2 =$$

$$= 2\tau \Big[A\|y^0\|^2 + (A+B) \sum_{j'=1}^{j} \|y^{j'}\|^2 + B\|y^{j'+1}\|^2 \Big] + \tau \sum_{j'=0}^{j} \|F^{j'+1}\|^2. \qquad (3.24)$$

Из (3.24) имеем:

$$(1-2\tau B)\|y^{j'+1}\|^2 + c_0\tau \sum_{j'=0}^{j} \sum_{i=1}^{N} \big(y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\big)^2 h \le (1+2\tau A)\|y^0\|^2 + 2\tau(A+B) \sum_{j'=1}^{j} \|y^{j'}\|^2 + \tau \sum_{j'=0}^{j} \|F^{j'+1}\|^2. \quad (3.25)$$

При достаточно малых τ ($1 - 2\tau B > 0 \;\Rightarrow\; \tau < \dfrac{1}{2B}$), разделим обе части последнего неравенства (3.25) на $(1 - 2\tau B) > 0$, тогда получим:

$$\|y^{j'+1}\|^2 + \frac{c_0}{1-2\tau B}\tau \sum_{j'=0}^{j} \sum_{i=1}^{N} \big(y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\big)^2 h \le \frac{1+2\tau A}{1-2\tau B}\|y^0\|^2 + \frac{2\tau(A+B)}{1-2\tau B} \sum_{j'=1}^{j} \|y^{j'}\|^2 + \frac{\tau}{1-2\tau B} \sum_{j'=0}^{j} \|F^{j'+1}\|^2. \qquad (3.26)$$

Введем обозначения

$$C_1 = \frac{1+2\tau A}{1-2\tau B}, \;\; C_2 = \frac{2\tau(A+B)}{1-2\tau B}, \;\; C_3 = \frac{\tau}{1-2\tau B}, \;\; C_4 = \frac{c_0}{1-2\tau B}.$$

С учетом этих обозначений последнее неравенство (3.26) примет вид:

$$\|y^{j'+1}\|^2 + C_4\tau \sum_{j'=0}^{j} \sum_{i=1}^{N} \big(y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\big)^2 h \le C_1\|y^0\|^2 + C_2 \sum_{j'=1}^{j} \|y^{j'}\|^2 + C_3 \sum_{j'=0}^{j} \|F^{j'+1}\|^2. \qquad (3.27)$$

Применяя теперь к неравенству (3.27) дискретный аналог леммы Гроноулла (см. [15], стр. 171) при малых τ, получаем окончательную оценку:

$$\max_{0\le j\le j_0} \|y\|^2 + \tau \sum_{j'=0}^{j} \sum_{i=1}^{N} \big(y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\big)^2 h \le M \left(\|y^0\|^2 + \tau \sum_{j'=0}^{j} \|F^{j'+1}\|^2 \right), \qquad (3.28)$$

где $M = const$, не зависящая от h и τ.

Таким образом, справедлива

Теорема 3.1. *Разностная схема (2.6) — (2.8) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (2.6) — (2.8) справедлива оценка (3.28).*

4. ПОГРЕШНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ

Для погрешности $z = y - u$ получаем задачу:

$$z_{\bar{t}}^{j+1} = \overline{\Lambda} z^{(\sigma)} + \overline{\psi}^{j+1}, \tag{4.1}$$

$$z_i^0 = 0,\ i = 0, 1, 2, \ldots, N, \tag{4.2}$$

$$\overline{\Lambda} z = \begin{cases} \Lambda z = (k z_{\bar{x}x,i})^{(\sigma)}, & \text{i=1,2,...,N-1;} \\ \Lambda^- z = \dfrac{(k z_{x,0})^{(\sigma)}}{0.5h}, & \text{i=0;} \\ \Lambda^+ z = -\dfrac{1}{\sigma\tau(p^{j+1} + 0.5h)} \left[(p^{j+1} + 0.5h) z_N^j + \sum\limits_{i=0}^{N-1} z_i^{(\sigma)} \hbar \right], & \text{i=N,} \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\overline{\psi} = \begin{cases} \Lambda u^{(\sigma)} + f_i - u_{\bar{t}}^{j+1}, & \text{i=1,2,...,N-1;} \\ \Lambda^- u^{(\sigma)} + f_0 - u_{\bar{t},0}^{j+1}, & \text{i=0;} \\ \dfrac{C}{\sigma\tau(p^{j+1} + 0.5h)} + \Lambda^+ u^{(\sigma)} - u_{\bar{t},N}^{j+1}, & \text{i=N,} \end{cases} \tag{4.4}$$

$$C = p_0 \varphi_N + \sum_{i=0}^{N} \varphi_i \hbar.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4.1. *При достаточно гладком решении $u(x,t) \in C^{4,2}(\overline{Q}_T)$ разностная схема (2.6) — (2.8) имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$ при $\sigma = 0.5$ (схема Кранка-Николсона) и $O(\tau + h^2)$ при $\sigma \neq 0.5$.*

5. СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Из теоремы 3.1 и теоремы 4.1 следует

Теорема 5.1. *Пусть решение задачи (1.1) — (1.4) удовлетворяет условию гладкости: $u(x,t) \in C^{4,2}(\overline{Q}_T)$. Тогда при достаточно малых шагах сетки τ решение разностной задачи (2.6) — (2.8) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (1.1) — (1.4) и имеет точность, совпадающую с порядком погрешности аппроксимации.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Л. А. Муравей, А. В. Филиновский, Об одной задаче с нелокальным граничным условием для параболического уравнения, Матем. сб., 182:10 (1991), 1479 — 1512; L. A. Muravei, A. V. Filinovskii, On a problem with nonlocal boundary condition for a parabolic equation, Math. USSR-Sb., 74:1 (1993), 219 — 249.

[2] J.R. Cannon The solution of the hear equation subject to the specification of energy Quart. Appl. Math., 21 (1963), pp. 155 — 160.

[3] Камынин Л.И., Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими краевыми условиями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т.4. №6. С. 1006 – 1023.

[4] Чудновский А.Ф., Некоторые коррективы в постановке и решении задач тепло - и влагопереноса в почве // «Сб. трудов по агрофизике», вып. 23, Гидрометеоиздат, 1969. С. 41 – 54.

[5] Бицадзе А.В., Самарский А.А., О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т.185. №4. С. 739 – 740.

[6] Ионкин Н. И., Решение одной краевой задачи в теории теплопроводности с нелокальным условием // Дифференц. ур - ия. 1977, Т.13, №2. С. 294 – 304.

[7] Ионкин Н. И., О равномерной сходимости разностной схемы для одной нестационарной нелокальной краевой задачи // Актуальные вопросы прикладной математики. Изд - во МГУ. 1989, С. 240.

[8] Ильин В.А.,Моисеев Е.И., Нелокальная задача для оператора Штурма - Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках // ДАН СССР. 1986. Т.291. №3. С. 534 – 539.

[9] Ионкин Н. И., Моисеев Е.И., О задаче для уравнения теплопроводности с двухточечными краевыми условиями // Дифференц. ур - ия. 1979, Т.15, №7. С. 1284 – 1295.

[10] Гордезиани Д.Г., О методах решения одного класса нелокальных краевых задач. // Препринт института прикладной математики при ТГУ. – Тбилиси. 1981.

[11] Нахушев А.М., Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги. // ДАН СССР. 1978. Т.242. №5. С. 1008 – 1011.

[12] Солдатов А.П., Шхануков М.Х., Краевые задачи с общим нелокальным условием Самарского А.А. для псевдопараболических уравнений высокого порядка. // ДАН СССР. 1987. Т.297. №3. С. 547 – 552.

[13] Н.И. Ионкин, Е.А. Валикова, "Принцип максимума для одной нелокальной несамосопряженной краевой задачи Дифференц. уравнения, 31:7 (1995), 1232 — 1239; Differ. Equ., 31:7 (1995), 1180 — 1187.

[14] Баззаев А. К. О разностном решении одной нелокальной краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка //Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2025. — №. 6. — С. 842 — 849.

[15] Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. — М.: Наука. 1973. — 415 с.

[16] Самарский А.А., Теория разностных схем. — М.: Наука. 1989. — 616 с.