

## УЗЛОВЫЕ КОМПОНЕНТЫ 4-ИЗЯЩНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

В.А. БАРАНСКИЙ, И.А. НАСЫРОВ, Т.А. СЕНЬЧОНОК

*Представлено А.В. Пяткиным*

**Abstract:** Let  $f$  be a coloring of the vertices of a connected graph  $G$  into colors from the set of colors  $\{1, 2, \dots, k\}$ . A coloring  $f$  on the set of edges of a graph  $G$  induces a function  $f'(e) = |f(u) - f(v)|$ , where  $e = uv$  is an arbitrary edge of the graph  $G$ . The number  $f'(e)$  will be called the *weight* of the edge  $e$  induced by the coloring  $f$ .

A coloring  $f$  is called a *graceful  $k$ -coloring* of a graph  $G$  if  $f'$  is an edge coloring of this graph. We will call a graph an  *$k$ -graceful graph* or, simply, a *graceful graph* if it has a graceful  $k$ -coloring.

In general, 4-graceful trees are quite complex. Note that 3-graceful connected graphs have a very simple structure. They are among simple chains of length no more than 3.

It is easy to establish that any 4-graceful graph does not contain vertices of degree greater than 3. Therefore, we consider trees  $T$  whose vertex degrees do not exceed 3. Vertices of degree 3 in a tree  $T$  we will call by *nodes*. We will say that the *nodal distance* between two nodes  $u$  and  $v$  of a tree  $T$  is equal to  $s$  if there is a simple chain from  $u$  to  $v$  such that the number of internal vertices in it is equal to  $s$  and all these internal vertices have degree 2 in the tree  $T$ . (Of course, the nodal distance is defined not for any

pair of nodes.) In this case, we will call a simple chain from  $u$  to  $v$  an  $s$ -branch.

Let us fix some positive integer  $s$  and generate a subgraph  $T_s$  of the tree  $T$  from all nodes and all  $s$ -branches. The connected components of  $T_s$  will be called *nodal  $s$ -components* (or simply *nodal components*) of the tree  $T$ .

The main goal of our work is as follows.

- (1) For all positive integers  $s$ , find 4-graceful colorings of  $s$ -branches with given pairs of colors for the initial and final nodes (see Tables 1, 2 and 3).
- (2) To consider the properties of 4-graceful colorings of nodal  $s$ -components for  $s \geq 4$  and  $s \neq 5$  (see Theorems 1 and 2).
- (3) To show how can be found forbidden configurations for 4-graceful trees with using nodal  $s$ -components (see Theorem 3).

**Keywords:** graph, tree, graceful coloring of a graph, 4-graceful trees.

## 1 Введение

Далее под графом мы будем понимать конечный обыкновенный граф, т. е. граф без петель и кратных рёбер, и будем использовать терминологию, принятую в [1], [2] и [3].

Пусть  $G$  — связный граф и  $f$  — его  $k$ -раскраска вершин, т. е. раскраска в *краски* (или *цвета*) из множества красок  $\{1, 2, \dots, k\}$  (далее всюду под раскрасками графа мы будем понимать его правильные раскраски). Раскраска  $f$  индуцирует следующую функцию  $f'$  на множестве рёбер этого графа:  $f'(e) = |f(u) - f(v)|$ , где  $e = uv$  — произвольное ребро графа  $G$ , т. е.  $f'(e)$  равно модулю разности цветов концевых вершин ребра  $e$ . Число  $f'(e)$  будем называть *весом* ребра  $e$ , *индуцированным раскраской  $f$* .

Раскраска  $f$  называется *изящной  $k$ -раскраской* (graceful  $k$ -coloring) графа  $G$ , если  $f'$  является рёберной раскраской этого графа (иными словами, является раскраской рёберного графа для  $G$ ). Граф будем называть  *$k$ -изящным* ( $k$ -graceful graph) или, просто, *изящным* (graceful graph), если он обладает изящной  $k$ -раскраской. Для изящного графа  $G$  наименьшее число  $k$  такое, что граф  $G$  является  $k$ -изящным, будем называть *изящным хроматическим числом* этого графа.

Понятие изящной  $k$ -раскраски графа ввел Г. Шартран в 2015 году. В динамическом обзоре [4] можно найти множество результатов, родственных результатам о изящных раскрасках графов. В последние годы были найдены изящные хроматические числа для многих классов графов, большое внимание было уделено изучению изящных деревьев (см., например, [5]–[8]).

Отметим, что связные 3-изящные графы устроены очень просто, они исчерпываются простыми цепями длины не более 3. Задача же характеристики 4-изящных деревьев оказалась весьма непростой. Нетрудно заметить, что любой 4-изящный граф не содержит вершин степени большей 3. Поэтому для 4-изящных деревьев естественно искать характеристику в классе деревьев, у которых максимальная степень вершин  $\Delta = 3$ . Вершины степени 3 мы будем называть *узлами* (nodes) дерева.

Будем говорить, что для двух узлов  $u$  и  $v$  дерева  $T$  *узловое расстояние* между ними равно числу  $s$ , если существует простая цепь от  $u$  до  $v$ , число внутренних вершин в которой равно  $s \geq 0$  и все эти внутренние вершины имеют степень 2 в дереве  $T$  (конечно, число вершин в такой цепи равно  $s+2$ , а длина цепи равна  $s+1$ ). Простую цепь от  $u$  до  $v$  будем называть в таком случае *s-ветвью*. Изображая  $s$ -ветви (и подграфы деревьев), мы будем выделять узлы малыми кругами (на Рис. 1 изображена 4-ветвь).



Рис. 1. 4-ветвь

Подграфы дерева  $T$  с выделенными узлами из  $T$  будем называть *конфигурациями*.

В работе [2] нами были найдены следующие достаточные условия 4-изящности деревьев.

- (1) Пусть  $T$  — дерево, степени вершин которого не превосходят 3, и которое не содержит простых цепей, состоящих из трех узлов. Если такое дерево  $T$  не имеет пар узлов, узловые расстояния между которыми равны 1 или 2 (т.е. нет конфигураций вида:  $\odot-\odot-\odot$ ,  $\odot-\bullet-\odot$ ,  $\odot-\bullet-\bullet-\odot$ ), то оно является 4-изящным.
- (2) Пусть  $T$  — дерево, степени вершин которого не превосходят 3 и которое не содержит пар смежных узлов. Если такое дерево  $T$  не имеет пар узлов, узловые расстояния между которыми равны 1 (т.е. нет конфигураций вида:  $\odot-\odot$ ,  $\odot-\bullet-\odot$ ), то оно является 4-изящным.

В данной работе мы продолжим изучение изящных раскрасок в классе деревьев, в которых максимальная степень вершин  $\Delta = 3$  (т.е. будем предполагать, что в дереве имеется хотя бы один узел). Наша цель — рассмотреть строение таких деревьев и выделить способы построения среди них 4-изящных и не 4-изящных деревьев.

Зафиксируем некоторое натуральное число  $s$  и породим всеми узлами и всеми  $s$ -ветвями подграф  $T_s$  дерева  $T$ . Компоненты связности этого леса  $T_s$  будем называть *узловыми s-компонентами* (или просто *узловыми компонентами*) дерева  $T$  (см. Рис. 2), т.е. под узловыми компонентами дерева  $T$  мы будем понимать его узловые  $s$ -компоненты для натуральных чисел  $s$ .

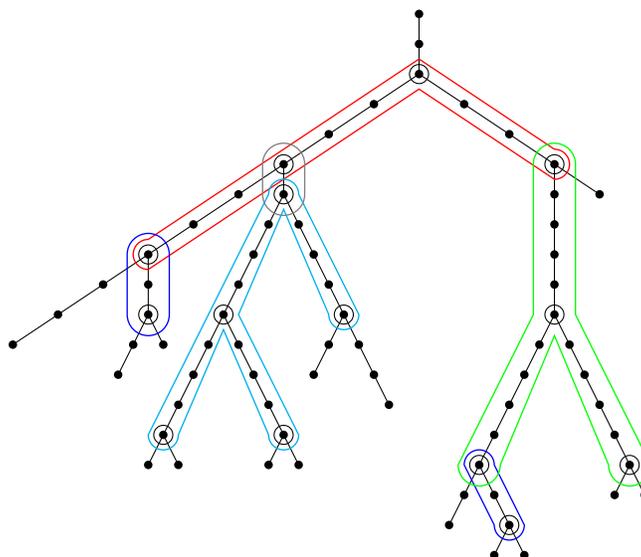


Рис. 2. Дерево и его узловые компоненты

Очевидно, все узлы дерева  $T$  и все ветви порождают подграф  $T^*$ , который является объединением узловых компонент и который мы будем называть *ядром* дерева  $T$ . Очевидно, что любые две различные узловые компоненты либо не пересекаются, либо имеют единственный общий узел (поскольку в дереве любые две различные вершины соединены точно одной простой цепью). Подграф  $T^*$  можно представлять себе, как дерево узловых компонент.

Пусть  $G$  — узловая компонента дерева  $T$ . Под *расширенной узловой компонентой*  $G'$  (отвечающей  $G$ ) мы будем понимать подграф, который получается добавлением к  $G$  всех рёбер, инцидентных узлам компоненты  $G$  и не лежащих в этой компоненте, а также добавлением всех вершин, инцидентных добавляемым рёбрам. Ясно, что добавляемые рёбра и добавляемые вершины будут висячими в расширенной узловой компоненте  $G'$  (см. Рис. 3). Эти висячие рёбра и висячие вершины мы будем называть *граничными* для  $G$ .

Две граничные вершины расширенной узловой компоненты назовем *близнецами*, если инцидентные им граничные рёбра являются смежными. На Рис. 3 изображена расширенная 3-узловая компонента, у которой среди висячих граничных вершин имеется три пары близнецов и одна висячая вершина, которая не имеет близнеца.

Для нахождения 4-изящных раскрасок дерева  $T$  естественно поочередно находить 4-изящные раскраски расширенных узловых компонент. В связи с этим важно уметь выделять запрещенные *конфигурации* (т. е. подграфы дерева  $T$  с отмеченными узлами из  $T$ ), для которых не существует 4-изящных раскрасок.

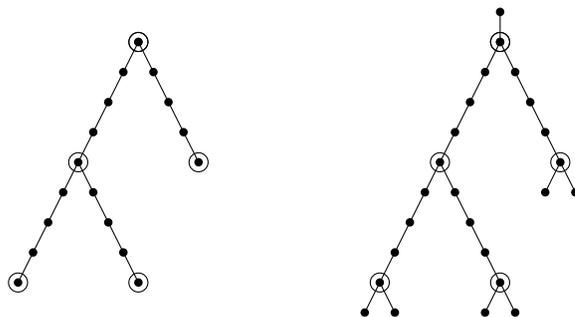


Рис. 3. Узловая компонента и её расширенная узловая компонента

Цель данной работы состоит в следующем.

- (1) Для всех натуральных чисел  $s$  найти 4-изящные раскраски  $s$ -ветвей с заданными парами красок для начальных и финальных узлов (см. Таблицы 1, 2 и 3). Именно такие раскраски систематически используются при нахождении 4-изящных раскрасок деревьев.
- (2) Рассмотреть свойства 4-изящных раскрасок расширенных узловых  $s$ -компонент при  $s \geq 4$  и  $s \neq 5$  (см. Теоремы 1 и 2).
- (3) Показать, как с помощью расширенных узловых  $s$ -компонент можно находить запрещённые конфигурации для 4-изящных деревьев (см. Теорему 3).

Заметим, что следующая наша работа будет посвящена изучению 4-изящных раскрасок расширенных узловых  $s$ -компонент при малых значениях  $s$  и выделению запрещённых конфигураций по таким компонентам.

## 2 4-изящные раскраски ветвей

Последовательность натуральных чисел  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$  будем называть 4-изящной, если для любого  $i = 1, \dots, s$  выполняется

- (1)  $\lambda_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ;
- (2)  $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$  при  $i < s$ ;
- (3)  $|\lambda_{i+1} - \lambda_i| \neq |\lambda_{i-1} - \lambda_i|$  при  $1 < i < s$ .

Заметим, что из (2) и (3) следует, что в 4-изящной последовательности любая тройка последовательных компонент  $\lambda_i, \lambda_{i+1}, \lambda_{i+2}$  состоит из попарно различных чисел.

Легко проверить, что произвольная тройка  $(a, b, c)$  попарно различных чисел из множества  $\{1, 2, 3, 4\}$  является 4-изящной тогда и только тогда, когда она отлична от следующих четырёх *запрещённых троек*

$$(1, 2, 3), (3, 2, 1), (2, 3, 4), (4, 3, 2),$$

т. е. из 24 троек попарно различных чисел множества  $\{1, 2, 3, 4\}$  изящными являются 20 троек, а 4 тройки не являются изящными.

Будем рассматривать полугруппу слов над алфавитом  $\{1, 2, 3, 4\}$  и каждую последовательность  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$  чисел 1, 2, 3 и 4 будем представлять также в виде слова

$$\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_s$$

(не путать с числом, записанным в десятичной записи!) в этой полугруппе слов. Для удобства числа 1, 2, 3, 4 будем называть также *буквами*.

Буквы 2 и 3 будем называть *ординарными* (ordinary letters), а буквы 1 и 4 — *козырными* (trump letters).

Через  $\varphi$  обозначим подстановку на множестве  $\{1, 2, 3, 4\}$  такую, что

$$\varphi(1) = 4, \varphi(4) = 1 \text{ и } \varphi(2) = 3, \varphi(3) = 2.$$

Ясно, что  $\varphi(x) = 5 - x$ , откуда следует, что  $\varphi$  сохраняет модуль разности букв:

$$|\varphi(a) - \varphi(b)| = |a - b|$$

для любых двух различных букв  $a$  и  $b$ .

Слово

$$\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda_2)\dots\varphi(\lambda_s),$$

будем называть *двойственным* для слова  $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_s$ . Ясно, что слово  $\varphi(\lambda)$  является 4-изящным тогда и только тогда, когда 4-изящно слово  $\lambda$ .

Заметим также, что если  $f$  — 4-изящная раскраска связного графа  $G$ , то суперпозиция  $\varphi \circ f$ , состоящая в замене  $f$ -красок вершин в соответствии с подстановкой  $\varphi$ , снова будет 4-изящной раскраской. Раскраску  $\varphi \circ f$  будем называть *двойственной раскраской* к раскраске  $f$ .

Зафиксируем теперь связный граф  $G$  и его 4-изящную раскраску  $f$ .

Маршрут  $v_1, v_2, \dots, v_s$  в графе  $G$  будем называть *безвозвратным*, если для любого  $i = 2, \dots, s - 1$  выполняется  $v_{i-1} \neq v_{i+1}$ .

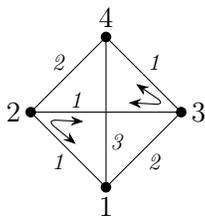
Нетрудно видеть, что последовательность цветов

$$f(v_1)f(v_2)\dots f(v_s),$$

отвечающая безвозвратному маршруту  $v_1, v_2, \dots, v_s$  в 4-изящном графе  $G$ , является 4-изящной последовательностью.

Нетрудно также заметить, что все 4-изящные последовательности исчерпываются безвозвратными маршрутами в графе  $K_4$  с дорожными знаками, указанном на Рис. 4. Четыре дорожных знака запрещают прохождение по маршрутам, отвечающим четырём запрещённым тройкам. На Рис. 4 запреты указаны с помощью закругленных стрелок. На Рис. 4 кроме раскрасок вершин для удобства указаны также веса рёбер. Заметим, что раскраска вершин графа  $K_4$ , указанная на Рис. 4, не является 4-изящной.

Рассматривая Рис. 4, легко понять, что красками 2 и 3 нельзя в 4-изящных раскрасках графов раскрашивать узлы, так как при раскраске узла нужно будет использовать все три оставшиеся краски для раскраски соседей узла и тогда возникнут два смежных ребра одного цвета 1, что противоречиво (см. также леммы 1 и 2 из [2]).

Рис. 4.  $K_4$  с четырьмя дорожными знаками

Поскольку красками 2 и 3 в 4-изящных раскрасках графов нельзя раскрашивать узлы, такие краски и названы *ординарными* (ordinary letters). Краски же 1 и 4 при 4-изящных раскрасках графов можно использовать для раскрашивания любых вершин. Поэтому такие краски и называются *козырными* (trump letters).

Поскольку козырных красок всего две, в 4-изящных графах не существует простых цепей, состоящих из трех различных узлов (т.е. нет конфигураций вида  $\odot - \odot - \odot$ ).

Далее в Таблицах 1, 2 и 3 мы указываем 4-изящные слова в алфавите красок  $\{1, 2, 3, 4\}$ , начинающиеся и заканчивающиеся козырными буквами. С помощью таких 4-изящных слов можно 4-изящно раскрашивать  $s$ -ветви, где  $s$  принимает натуральные значения.

В первом столбце таблиц в строках указывается *тип 4-изящного слова*, т.е. пара, состоящая из его начала  $uv$  длины 2 (*2-префикс*) и его конца  $pq$  длины 2 (*2-суффикс*), где  $u$  и  $q$  — козырные буквы. Такую пару мы будем записывать в виде  $uv - pq$ . Если 4-изящное слово состоит из  $s + 2$  букв, т.е. его можно использовать для 4-изящной раскраски  $s$ -ветвей, то его тип иногда будем записывать подробнее в виде  $uv -_s - pq$ . Через  $[uv -_s - pq]$  будем обозначать множество всех 4-изящных слов указанного типа  $uv -_s - pq$ .

Если для заданной пары, состоящей из 2-префикса и 2-суффикса,  $s$ -ветвь не имеет 4-изящной раскраски с таким 2-префиксом и с таким 2-суффиксом, т.е.  $[uv -_s - pq] = \emptyset$ , то в столбце, соответствующем  $s$ , строка, соответствующая этой паре, содержит прочерк. Если же такое 4-изящное слово существует, то указывается значение параметра  $k$  для получения такого слова из слова, указанного во втором столбце таблицы. Отметим, что длина такого слова (т.е. число букв в нём) равна  $s + 2$ . Для каждого  $s$  в таблицах мы указываем только одно из таких слов. Для наших целей этого вполне достаточно.

В этих трёх таблицах все 2-префиксы начинаются с буквы 1. В силу двойственности для слов имеются ещё три таблицы, состоящие из двойственных слов, начинающихся с буквы 4. Выписывать их мы не будем, но использовать будем.

Тип слова	Слово	$s = 1$	$s = 4$	$s = 7$	$s = 10, 13, \dots$
$12 - 21^+$	$(124)^k 312 431 421$	–	–	–	$k = 1, 2, \dots$
$12 - 31$	$(124)^k 312 431$	–	–	$k = 1$	$k = 2, 3, \dots$
$12 - 41$	$(124)^k 312 431 241$	–	–	–	$k = 1, 2, \dots$
$12 - 14$	$(124)^k 314$	–	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$12 - 24$	$(124)^k 124$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$12 - 34^+$	$(124)^k 134$	–	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$13 - 21^+$	$(134)^k 231 421$	–	–	$k = 1$	$k = 2, 3, \dots$
$13 - 31$	$(134)^k 231$	–	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$13 - 41$	$(134)^k 231 241$	–	–	$k = 1$	$k = 2, 3, \dots$
$13 - 14$	$(134)^k 214$	–	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$13 - 24$	$(134)^k 124$	–	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$13 - 34^+$	$(134)^k 134$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$14 - 21^+$	$(142)^k 312 431 421$	–	–	–	$k = 1, 2, \dots$
$14 - 31$	$(142)^k 312 431$	–	–	$k = 1$	$k = 2, 3, \dots$
$14 - 41$	$(142)^k 312 431 241$	–	–	–	$k = 1, 2, \dots$
$14 - 14$	$(142)^k 314$	–	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$14 - 24$	$(143)^k 124$	–	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$14 - 34^+$	$(142)^k 134$	–	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$

ТАБЛИЦА 1.  $s \equiv 1(3)$ 

Отметим, что под нулевой степенью слова, как обычно, понимается пустой символ в полугруппе слов. Отметим также, что 2-суффиксы вида 21 и 34 указаны со знаком  $^+$ . Это служебный символ, который будет использоваться в следующей работе авторов.

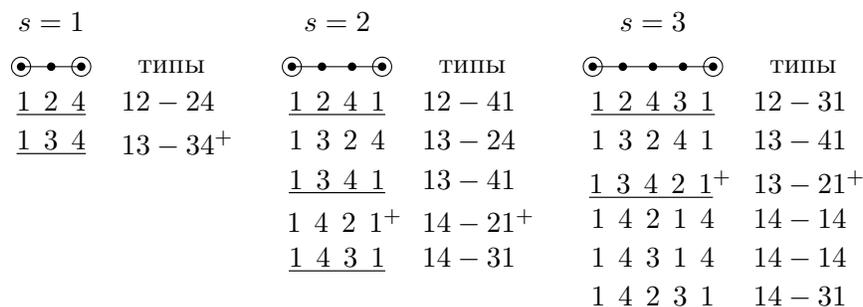
Рассматривая граф  $K_4$  с дорожными знаками, который приведен на Рис. 4, несложно проверить, что все слова, указанные в таблицах для всевозможных значений параметра  $s$ , являются 4-изящными и имеют нужные 2-префиксы и 2-суффиксы.

Теперь нужно обосновать правильность расстановки прочерков в таблицах. Мы начнём с малых значений  $s$ , равных 1, 2 и 3 (а затем рассмотрим значения  $s \geq 4$ ). Для таких значений  $s$  нетрудно найти всевозможные 4-изящные раскраски  $s$ -ветвей (см. Рис. 5) и, используя их, обосновать появление прочерков в столбцах таблиц, отвечающих значениям  $s = 1, 2, 3$ .

Для перечисления всевозможных 4-изящных раскрасок  $s$ -ветвей для малых значений  $s$  мы будем использовать простой алгоритм. Выписывая 4-изящное слово, мы последовательно будем добавлять новую букву в конец слова таким образом, чтобы она была отлична от двух последних букв растущего слова и не возникало запрещенной тройки букв. Сначала проведем этот процесс для  $s = 1, 2, 3$  (см. Рис. 5).

Для случая  $s = 3$  имеющиеся типы раскрасок 3-ветвей можно изобразить с помощью графа 3-переходов (см. Рис. 6). Можно считать, что

Тип слова	Слово	$s = 2$	$s = 5$	$s = 8$	$s = 11, 14, \dots$
$12 - 21^+$	$12 (431)^k 243 124 134 21$	-	-	-	- для $s = 11$ , для $s > 11$ $k = 1, 2, \dots$
$12 - 31$	$12 (431)^k 243 124 31$	-	-	-	$k = 1, 2, \dots$
$12 - 41$	$(124)^k 124 1$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$12 - 14$	$124 (314)^k 231 4$	-	-	$k = 1$	$k = 2, 3, \dots$
$12 - 24$	$(124)^k 312 4$	-	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$12 - 34^+$	$(124)^k 312 413 4$	-	-	$k = 1$	$k = 2, 3, \dots$
$13 - 21^+$	$134 213 42 (134)^k 21$	-	-	-	$k = 1, 2, \dots$
$13 - 31$	$(134)^k 213 423 1$	-	-	$k = 1$	$k = 2, 3, \dots$
$13 - 41$	$134 (124)^k 1$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$13 - 14$	$132 4 (314)^k$	-	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$13 - 24$	$132 4 (124)^k$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$13 - 34^+$	$132 4 (134)^k$	-	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$14 - 21^+$	$(142)^k 142 1$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$14 - 31$	$(143)^k 143 1$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$14 - 41$	$(143)^k 124 1$	-	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$14 - 14$	$1 (421)^k 324 314$	-	-	$k = 1$	$k = 2, 3, \dots$
$14 - 24$	$(142)^k 312 4$	-	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$14 - 34^+$	$1 (421)^k 324 134$	-	-	$k = 1$	$k = 2, 3, \dots$

ТАБЛИЦА 2.  $s \equiv 2(3)$ Рис. 5. Раскраски  $s$ -ветвей для  $s = 1, 2, 3$ 

это двудольный граф, одну из долей которого составляют 6 всевозможных видов выходов 12, 13, 14, 41, 42 и 43 из узлов, другую долю составляют 6 всевозможных видов входов 21, 31, 41, 14, 24 и 34 в узлы, а  $\{23, 32, 34, 43, 41, 14, 12, 21, 23, 32\}$  — множество рёбер, отвечающих типам при  $s = 3$  (конечно, при построении графа 3-переходов мы используем все типы 4-изящных раскрасок 3-ветвей, двойственные к указанным



**Лемма 2.** Для любого  $s = 4, 7, 8, 11$  граф  $s$ -переходов содержит полный двудольный подграф вида  $K_{3,3}$ , одна доля которого состоит из выходов 12, 13, 14 из узлов цвета 1, а вторая доля состоит из входов 14, 24, 34 в узлы цвета 4.

**Лемма 3.** Для любого  $s = 6, 9$  граф  $s$ -переходов содержит полный двудольный подграф вида  $K_{3,3}$ , одна доля которого состоит из выходов 12, 13, 14 из узлов цвета 1, а вторая доля состоит из входов 21, 31, 41 в узлы цвета 1.

Конечно, справедливы (двойственные леммы) аналоги леммы 2 для выходов 41, 42, 43 во входы 21, 31, 41 при  $s = 4, 7, 8, 11$  и леммы 3 для выходов 41, 42, 43 во входы 14, 24, 34 при  $s = 6, 9$  в графах  $s$ -переходов.

Продолжим обоснование наличия прочерков в столбцах таблиц для значений  $s \geq 4$ .

Нетрудно сгенерировать все 4-изящные раскраски для 4-ветвей, 2-префикс которых начинается с буквы 1:

$$\begin{aligned} &124124, 124314, 124134; \\ &134124, 132431, 134214, 134134, 134231; \\ &142134, 143124, 142314. \end{aligned}$$

Поэтому мы можем теперь выписать всевозможные типы 4-изящных раскрасок для 4-ветвей, префикс которых начинается с буквы 1:

$$\begin{aligned} &12_{-4-14}, 12_{-4-24}, 12_{-4-34}; \\ &13_{-4-31}, 13_{-4-14}, 13_{-4-24}, 13_{-4-34}; \\ &14_{-4-14}, 14_{-4-24}, 14_{-4-34}. \end{aligned}$$

Мы получили 10 типов при  $s = 4$ , для которых 4-изящные раскраски указаны в таблице 1, для остальных типов при  $s = 4$  указаны прочерки.

Для  $s = 5$  мы проведем вычисления, аналогичные случаю  $s = 4$ . При  $s \geq 6$  такие вычисления становятся громоздкими, поэтому мы выберем другой подход. Отметим, что для исследования прочерков в таблицах нужно рассматривать только значения  $s \leq 11$ .

Сгенерируем теперь все 4-изящные раскраски 5-ветвей, 2-префикс которых начинается с буквы 1:

$$\begin{aligned} &1241241, 1243124, 1241324, 1241341; \\ &1324124, 1341241, 1324314, 1324134, 1342134, 1341324, 1342314, 1341341; \\ &1421324, 1431241, 1423124, 1421421, 1421341, 1421431, 1431431. \end{aligned}$$

Теперь мы можем выписать всевозможные типы 4-изящных раскрасок 5-ветвей, 2-префикс которых начинается с буквы 1:

$$\begin{aligned} &12_{-5-41}, 12_{-5-24}; \\ &13_{-5-41}, 13_{-5-14}, 13_{-5-24}, 13_{-5-34}; \\ &14_{-5-21}, 14_{-5-31}, 14_{-5-41}, 14_{-5-24}. \end{aligned}$$

Мы получили 10 типов при  $s = 5$ , для которых 4-изящные раскраски указаны в таблице 2, для остальных типов при  $s = 5$  указаны прочерки.

Далее мы будем обосновывать прочерки в  $s$  столбцах таблиц, используя ранее обоснованные прочерки в столбцах для меньших значений  $s$  (т. е. прочерки в таблицах обосновываются “рекуррентно”).

**Лемма 4.** *Не существует 4-изящных раскрасок 6-ветвей следующих типов:*

$$12 \text{ }_{-6}\text{-}14, 12 \text{ }_{-6}\text{-}24, 12 \text{ }_{-6}\text{-}34;$$

$$13 \text{ }_{-6}\text{-}14, 13 \text{ }_{-6}\text{-}34; 14 \text{ }_{-6}\text{-}24, 14 \text{ }_{-6}\text{-}34.$$

*Доказательство.* 1) Пусть от противного существует  $f \in [12 \text{ }_{-6}\text{-}14]$ . Тогда  $f = 12a_1a_2a_3a_414$ , где  $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Ясно, что  $a_1 = 4$ , так как 123 — запрещённая тройка, т. е.  $f = 124a_2a_3a_414$ .

1 случай.  $a_2 = 1$ . Тогда  $41a_3a_414 \in [41 \text{ }_{-4}\text{-}14]$ , откуда, переходя к двойственному слову, получаем  $[14 \text{ }_{-4}\text{-}41] \neq \emptyset$ , что невозможно (см. таблицу 1, столбец при  $s = 4$ , тип 14 — 41).

2 случай.  $a_2 = 3$ . Тогда  $43a_3a_414 \in [43 \text{ }_{-4}\text{-}14]$ , откуда, переходя к двойственному слову, получаем  $[12 \text{ }_{-4}\text{-}41] \neq \emptyset$ , что невозможно (см. таблицу 1, столбец при  $s = 4$ , тип 12 — 41).

2) Пусть от противного существует  $f \in [12 \text{ }_{-6}\text{-}24]$ . Тогда  $f$  имеет вид:  $f = 12a_1a_2a_3a_424$ , где  $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Ясно, что  $a_1 = 4$  и  $f = 124a_2a_3a_424$ .

1 случай.  $a_2 = 1$ . Тогда  $41a_3a_424 \in [41 \text{ }_{-4}\text{-}24]$ , поэтому  $[14 \text{ }_{-4}\text{-}31] \neq \emptyset$ , что невозможно (см. таблицу 1).

2 случай.  $a_2 = 3$ . Тогда  $43a_3a_424 \in [43 \text{ }_{-4}\text{-}24]$ , поэтому  $[12 \text{ }_{-4}\text{-}31] \neq \emptyset$ , что невозможно (см. таблицу 1).

Поскольку дальнейшие рассуждения в данном доказательстве ведутся аналогичным образом, мы ограничимся минимумом комментариев.

3) Пусть от противного существует  $f \in [12 \text{ }_{-6}\text{-}34]$ . Тогда  $f$  имеет вид:  $f = 12a_1a_2a_3a_434 \Rightarrow f = 124a_2a_3a_434$ .

Если  $a_2 = 1$ , то  $41a_3a_434 \in [41 \text{ }_{-4}\text{-}34] \Rightarrow [14 \text{ }_{-4}\text{-}21] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 1).

Если  $a_2 = 3$ , то  $43a_3a_434 \in [43 \text{ }_{-4}\text{-}34] \Rightarrow [12 \text{ }_{-4}\text{-}21] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 1).

4) Пусть от противного существует  $f \in [13 \text{ }_{-6}\text{-}14]$ . Тогда  $f$  имеет вид:  $f = 13a_1a_2a_3a_414$ .

Если  $a_4 = 2$ , то

$$f = 13a_1a_2a_3214 \Rightarrow 13a_1a_2a_321 \in [13 \text{ }_{-5}\text{-}21] \Rightarrow [13 \text{ }_{-5}\text{-}21] \neq \emptyset,$$

противоречие (см. таблицу 2).

Если  $a_4 = 3$ , то

$$f = 13a_1a_2a_3314 \Rightarrow 13a_1a_2a_331 \in [13 \text{ }_{-5}\text{-}31] \Rightarrow [13 \text{ }_{-5}\text{-}31] \neq \emptyset,$$

противоречие (см. таблицу 2).

5) Пусть от противного существует  $f \in [13-6-34]$ . Тогда  $f$  имеет вид:  $f = 13a_1a_2a_3a_434 \Rightarrow f = 13a_1a_2a_3134$ .

Если  $a_3 = 2$ , то  $13a_1a_221 \in [13-4-21] \Rightarrow [13-4-21] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 1).

Если  $a_3 = 4$ , то  $13a_1a_241 \in [13-4-41] \Rightarrow [13-4-41] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 1).

6) Пусть от противного существует  $f \in [14-6-24]$ . Тогда  $f$  имеет вид:  $f = 14a_1a_2a_3a_424$ .

Если  $a_1 = 2$ , то  $42a_2a_3a_424 \in [42-5-24] \Rightarrow [13-5-31] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 2).

Если  $a_1 = 3$ , то  $43a_2a_3a_424 \in [43-5-24] \Rightarrow [12-5-31] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 2).

7) Пусть от противного существует  $f \in [14-6-34]$ . Тогда  $f$  имеет вид:  $f = 14a_1a_2a_3a_434$ .

Если  $a_1 = 2$ , то  $42a_2a_3a_434 \in [42-5-34] \Rightarrow [13-5-21] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 2).

Если  $a_1 = 3$ , то  $43a_2a_3a_434 \in [43-5-34] \Rightarrow [12-5-21] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 2).  $\square$

**Лемма 5.** *Не существует 4-изящных раскрасок 7-ветвей следующих типов:*

$$12-7-21, 12-7-41; \\ 14-7-21, 14-7-41.$$

*Доказательство.* 1) Пусть от противного существует  $f \in [12-7-21]$ . Тогда  $f = 12a_1a_2a_3a_4a_521$ , где  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \{1, 2, 3, 4\}$ , поэтому  $f = 124a_2a_3a_4421$ .

Если  $a_2 = 1$ , то  $41a_3a_4421 \in [41-5-21] \Rightarrow [14-5-34] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 2).

Если  $a_2 = 3$ , то  $43a_3a_4421 \in [43-5-21] \Rightarrow [12-5-34] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 2).

2) Пусть от противного существует  $f \in [12-7-41]$ . Тогда  $f$  имеет вид:  $f = 12a_1a_2a_3a_4a_541$ , где  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \{1, 2, 3, 4\}$ , поэтому  $f = 124a_2a_3a_4a_541$ .

Если  $a_2 = 1$ , то  $41a_3a_4a_541 \in [41-5-41] \Rightarrow [14-5-14] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 2).

Если  $a_2 = 3$ , то  $43a_3a_4a_541 \in [43-5-41] \Rightarrow [12-5-14] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 2).

3) Пусть от противного существует  $f \in [14-7-21]$ . Тогда  $f$  имеет вид:  $f = 14a_1a_2a_3a_4a_521$ , где  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \{1, 2, 3, 4\}$ , поэтому  $f = 14a_1a_2a_3a_4421$ .

Если  $a_1 = 2$ , то  $42a_2a_3a_4421 \in [42-6-21]$ . При  $a_4 = 1$  имеем

$$42a_2a_314 \in [42-4-14] \Rightarrow [13-4-41] \neq \emptyset,$$

противоречие (см. таблицу 1); а при  $a_4 = 3$  имеем

$$42a_2a_334 \in [42-4-34] \Rightarrow [13-4-21] \neq \emptyset,$$

противоречие (см. таблицу 1).

Если  $a_1 = 3$ , то  $43a_2a_3a_4421 \in [43 -_6-21]$ . При  $a_4 = 1$  имеем

$$43a_2a_314 \in [43 -_4-14] \Rightarrow [12 -_4-41] \neq \emptyset,$$

противоречие (см. таблицу 1); а при  $a_4 = 3$  имеем

$$43a_2a_334 \in [43 -_4-34] \Rightarrow [12 -_4-21] \neq \emptyset,$$

противоречие (см. таблицу 1).

4) Пусть от противного существует  $f \in [14 -_7-41]$ . Тогда  $f$  имеет вид:  $f = 14a_1a_2a_3a_4a_541$ , где  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Если  $a_1 = 2$ , то  $42a_2a_3a_4a_541 \in [42 -_6-41] \Rightarrow [13 -_6-14] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 3).

Если  $a_1 = 3$ , то  $43a_2a_3a_4a_541 \in [43 -_6-41] \Rightarrow [12 -_6-14] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 3).  $\square$

**Лемма 6.** *Не существует 4-изящных раскрасок 8-ветвей следующих типов:*

$$12 -_8-21, 12 -_8-31;$$

$$13 -_8-21.$$

*Доказательство.* 1) Пусть от противного существует  $f \in [12 -_8-21]$ . Тогда  $f = 12a_1a_2a_3a_4a_5a_621$ , где  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \{1, 2, 3, 4\}$ , поэтому  $f = 124a_2a_3a_4a_5a_621$ .

Если  $a_2 = 1$ , то  $41a_3a_4a_5a_621 \in [41 -_6-21] \Rightarrow [14 -_6-34] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 3).

Если  $a_2 = 3$ , то  $43a_3a_4a_5a_621 \in [43 -_6-21] \Rightarrow [12 -_6-34] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 3).

2) Пусть от противного существует  $f \in [12 -_8-31]$ . Тогда  $f$  имеет вид:  $f = 12a_1a_2a_3a_4a_5a_631$ , где  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \{1, 2, 3, 4\}$ , поэтому  $f = 124a_2a_3a_4a_5a_631$ .

Если  $a_2 = 1$ , то  $41a_3a_4a_5a_631 \in [41 -_6-31] \Rightarrow [14 -_6-24] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 3).

Если  $a_2 = 3$ , то  $43a_3a_4a_5a_631 \in [43 -_6-31] \Rightarrow [12 -_6-24] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 3).

3) Пусть от противного существует  $f \in [13 -_8-21]$ . Тогда  $f$  имеет вид:  $f = 13a_1a_2a_3a_4a_5a_621$ , где  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \{1, 2, 3, 4\}$ , поэтому  $f = 13a_1a_2a_3a_4a_5421$ .

Если  $a_5 = 1$ , то  $13a_1a_2a_3a_414 \in [13 -_6-14] \Rightarrow [13 -_6-14] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 3).

Если  $a_5 = 3$ , то  $13a_1a_2a_3a_434 \in [13 -_6-34] \Rightarrow [13 -_6-34] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 3).  $\square$

**Лемма 7.** *Не существует 4-изящных раскрасок 9-ветвей следующих типов:*

$$12 -_9-14, 12 -_9-34;$$

$$14 -_9-34.$$

*Доказательство.* 1) Пусть от противного существует  $f \in [12-9-14]$ . Тогда  $f = 12a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_714$ , где  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \in \{1, 2, 3, 4\}$ , поэтому  $f = 124a_2a_3a_4a_5a_6a_714$ .

Если  $a_2 = 1$ , то  $41a_3a_4a_5a_6a_714 \in [41-7-14] \Rightarrow [14-7-41] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 1).

Если  $a_2 = 3$ , то  $43a_3a_4a_5a_6a_714 \in [43-7-14] \Rightarrow [12-7-41] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 1).

2) Пусть от противного существует  $f \in [12-9-34]$ . Тогда  $f$  имеет вид:  $f = 12a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_734$ , где  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \in \{1, 2, 3, 4\}$ , поэтому  $f = 124a_2a_3a_4a_5a_6a_734$ .

Если  $a_2 = 1$ , то  $41a_3a_4a_5a_6a_734 \in [41-7-34] \Rightarrow [14-7-21] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 1).

Если  $a_2 = 3$ , то  $43a_3a_4a_5a_6a_734 \in [43-7-34] \Rightarrow [12-7-21] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 1).

3) Пусть от противного существует  $f \in [14-9-34]$ . Тогда  $f$  имеет вид:  $f = 14a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_734$ , где  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \in \{1, 2, 3, 4\}$ , поэтому  $f = 14a_1a_2a_3a_4a_5a_6134$ .

Если  $a_6 = 2$ , то  $14a_1a_2a_3a_4a_521 \in [14-7-21] \Rightarrow [14-7-21] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 1).

Если  $a_2 = 4$ , то  $14a_1a_2a_3a_4a_541 \in [14-7-41] \Rightarrow [14-7-41] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 1).  $\square$

**Лемма 8.** *Не существует 4-изящных раскрасок 11-ветвей следующего типа:*

$$12-11-21.$$

*Доказательство.* Пусть от противного существует  $f \in [12-11-21]$ . Тогда  $f = 12a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_921$ , где  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 \in \{1, 2, 3, 4\}$ , поэтому  $f = 124a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_921$ .

Если  $a_2 = 1$ , то  $41a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_921 \in [41-9-21] \Rightarrow [14-9-34] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 3).

Если  $a_2 = 3$ , то  $43a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_921 \in [43-9-21] \Rightarrow [12-9-34] \neq \emptyset$ , противоречие (см. таблицу 3).  $\square$

### 3 4-изящные раскраски узловых компонент

Прежде чем рассматривать 4-изящные раскраски узловых компонент деревьев  $T$  с максимальной степенью вершин  $\Delta = 3$ , приведём необходимые определения.

Для узловой компоненты  $G$  дерева  $T$  две граничные вершины, лежащие в расширенной узловой компоненте  $G'$  будем называть *близнецами*, если смежны инцидентные им граничные рёбра.

Ясно, что при 4-изящной раскраске расширенной узловой компоненты  $G'$  для близнецов должны выполняться следующие условия *допустимости* раскраски:

- близнецы имеют разный цвет,

- если один из близнецов имеет козырный цвет 1 или 4, то другой близнец имеет ординарный цвет (см. Рис. 7)

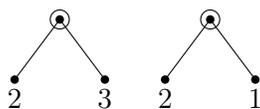


Рис. 7. Примеры допустимых раскрасок близнецов

Допустимым граничным условием для расширенной узловой компоненты  $G'$  будем называть такое распределение цветов на множестве всех граничных вершин компоненты  $G$ , при котором допустимы раскраски всех близнецов из  $G'$  (см. Рис. 8).

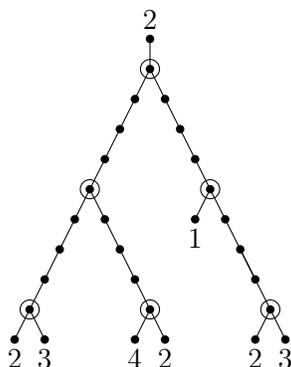


Рис. 8. Пример допустимого граничного условия для расширенной 3-компоненты

**Теорема 1.** Для любой расширенной узловой  $s$ -компоненты  $G'$  узловой  $s$ -компоненты  $G$  дерева  $T$  с максимальной степенью вершин  $\Delta = 3$ , где  $s \geq 10$  и  $s \neq 11$ , существует такая 4-изящная раскраска, при которой все граничные вершины раскрашены в соответствии с предварительно заданным допустимым граничным условием.

*Доказательство.* Воспользуемся тем, что для таких  $s$  в силу леммы 1 граф  $s$ -переходов является полным двудольным графом вида  $K_{6,6}$ . Построим алгоритм нахождения 4-изящной раскраски расширенной узловой  $s$ -компоненты  $G'$ , отвечающей узловой  $s$ -компоненте  $G$  для фиксированного числа  $s \geq 10$  и  $s \neq 11$ . При построении раскраски для  $G'$  будем использовать поиск в глубину в графе узлов и  $s$ -ветвей  $\tilde{G}$ , вершинами которого являются узлы из  $G$ , а ребрами —  $s$ -ветви, соединяющие узлы из  $G$ .

Если в  $G$  всего один узел, то утверждение теоремы очевидно выполняется. Поэтому будем предполагать, что в  $G$  имеется не менее двух узлов.

Зафиксируем некоторую граничную вершину  $v$  компоненты  $G$  и будем рассматривать  $G'$  в качестве корневого дерева с корнем  $v$ . Будем раскрашивать  $G'$ , начиная с вершины  $v$ . Через  $u$  обозначим узел из  $G$ , который соединяется граничным ребром с корнем  $v$ . Граф  $\tilde{G}$  также будем рассматривать в виде корневого дерева с корнем  $u$ , поиск в глубину в  $\tilde{G}$  будем проводить из узла  $u$ .

Опишем теперь алгоритм 4-изящной раскраски для  $G'$ .

- (1) Раскрасим узел  $u$  и три смежные с ним вершины таким образом, чтобы были использованы все четыре краски 1, 2, 3, 4, граничные вершины раскрашены в соответствии с допустимым граничным условием и вершина  $u$  раскрашена в козырный цвет. Очевидно такая раскраска существует, зафиксируем ее.

Узел  $u$  поместим в стек  $S$ .

- (2) Пусть  $w$  — первая вершина в стеке  $S$ . (Отметим, что узел  $w$  и смежные с ним вершины из  $G'$  ранее при работе алгоритма раскрашены в четыре разных цвета).
- (3) Если имеется хотя бы одна не раскрашенная  $s$ -ветвь, выходящая из  $w$ , то выбираем такую  $s$ -ветвь.

Пусть  $w'$  — финальный узел выбранной  $s$ -ветви с началом в узле  $w$ .

Раскрасим узел  $w'$  и три смежные с ним вершины таким образом, чтобы были использованы все четыре краски 1, 2, 3, 4, граничные вершины раскрашены в соответствии с допустимым граничным условием и вершина  $u$  раскрашена в козырный цвет. Очевидно такая раскраска существует, зафиксируем ее.

В таблицах 1, 2 или 3 подберём 4-изящное слово для 4-изящной раскраски рассматриваемой  $s$ -ветви.

Для подбора такого слова берём 2-префикс, состоящий из краски, в которую окрашен узел  $w$ , и краски, в которую окрашена вторая вершина выбранной  $s$ -ветви (она смежна  $w$  и окрашена раньше). В качестве 2-суффикса берем краску, в которую окрашена предпоследняя вершина рассматриваемой  $s$ -ветви (эта вершина смежна  $w'$  и поэтому уже окрашена) и затем краску, в которую окрашен узел  $w'$ . В силу леммы 1 в таблицах имеется такое 4-изящное слово длины  $s + 2$ . Раскрашиваем рассматриваемую  $s$ -ветвь в такое слово (раскрашенная часть  $G'$  будет 4-изящно раскрашена).

После этого узел  $w'$  помещаем в стек  $S$  и переходим к выполнению шага (2).

- (4) Если не имеется не раскрашенных  $s$ -ветвей, выходящих из  $w$ , то

- в случае  $w \neq u$  удаляем  $w$  из стека  $S$  (т. е. возвращаемся от узла  $w$  к предшествующему ему узлу в процедуре поиска в глубину) и переходим к выполнению шага (2);
- в случае  $w = u$  убираем  $w$  из стека  $S$  (стек становится пустым и найдена 4-изящная раскраска для  $G'$ ) и Stop.

Очевидно, процесс раскраски вершин обязательно завершится и будет построена 4-изящная раскраска для  $G'$ .  $\square$

*Слабым допустимым граничным условием* для расширенной узловой компоненты  $G'$  будем называть такое распределение цветов на множестве всех граничных вершин из  $G'$ , при котором допустимы раскраски всех близнецов из  $G'$  и в случае козырных красок в граничном условии указан лишь их *козырный тип*  $t$  (в дальнейшем *тип ординарных* раскрасок будем обозначать через  $o$ ), а не конкретный цвет 1 или 4 (см. Рис. 9).

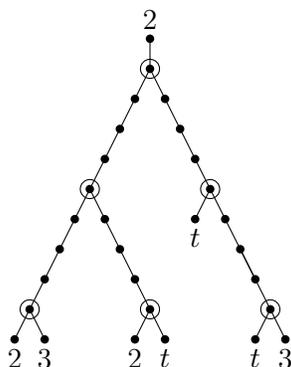


Рис. 9. Пример слабого допустимого граничного условия для расширенной 3-компоненты

**Теорема 2.** *Для любой расширенной узловой  $s$ -компоненты  $G'$  узловой  $s$ -компоненты  $G$  дерева  $T$  с максимальной степенью вершин  $\Delta = 3$ , где  $s = 4, 6, 7, 8, 9, 11$ , существует такая её 4-изящная раскраска, при которой все граничные вершины раскрашены в соответствии с предварительно заданным слабым допустимым граничным условием.*

*Доказательство.* Воспользуемся тем, что для таких  $s$  в силу лемм 2 и 3, а также двойственных к ним лемм, граф  $s$ -переходов содержит полные двудольные подграфы вида  $K_{3,3}$  (они указаны в леммах).

Построим теперь алгоритм нахождения 4-изящной раскраски расширенной узловой  $s$ -компоненты  $G'$ , отвечающей узловой  $s$ -компоненте  $G$  для фиксированного числа  $s = 4, 6, 7, 8, 9, 11$ , аналогичный алгоритму, указанному в доказательстве теоремы 1. При построении раскраски для  $G'$  будем использовать поиск в глубину в графе узлов и  $s$ -ветвей  $\tilde{G}$ , отвечающему узловой  $s$ -компоненте  $G$ .

Алгоритм строится совершенно аналогично предыдущему, за исключением действий в (3). Теперь мы вынуждены выбирать цвет очередного узла  $w'$  в зависимости от козырного цвета  $t_1$  узла  $w$ , который стоит в начале выбранной  $s$ -ветви, которая при поиске в ширину приводит к узлу  $w'$  ( $w'$  стоит в конце этой  $s$ -ветви). Сначала по цвету  $t_1$  узла  $w$  в двудольном графе  $s$ -переходов мы выбираем тот полный двудольный подграф вида  $K_{3,3}$ , в первой доле которого фигурирует цвет  $t_1$ , а затем берем цвет  $t_2$ , который фигурирует во второй доле выбранного полного двудольного графа  $K_{3,3}$ . Заметим, что при  $s = 4, 7, 8, 11$  козырный цвет изменится при переходе от  $t_1$  к  $t_2$ , т.е.  $t_1 \neq t_2$ , а при  $s = 6, 9$  он сохранится, т.е.  $t_1 = t_2$ . Поэтому для граничных вершин, в случае необходимости, мы можем гарантировать раскраску их в какой-то козырный цвет в соответствии со слабым допустимым граничным условием. С ординарными красками проблем нет — с их выбором все происходит точно также, как в алгоритме из теоремы 1.  $\square$

Задача 4-изящного раскрашивания узловых  $s$ -компонент при  $s = 1, 2, 3, 5$  значительно сложнее рассмотренных случаев для  $s$ . Такие компоненты могут задавать *запрещённые конфигурации* для 4-изящных деревьев, т.е. конфигурации, которые не могут содержаться в 4-изящных деревьях. Рассмотрению узловых  $s$ -компонент при  $s = 1, 2, 3, 5$  будет посвящена наша следующая работа.

В заключительной части данной работы мы рассмотрим 4-изящные раскраски узловых 2-компонент дерева  $T$  с максимальной степенью вершин  $\Delta = 3$  и покажем, как узловые 2-компоненты могут задавать запрещённые конфигурации для 4-изящных деревьев.

**Лемма 9.** *Любая расширенная узловая 2-компонента  $G'$  узловой 2-компоненты  $G$  дерева  $T$  с максимальной степенью вершин  $\Delta = 3$  не имеет 4-изящных раскрасок таких, что все граничные вершины компоненты  $G$  имеют ординарный цвет.*

*Доказательство.* Пусть от противного расширенная узловая 2-компонента  $G'$  имеет 4-изящную раскраску такую, что все граничные вершины узловой 2-компоненты  $G$  имеют ординарный цвет. Зафиксируем некоторую такую раскраску для  $G'$ .

В  $G$  зафиксируем также узел  $v$ , который является висячей вершиной в дереве узлов и 2-ветвей  $\tilde{G}$ . Без ограничения общности с учетом двойственности для 4-изящных раскрасок будем считать, что  $v$  имеет цвет 1. Ясно, что у вершины  $v$  имеются две смежные с ней граничные вершины  $u_1$  и  $u_2$  узловой 2-компоненты  $G$ . Они являются близнецами и имеют различные ординарные цвета (их ординарный тип на рисунках мы договорились обозначать через  $o$ ). Тогда третья вершина  $w_1$ , смежная с узлом  $v$ , имеет цвет 4. Поскольку все граничные вершины узловой 2-компоненты  $G$  имеют ординарные цвета, вершина  $w_1$  не является граничной вершиной. Следовательно, она принадлежит некоторой 2-ветви

$v, w_1, x_1, v_1$ , выходящей из узла  $v$  и входящей в узел  $v_1$ . Так как вершина  $w_1$  имеет цвет 4, узел  $v_1$  имеет цвет 1, а вершина  $x_1$  имеет ординарный цвет.

Узел  $v_1$ , кроме вершины  $x_1$ , имеет ещё две смежные вершины  $y_2, w_2$ . Без ограничения общности будем считать, что вершина  $y_2$  имеет ординарный цвет, а вершина  $w_2$  имеет цвет 4. Поэтому вершина  $w_2$  не является граничной, следовательно, она принадлежит некоторой 2-ветви  $v_1, w_2, x_2, v_2$  узловой 2-компоненты  $G$ .

Продолжаем указанный процесс построения 2-ветвей в узловой 2-компоненте  $G$ . Поскольку  $G'$  — дерево, повторения вершин не произойдёт, будет строиться поддерево дерева  $G'$  (см. Рис. 10).

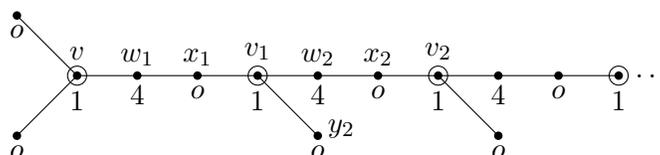


Рис. 10. Поддерево дерева  $G'$

На некотором шаге построения строящееся поддерево будет содержать вершин больше чем дерево  $G'$ , пришли к противоречию.  $\square$

Будем говорить, что узловая 2-компонента является *изолированной* (см. Рис. 11), если любая её граничная вершина *изолирована*, т. е. смежна некоторому узлу, не принадлежащему этой компоненте (будем говорить, что этот узел и инцидентное ему ребро, ведущее к граничной вершине, *изолируют* граничную вершину).

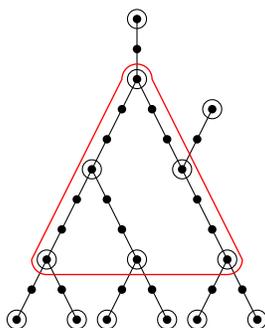


Рис. 11. Пример изолированной узловой 2-компоненты

Из леммы 9 очевидно вытекает следующая

**Теорема 3.** *Дерево, обладающее 4-изящной раскраской, не имеет изолированных узловых 2-компонент.*

Эта теорема говорит о том, что изолированные узловые 2-компоненты являются примерами запретных конфигураций для 4-изящных деревьев.

**Лемма 10.** *Любая расширенная узловая 2-компонента  $G'$  узловой 2-компоненты  $G$  дерева  $T$  с максимальной степенью вершин  $\Delta = 3$  имеет 4-изящную раскраску, в которой одна наперёд заданная граничная вершина имеет козырный цвет, а остальные граничные вершины имеют ординарные цвета.*

*Доказательство.* Дерево  $G'$  представим в виде корневого дерева, причём в качестве корня возьмем и зафиксируем одну из граничных вершин  $v$  узловой 2-компоненты  $G$ . При построении 4-изящной раскраски для  $G'$  будем использовать поиск в ширину в графе узлов и 2-ветвей  $\tilde{G}$ , отвечающем узловой 2-компоненте  $G$ .

Если в  $G$  всего один узел, то утверждение леммы очевидно выполняется. Поэтому будем предполагать, что в  $G$  имеется не менее двух узлов.

Через  $u$  обозначим узел из  $G$ , смежный с  $v$ . Поиск в ширину в  $\tilde{G}$  будем проводить из узла  $u$ .

Опишем теперь алгоритм 4-изящной раскраски для  $G'$ .

- (1) Начнем с того, что раскрасим корень  $v$  в цвет 4. Потом раскрасим узел  $u$  из  $G$ , смежный с  $v$ , в цвет 1. Затем две вершины из  $G'$ , смежные с узлом  $u$  и отличные от  $v$ , раскрасим в ординарные цвета 2 и 3 (среди этих вершин могут быть и граничные вершины).

Узел  $u$  поместим в очередь  $S$ .

- (2) Пусть  $w$  — первая вершина в очереди  $S$ . (Отметим, что узел  $w$  и смежные ему вершины из  $G'$  ранее при работе алгоритма раскрашены в четыре разных цвета: для узлов, помещаемых в очередь на шаге (3), предпоследняя вершина 2-ветви всегда окрашена в цвет 4, а остальные, смежные с узлом вершины, окрашены в ординарные цвета.)
- (3) Если имеется хотя бы одна не раскрашенная 2-ветвь, выходящая из  $w$ , то раскрашиваем выходящие из текущего узла  $w$  все 2-ветви в соответствии с правилом раскраски а) или б), указанным на Рис. 12. В случае а) из узла  $w$  выходит одна 2-ветвь, подлежащая раскраске, в случае б) — две таких 2-ветви.

После раскраски 2-ветвей, выходящих из узла  $w$ , узлы, которыми заканчиваются вновь раскрашенные 2-ветви, отправляем в конец очереди и переходим к (2).

- (4) Если не имеется не раскрашенных 2-ветвей, выходящих из  $w$ , то
  - в случае  $w \neq u$  удаляем  $w$  из очереди  $S$  (т. е. возвращаемся от узла  $w$  к предшествующему ему узлу в процедуре поиска в ширину) и переходим к (2);
  - в случае  $w = u$  убираем  $w$  из очереди  $S$  (очередь становится пустой и найдена 4-изящная раскраска для  $G'$ ) и Stop.

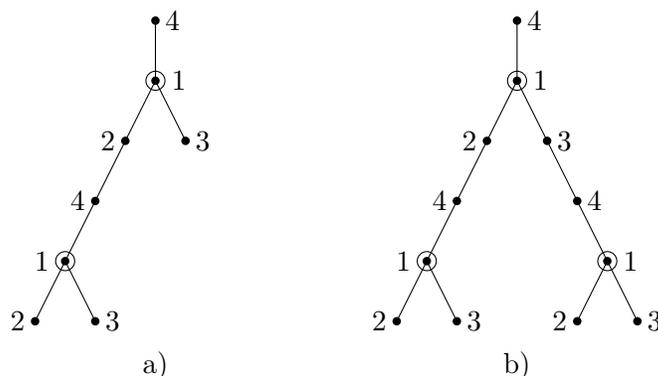


Рис. 12. Два способа раскраски для текущего узла  $w$

Очевидно, процесс раскраски вершин обязательно завершится и будет построена 4-изящная раскраска для  $G'$ .  $\square$

Рассмотрим теперь произвольную конфигурацию  $H$ , которая является деревом с максимальной степенью вершин  $\Delta = 3$  и которая устроена следующим образом. В  $H$  имеется подграф  $H_1$ , представляющий из себя узловую 2-компоненту, и имеются выделенные узел  $w$  в  $H_1$  и вершина  $v$ , не принадлежащая  $H_1$ . Все граничные вершины узловой 2-компоненты  $H_1$ , отличные от вершины  $v$ , являются изолированными в  $H$ .

Иными словами,  $H$  состоит из конфигурации  $H_1$ , которая является узловой 2-компонентой в  $H$ , добавленной вершины  $v$ , добавленных граничных вершин, добавленных узлов и рёбер, изолирующих граничные вершины, отличные от  $v$  (пример такой конфигурации см. на Рис. 13).

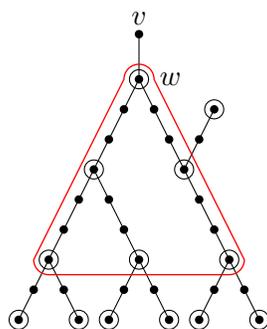


Рис. 13. Пример замка  $H$  с замочным входом  $vw$  и ключами 41, 14

Если такая конфигурация  $H$  содержится в 4-изящно раскрашенном дереве, то к ней применимы леммы 9 и 10, поэтому пара  $vw$ , где  $w$  — узел, в силу лемм 9 и 10 имеет цвета 14 или цвета 41.

Такую конфигурацию  $H$  будем называть *замком с замочным входом*  $vw$  и с *ключами* 14, 41. Из шести возможных раскрасок 21, 31, 41, 14, 24 и 34 для пары  $vw$  замка  $H$  допустимы лишь раскраски 14 и 41, которые взаимно двойственны (т. е. с точностью до двойственности ключ единствен). Наличие замка  $H$  в дереве  $T$  при 4-изящной раскраске дерева  $T$  накладывает на раскраску вершины  $v$  жёсткое условие: вершина  $v$  имеет цвет 1, если узел  $w$  имеет цвет 4, и вершина  $v$  имеет цвет 4, если узел  $w$  имеет цвет 1.

В следующей работе будут указаны и другие виды замков с другими ключами. Будут приведены различные способы построения запрещённых конфигураций в 4-изящных деревьях с помощью замков.

В заключение отметим следующую задачу.

**Задача.** Изучить семейство запрещённых конфигураций в 4-изящных графах.

## References

- [1] M.O. Asanov, V.A. Baranskii, V.V. Rasin, *Discrete Mathematics: Graphs, Matroids, Algorithms*, Publ. Lan', 2010.
- [2] V.A. Baransky, I.A. Nasyrov, T.A. Senchonok, *4-graceful trees*, Tr. Inst. Mat. Mekh., **30**:4 (2024), 64–76. MR4850694
- [3] G. Chartrand, P. Zhang, *Chromatic graph theory*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2009. Zbl 1169.05001
- [4] J.A. Gallian, *A dynamic survey of graph labeling*, Electron. J. Comb. DS6, Dynamic Surveys. Zbl 0953.05067
- [5] E. English, P. Zhang, *On graceful colorings of trees*, Math. Bohem., **142**:1 (2017), 57–73. Zbl 1463.05165
- [6] A.D. Byers, *Graceful colorings and connection in graphs*, Diss. Doct. Western Michigan University, 2018. Dissertations. **3308**.
- [7] I.N. Suparta, M. Venkathacalam, A.I. Gunadi Gede, A.C. Pratama Putu, *Graceful chromatic number of some Cartesian product graphs* Ural Math. J., **9**:2 (2023), 193–208. Zbl 1543.05158
- [8] D. Laavanya, S. Devi Yamini, *A structural approach to the graceful coloring of a subclass of tree* Helion, **9**:9 (2023), Article ID e19563.

BARANSKY VITALY ANATOLIEVICH  
 URAL FEDERAL UNIVERSITY,  
 LENINA AV., 51,  
 620000, EKATERINBURG, RUSSIA  
*Email address:* [vitaly.baransky@urfu.ru](mailto:vitaly.baransky@urfu.ru)

NASYROV ILIA ALEKSANDROVICH  
 URAL FEDERAL UNIVERSITY,  
 LENINA AV., 51,  
 620000, EKATERINBURG, RUSSIA  
*Email address:* [ilia.nasyrov@urfu.ru](mailto:ilia.nasyrov@urfu.ru)

SECHONOK TATIANA ALEKSANDROVNA  
URAL FEDERAL UNIVERSITY,  
LENINA AV., 51,  
620000, EKATERINBURG, RUSSIA  
*Email address:* [tatiana.senchonok@urfu.ru](mailto:tatiana.senchonok@urfu.ru)