

УЗЛОВЫЕ КОМПОНЕНТЫ 4-ИЗЯЩНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

В.А. БАРАНСКИЙ, И.А. НАСЫРОВ,
Т.А. СЕНЬЧОНОК

ПРЕДСТАВЛЕНО П.П. ПЕТРОВЫМ

Abstract: Let f be a coloring of the vertices of a connected graph G into colors from the set of colors $\{1, 2, \dots, k\}$. A coloring f on the set of edges of a graph G induces a function $f'(e) = |f(u) - f(v)|$, where $e = uv$ is an arbitrary edge of the graph G . The number $f'(e)$ will be called the *weight* of the edge e induced by the coloring f .

A coloring f is called a *graceful k -coloring* of a graph G if f' is an edge coloring of this graph. We will call a graph an *k -graceful graph* or, simply, a *graceful graph* if it has a graceful k -coloring.

In general, 4-graceful trees are quite complex. Note that 3-graceful connected graphs have a very simple structure. They are among simple chains of length no more than 3.

It is easy to establish that any 4-graceful graph does not contain vertices of degree greater than 3. Therefore, we consider trees T whose vertex degrees do not exceed 3. Vertices of degree 3 in a tree T we will call by *nodes*. We will say that the *nodal distance* between two nodes u and v of a tree T is equal to s if there is a simple chain from u to v such that the number of internal vertices in it is equal to s and all these internal vertices have degree 2 in the tree T . (Of course, the nodal distance is define not for any pair of nodes.) In this case, we will call a simple chain from u to v an *s -branch*.

Let us fix some positive integer s and generate a subgraph T_s of the tree T from all nodes and all s -branches. The connected components of this tree T_s will be called *nodal s -components* (or simply *nodal components*) of the tree T .

The main goal of our work is as follows.

- (1) For all positive integers s , find 4-graceful colorings of s -branches with given pairs of colors for the initial and final nodes (see Tables 1, 2 and 3).
- (2) To consider the properties of 4-graceful colorings of nodal s -components for $s \geq 4$ and $s \neq 5$ (see Theorems 1 and 2).
- (3) To show how can be found forbidden configurations for 4-graceful trees with using nodal s -components (see Theorem 3).

Keywords: graph, tree, graceful coloring of a graph, 4-graceful trees.

1 Введение

Далее под графом мы будем понимать конечный обыкновенный граф, т. е. граф без петель и кратных рёбер, и будем использовать терминологию, принятую в [1], [2] и [3].

Пусть G — связный граф и f — его k -раскраска вершин, т. е. раскраска в *краски* (или *цвета*) из множества красок $\{1, 2, \dots, k\}$. Раскраска f индуцирует следующую функцию f' на множестве рёбер этого графа:

$$f'(e) = |f(u) - f(v)|,$$

где $e = uv$ — произвольное ребро графа G , т. е. $f'(e)$ равно модулю разности цветов концевых вершин ребра e . Число $f'(e)$ будем называть *весом* ребра e , *индуцированным раскраской f* .

Раскраска f называется *изящной k -раскраской* (graceful k -coloring) графа G , если f' является рёберной раскраской этого графа (иными словами, является раскраской рёберного графа для G). Граф будем называть *k -изящным* (k -graceful graph) или, просто, *изящным* (graceful graph), если он обладает изящной k -раскраской. Для изящного графа G наименьшее число k такое, что граф G является k -изящным, будем называть *изящным хроматическим числом* этого графа.

Понятие изящной k -раскраски графа ввел Г. Шартран в 2015 году. В динамическом обзоре [4] можно найти множество результатов, родственных результатам о изящных раскрасках графов. В последние годы были найдены изящные хроматические числа для многих классов графов, большое внимание было уделено изучению изящных деревьев (см., например, [5]–[8]).

Отметим, что связные 3-изящные графы устроены очень просто, они исчерпываются простыми цепями длины не более 3. Задача же характеристики 4-изящных деревьев оказалась весьма непростой. Нетрудно заметить, что любой 4-изящный граф не содержит вершин степени большей

3. Поэтому для 4-изящных деревьев естественно искать характеристику в классе деревьев, у которых максимальная степень вершин $\Delta = 3$. Вершины степени 3 мы будем называть *узлами* (nodes) дерева.

Будем говорить, что для двух узлов u и v дерева T *узловое расстояние* между ними равно числу s , если существует простая цепь от u до v , число внутренних вершин в которой равно $s \geq 0$ и все эти внутренние вершины имеют степень 2 в дереве T (конечно, число вершин в такой цепи равно $s+2$, а длина цепи равна $s+1$). Простую цепь от u до v будем называть в таком случае *s-ветвью*. Изображая s -ветви (и подграфы деревьев), мы будем выделять узлы малыми кругами (на Рис. 1 изображена 4-ветвь).

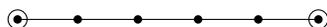


Рис. 1. 4-ветвь

Подграфы дерева T с выделенными узлами из T будем называть *конфигурациями*.

В работе [2] нами были найдены следующие достаточные условия 4-изящности деревьев.

- (1) Пусть T — дерево, степени вершин которого не превосходят 3, и которое не содержит простых цепей, состоящих из трех узлов. Если такое дерево T не имеет пар узлов, узловые расстояния между которыми равны 1 или 2 (т.е. нет конфигураций вида: $\odot-\odot-\odot$, $\odot-\bullet-\odot$, $\odot-\bullet-\bullet-\odot$), то оно является 4-изящным.
- (2) Пусть T — дерево, степени вершин которого не превосходят 3 и которое не содержит пар смежных узлов. Если такое дерево T не имеет пар узлов, узловые расстояния между которыми равны 1 (т.е. нет конфигураций вида: $\odot-\odot$, $\odot-\bullet-\odot$), то оно является 4-изящным.

В данной работе мы продолжим изучение изящных раскрасок в классе деревьев, в которых максимальная степень вершин $\Delta = 3$ (т.е. будем предполагать, что в дереве имеется хотя бы один узел). Наша цель — рассмотреть строение таких деревьев и выделить способы построения среди них 4-изящных и не 4-изящных деревьев.

Зафиксируем некоторое натуральное число s и породим всеми узлами и всеми s -ветвями подграф T_s дерева T . Компоненты связности этого дерева T_s будем называть *узловыми s-компонентами* (или просто *узловыми компонентами*) дерева T (см. Рис. 2).

Очевидно, все узлы дерева T и все ветви порождают подграф T^* , который является объединением узловых компонент и который мы будем называть *ядром* дерева T . Очевидно, что любые две различные узловые компоненты либо не пересекаются, либо имеют единственный общий узел (поскольку в дереве любые две различные вершины соединены точно одной простой цепью). Подграф T^* можно представлять себе, как дерево узловых компонент.

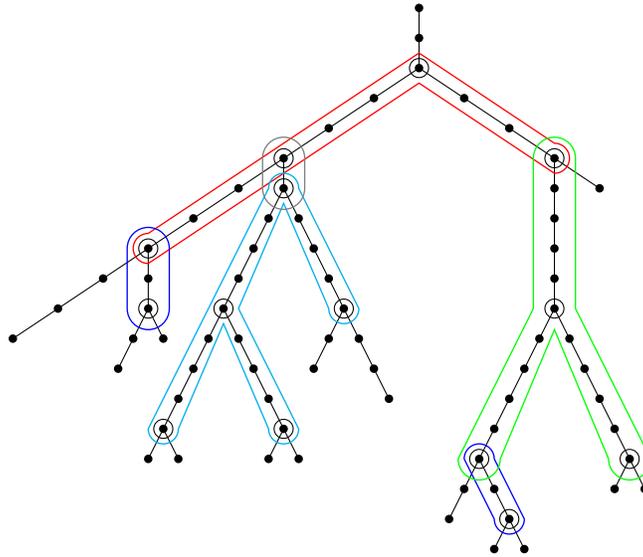


Рис. 2. Дерево и его узловые компоненты

Пусть G — узловая компонента дерева T . Под *расширенной узловой компонентой* G' (отвечающей G) мы будем понимать подграф, который получается добавлением к G всех рёбер, инцидентных узлам компоненты G и не лежащих в этой компоненте, а также добавлением всех вершин, инцидентных добавляемым рёбрам. Ясно, что добавляемые рёбра и добавляемые вершины будут висячими в расширенной узловой компоненте G' (см. Рис. 3). Эти висячие рёбра и висячие вершины мы будем называть *граничными* для G .

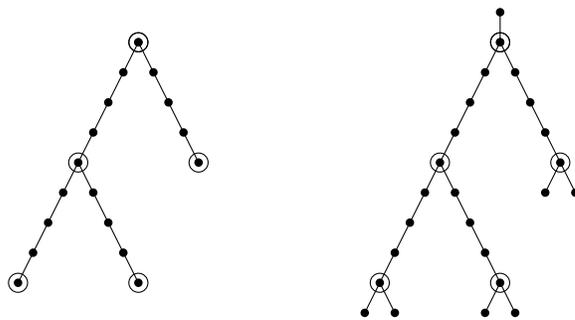


Рис. 3. Узловая компонента и её расширенная узловая компонента

Две граничные вершины расширенной узловой компоненты назовем *близнецами*, если инцидентные им граничные рёбра являются смежными. На Рис. 3 изображена расширенная 3-узловая компонента, у которой среди висячих граничных вершин имеется три пары близнецов и одна висячая вершина, которая не имеет близнеца.

Для нахождения 4-изящных раскрасок дерева T естественно поочередно находить 4-изящные раскраски расширенных узловых компонент. В связи с этим важно уметь выделять запрещенные *конфигурации* (т. е. подграфы дерева T с отмеченными узлами из T), для которых не существует 4-изящных раскрасок.

Цель данной работы состоит в следующем.

- (1) Для всех натуральных чисел s найти 4-изящные раскраски s -ветвей с заданными парами красок для начальных и финальных узлов (см. Таблицы 1, 2 и 3). Именно такие раскраски систематически используются при нахождении 4-изящных раскрасок деревьев.
- (2) Рассмотреть свойства 4-изящных раскрасок расширенных узловых s -компонент при $s \geq 4$ и $s \neq 5$ (см. Теоремы 1 и 2).
- (3) Показать, как с помощью расширенных узловых s -компонент можно находить запрещённые конфигурации для 4-изящных деревьев (см. Теорему 3).

Заметим, что следующая наша работа будет посвящена изучению 4-изящных раскрасок расширенных узловых s -компонент при малых значениях s и выделению запрещённых конфигураций по таким компонентам.

2 4-изящные раскраски ветвей

Последовательность натуральных чисел $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ будем называть 4-изящной, если для любого $i = 1, \dots, s$ выполняется

- (1) $\lambda_i \in \{1, 2, 3, 4\}$;
- (2) $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$ при $i < s$;
- (3) $|\lambda_{i+1} - \lambda_i| \neq |\lambda_{i-1} - \lambda_i|$ при $1 < i < s$.

Заметим, что из (2) и (3) следует, что в 4-изящной последовательности любая тройка последовательных компонент $\lambda_i, \lambda_{i+1}, \lambda_{i+2}$ состоит из попарно различных чисел.

Легко проверить, что произвольная тройка (a, b, c) попарно различных чисел из множества $\{1, 2, 3, 4\}$ является 4-изящной тогда и только тогда, когда она отлична от следующих четырёх *запрещённых троек*

$$(1, 2, 3), (3, 2, 1), (2, 3, 4), (4, 3, 2),$$

т. е. из 24 троек попарно различных чисел множества $\{1, 2, 3, 4\}$ изящными являются 20 троек, а 4 тройки не являются изящными.

Будем рассматривать полугруппу слов над алфавитом $\{1, 2, 3, 4\}$ и каждую последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ чисел 1, 2, 3 и 4 будем представлять также в виде слова

$$\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_s$$

(не путать с числом, записанным в десятичной записи!) в этой полугруппе слов. Для удобства числа 1, 2, 3, 4 будем называть также *буквами*.

Буквы 2 и 3 будем называть *ординарными* (ordinary letters), а буквы 1 и 4 — *козырными* (trump letters).

Через φ обозначим подстановку на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$ такую, что

$$\varphi(1) = 4, \varphi(4) = 1 \text{ и } \varphi(2) = 3, \varphi(3) = 2.$$

Ясно, что $\varphi(x) = 5 - x$, откуда следует, что φ сохраняет модуль разности букв:

$$|\varphi(a) - \varphi(b)| = |a - b|$$

для любых двух различных букв a и b .

Слово

$$\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda_2)\dots\varphi(\lambda_s),$$

будем называть *двойственным* для слова $\lambda = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_s$. Ясно, что слово $\varphi(\lambda)$ является 4-изящным тогда и только тогда, когда 4-изящно слово λ .

Заметим также, что если f — 4-изящная раскраска связного графа G , то суперпозиция $\varphi \circ f$, состоящая в замене f -красок вершин в соответствии с подстановкой φ , снова будет 4-изящной раскраской. Раскраску $\varphi \circ f$ будем называть *двойственной раскраской* к раскраске f .

Зафиксируем теперь связный граф G и его 4-изящную раскраску f .

Маршрут v_1, v_2, \dots, v_s в графе G будем называть *безвозвратным*, если для любого $i = 2, \dots, s - 1$ выполняется $v_{i-1} \neq v_{i+1}$.

Нетрудно видеть, что последовательность цветов

$$f(v_1)f(v_2)\dots f(v_s),$$

отвечающая безвозвратному маршруту v_1, v_2, \dots, v_s в 4-изящном графе G , является 4-изящной последовательностью.

Нетрудно также заметить, что все 4-изящные последовательности исчерпываются безвозвратными маршрутами в графе K_4 с дорожными знаками, указанным на Рис. 4. Четыре дорожных знака запрещают прохождение по маршрутам, отвечающим четырём запрещённым тройкам. На Рис. 4 запреты указаны с помощью закругленных стрелок. На Рис. 4 кроме раскрасок вершин для удобства указаны также веса рёбер. Заметим, что раскраска вершин графа K_4 , указанная на Рис. 4, не является 4-изящной.

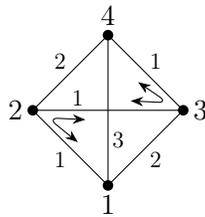


Рис. 4. K_4 с четырьмя дорожными знаками

Рассматривая Рис. 4, легко понять, что красками 2 и 3 нельзя в 4-изящных раскрасках графов раскрашивать узлы, так как при раскраске узла нужно будет использовать все три оставшиеся краски для раскраски соседей узла и тогда возникнут два смежных ребра одного цвета 1, что противоречиво (см. также леммы 1 и 2 из [2]).

Поскольку красками 2 и 3 в 4-изящных раскрасках графов нельзя раскрашивать узлы, такие краски и названы *ординарными* (ordinary letters). Краски же 1 и 4 при 4-изящных раскрасках графов можно использовать для раскрашивания любых вершин. Поэтому такие краски и называются *козырными* (trump letters).

Поскольку козырных красок всего две, в 4-изящных графах не существует простых цепей, состоящих из трех различных узлов (т. е. нет конфигураций вида $\odot - \odot - \odot$).

Далее в Таблицах 1, 2 и 3 мы указываем 4-изящные слова в алфавите красок $\{1, 2, 3, 4\}$, начинающиеся и заканчивающиеся козырными буквами. С помощью таких 4-изящных слов можно 4-изящно раскрашивать s -ветви, где s принимает натуральные значения.

Тип слова	Слово	$s = 1$	$s = 4$	$s = 7$	$s = 10, 13, \dots$
12 – 21 ⁺	$(124)^k 312 431 421$	–	–	–	$k = 1, 2, \dots$
12 – 31	$(124)^k 312 431$	–	–	$k = 1$	$k = 2, 3, \dots$
12 – 41	$(124)^k 312 431 241$	–	–	–	$k = 1, 2, \dots$
12 – 14	$(124)^k 314$	–	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
12 – 24	$(124)^k 124$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
12 – 34 ⁺	$(124)^k 134$	–	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
13 – 21 ⁺	$(134)^k 231 421$	–	–	$k = 1$	$k = 2, 3, \dots$
13 – 31	$(134)^k 231$	–	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
13 – 41	$(134)^k 231 241$	–	–	$k = 1$	$k = 2, 3, \dots$
13 – 14	$(134)^k 214$	–	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
13 – 24	$(134)^k 124$	–	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
13 – 34 ⁺	$(134)^k 134$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
14 – 21 ⁺	$(142)^k 312 431 421$	–	–	–	$k = 1, 2, \dots$
14 – 31	$(142)^k 312 431$	–	–	$k = 1$	$k = 2, 3, \dots$
14 – 41	$(142)^k 312 431 241$	–	–	–	$k = 1, 2, \dots$
14 – 14	$(142)^k 314$	–	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
14 – 24	$(143)^k 124$	–	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
14 – 34 ⁺	$(142)^k 134$	–	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$

ТАБЛИЦА 1. $s \equiv 1(3)$

В первом столбце таблиц в строках указывается *тип 4-изящного слова*, т. е. пара, состоящая из его начала uv длины 2 (*2-префикс*) и его конца pq длины 2 (*2-суффикс*), где u и q — козырные буквы. Такую пару мы будем записывать в виде $uv - pq$. Если 4-изящное слово состоит из $s + 2$

букв, т. е. его можно использоваться для 4-изящной раскраски s -ветвей, то его тип иногда будем записывать подробнее в виде $uv -_s - pq$. Через $[uv -_s - pq]$ будем обозначать множество всех 4-изящных слов указанного типа $uv -_s - pq$.

Тип слова	Слово	$s = 2$	$s = 5$	$s = 8$	$s = 11, 14, \dots$
$12 - 21^+$	$12 (431)^k 243 124 134 21$	-	-	-	- для $s = 11$, для $s > 11$ $k = 1, 2, \dots$
$12 - 31$	$12 (431)^k 243 124 31$	-	-	-	$k = 1, 2, \dots$
$12 - 41$	$(124)^k 124 1$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$12 - 14$	$124 (314)^k 231 4$	-	-	$k = 1$	$k = 2, 3, \dots$
$12 - 24$	$(124)^k 312 4$	-	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$12 - 34^+$	$(124)^k 312 413 4$	-	-	$k = 1$	$k = 2, 3, \dots$
$13 - 21^+$	$134 213 42 (134)^k 21$	-	-	-	$k = 1, 2, \dots$
$13 - 31$	$(134)^k 213 423 1$	-	-	$k = 1$	$k = 2, 3, \dots$
$13 - 41$	$134 (124)^k 1$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$13 - 14$	$132 4 (314)^k$	-	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$13 - 24$	$132 4 (124)^k$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$13 - 34^+$	$132 4 (134)^k$	-	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$14 - 21^+$	$(142)^k 142 1$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$14 - 31$	$(143)^k 143 1$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$14 - 41$	$(143)^k 124 1$	-	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$14 - 14$	$1 (421)^k 324 314$	-	-	$k = 1$	$k = 2, 3, \dots$
$14 - 24$	$(142)^k 312 4$	-	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$14 - 34^+$	$1 (421)^k 324 134$	-	-	$k = 1$	$k = 2, 3, \dots$

ТАБЛИЦА 2. $s \equiv 2(3)$

Если для заданной пары, состоящей из 2-префикса и 2-суффикса, s -ветвь не имеет 4-изящной раскраски с таким 2-префиксом и с таким 2-суффиксом, т. е. $[uv -_s - pq] = \emptyset$, то в столбце, соответствующем s , строка, соответствующая этой паре, содержит прочерк. Если же такое 4-изящное слово существует, то указывается значение параметра k для получения такого слова из слова, указанного во втором столбце таблицы. Отметим, что длина такого слова (т. е. число букв в нём) равна $s + 2$. Для каждого s в таблицах мы указываем только одно из таких слов. Для наших целей этого вполне достаточно.

В этих трёх таблицах все 2-префиксы начинаются с буквы 1. В силу двойственности для слов имеются ещё три таблицы, состоящие из двойственных слов, начинающихся с буквы 4. Выписывать их мы не будем, но использовать будем.

Отметим, что под нулевой степенью слова, как обычно, понимается пустой символ в полугруппе слов. Отметим также, что 2-суффиксы вида

21 и 34 указаны со знаком $+$. Это служебный символ, который будет использоваться в следующей работе авторов.

Тип слова	Слово	$s = 3$	$s = 6$	$s = 9$	$s = 12, 15, \dots$
$12 - 21^+$	$124 (134)^k 21$	–	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$12 - 31$	$124 (124)^k 31$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$12 - 41$	$(124)^k 312 41$	–	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$12 - 14$	$12 (413)^k 243 124 314$	–	–	–	$k = 1, 2, \dots$
$12 - 24$	$12 (431)^k 243 124$	–	–	$k = 1$	$k = 2, 3, \dots$
$12 - 34^+$	$12 (431)^k 243 124 134$	–	–	–	$k = 1, 2, \dots$
$13 - 21^+$	$134 (134)^k 21$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$13 - 31$	$134 (124)^k 31$	–	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$13 - 41$	$(134)^k 132 41$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$13 - 14$	$132 43 (124)^k 314$	–	–	$k = 1$	$k = 2, 3, \dots$
$13 - 24$	$(134)^k 213 24$	–	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$13 - 34^+$	$13 (421)^k 324 134$	–	–	$k = 1$	$k = 2, 3, \dots$
$14 - 21^+$	$(142)^k 134 21$	–	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$14 - 31$	$(142)^k 142 31$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$14 - 41$	$(142)^k 132 41$	–	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$14 - 14$	$(142)^k 142 14$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3, 4, \dots$
$14 - 24$	$142 (134)^k 213 24$	–	–	$k = 1$	$k = 2, 3, \dots$
$14 - 34^+$	$(142)^k 312 431 421 34$	–	–	–	$k = 1, 2, \dots$

ТАБЛИЦА 3. $s \equiv 3(3)$

Рассматривая граф K_4 с дорожными знаками, который приведен на Рис. 4, несложно проверить, что все слова, указанные в таблицах для всевозможных значений параметра s , являются 4-изящными и имеют нужные 2-префиксы и 2-суффиксы.

Теперь нужно обосновать правильность расстановки прочерков в таблицах. Мы начнём с малых значений s , равных 1, 2 и 3 (а затем рассмотрим значения $s \geq 4$). Для таких значений s нетрудно найти всевозможные 4-изящные раскраски s -ветвей (см. Рис. 5) и, используя их, обосновать появление прочерков в столбцах таблиц, отвечающих значениям $s = 1, 2, 3$.

Для перечисления всевозможных 4-изящных раскрасок s -ветвей для малых значений s мы будем использовать простой алгоритм. Выписывая 4-изящное слово, мы последовательно будем добавлять новую букву в конец слова таким образом, чтобы она была отлична от двух последних букв растущего слова и не возникало запрещенной тройки букв. Сначала проведем этот процесс для $s = 1, 2, 3$ (см. Рис. 5).

Для случая $s = 3$ имеющиеся типы раскрасок 3-ветвей можно изобразить с помощью графа 3-переходов (см. Рис. 6). Можно считать, что

$s = 1$		$s = 2$		$s = 3$	
⊙—•—⊙	типы	⊙—•—•—⊙	типы	⊙—•—•—•—⊙	типы
<u>1 2 4</u>	12 – 24	<u>1 2 4 1</u>	12 – 41	<u>1 2 4 3 1</u>	12 – 31
<u>1 3 4</u>	13 – 34 ⁺	1 3 2 4	13 – 24	1 3 2 4 1	13 – 41
		<u>1 3 4 1</u>	13 – 41	<u>1 3 4 2 1</u> ⁺	13 – 21 ⁺
		1 4 2 1 ⁺	14 – 21 ⁺	1 4 2 1 4	14 – 14
		<u>1 4 3 1</u>	14 – 31	1 4 3 1 4	14 – 14
				<u>1 4 2 3 1</u>	14 – 31

Рис. 5. Раскраски s -ветвей для $s = 1, 2, 3$

это двудольный граф, одну из долей которого составляют 6 всевозможных видов выходов 12, 13, 14, 41, 42 и 43 из узлов, другую долю составляют 6 всевозможных видов входов 21, 31, 41, 14, 24 и 34 в узлы, а $\{23, 32, 34, 43, 41, 14, 12, 21, 23, 32\}$ — множество рёбер, отвечающих типам при $s = 3$ (конечно, при построении графа 3-переходов мы используем все типы 4-изящных раскрасок 3-ветвей, двойственные к указанным в Рис. 5). Например, ребро 23 графа 3-переходов соединяет выход 12 с входом 31, т. е. отвечает типу 12 – 31.

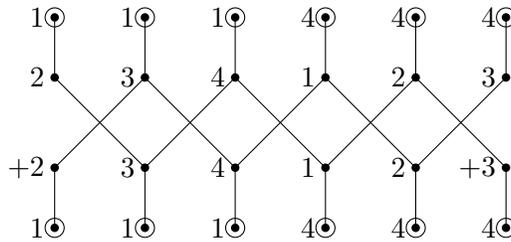


Рис. 6. Граф 3-переходов

Для каждого натурального числа s по таблицам 1, 2 и 3 можно аналогично построить граф s -переходов. В этих таблицах при $s \geq 10$ и $s \neq 11$ нет прочерков, поэтому справедлива

Лемма 1. Для любого s такого, что $s \geq 10$ и $s \neq 11$, граф s -переходов является полным двудольным графом вида $K_{6,6}$.

Рассматривая таблицы, нетрудно заметить также справедливость двух следующих лемм.

Лемма 2. Для любого $s = 4, 7, 8, 11$ граф s -переходов содержит полный двудольный подграф вида $K_{3,3}$, одна доля которого состоит из выходов 12, 13, 14 из узлов цвета 1, а вторая доля состоит из входов 14, 24, 34 в узлы цвета 4.

Лемма 3. Для любого $s = 6, 9$ граф s -переходов содержит полный двудольный подграф вида $K_{3,3}$, одна доля которого состоит из выходов 12, 13, 14 из узлов цвета 1, а вторая доля состоит из входов 21, 31, 41 в узлы цвета 1.

Конечно, справедливы (двойственные леммы) аналоги леммы 2 для выходов 41, 42, 43 во входы 21, 31, 41 при $s = 4, 7, 8, 11$ и леммы 3 для выходов 41, 42, 43 во входы 14, 24, 34 при $s = 6, 9$ в графах s -переходов.

Продолжим обоснование наличия прочерков в столбцах таблиц для значений $s \geq 4$.

Нетрудно сгенерировать все 4-изящные раскраски для 4-ветвей, 2-префикс которых начинается с буквы 1:

$$\begin{aligned} &124124, 124314, 124134; \\ &134124, 132431, 134214, 134134, 134231; \\ &142134, 143124, 142314. \end{aligned}$$

Поэтому мы можем теперь выписать всевозможные типы 4-изящных раскрасок для 4-ветвей, префикс которых начинается с буквы 1:

$$\begin{aligned} &12_{-4}-14, 12_{-4}-24, 12_{-4}-34; \\ &13_{-4}-31, 13_{-4}-14, 13_{-4}-24, 13_{-4}-34; \\ &14_{-4}-14, 14_{-4}-24, 14_{-4}-34. \end{aligned}$$

Мы получили 10 типов при $s = 4$, для которых 4-изящные раскраски указаны в таблице 1, для остальных типов при $s = 4$ указаны прочерки.

Для $s = 5$ мы проведем вычисления, аналогичные случаю $s = 4$. При $s \geq 6$ такие вычисления становятся громоздкими, поэтому мы изберем другой подход. Отметим, что для исследования прочерков в таблицах нужно рассматривать только значения $s \leq 11$.

Сгенерируем теперь все 4-изящные раскраски 5-ветвей, 2-префикс которых начинается с буквы 1:

$$\begin{aligned} &1241241, 1243124, 1241324, 1241341; \\ &1324124, 1341241, 1324314, 1324134, 1342134, 1341324, 1342314, 1341341; \\ &1421324, 1431241, 1423124, 1421421, 1421341, 1421431, 1431431. \end{aligned}$$

Теперь мы можем выписать всевозможные типы 4-изящных раскрасок 5-ветвей, 2-префикс которых начинается с буквы 1:

$$\begin{aligned} &12_{-5}-41, 12_{-5}-24; \\ &13_{-5}-41, 13_{-5}-14, 13_{-5}-24, 13_{-5}-34; \\ &14_{-5}-21, 14_{-5}-31, 14_{-5}-41, 14_{-5}-24. \end{aligned}$$

Мы получили 10 типов при $s = 5$, для которых 4-изящные раскраски указаны в таблице 2, для остальных типов при $s = 5$ указаны прочерки.

Далее мы будем обосновывать прочерки в s столбцах таблиц, используя ранее обоснованные прочерки в столбцах для меньших значений s (т. е. прочерки в таблицах обосновываются “рекуррентно”).

Лемма 4. *Не существует 4-изящных раскрасок 6-ветвей следующих типов:*

$$12 \text{ }_{-6}\text{-}14, 12 \text{ }_{-6}\text{-}24, 12 \text{ }_{-6}\text{-}34;$$

$$13 \text{ }_{-6}\text{-}14, 13 \text{ }_{-6}\text{-}34; 14 \text{ }_{-6}\text{-}24, 14 \text{ }_{-6}\text{-}34.$$

Доказательство. 1) Пусть от противного существует $f \in [12 \text{ }_{-6}\text{-}14]$. Тогда $f = 12a_1a_2a_3a_414$, где $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{1, 2, 3, 4\}$. Ясно, что $a_1 = 4$, так как 123 — запрещённая тройка, т. е. $f = 124a_2a_3a_414$.

1 случай. $a_2 = 1$. Тогда $41a_3a_414 \in [41 \text{ }_{-4}\text{-}14]$, откуда, переходя к двойственному слову, получаем $[14 \text{ }_{-4}\text{-}41] \neq \emptyset$, что невозможно (см. таблицу 1, столбец при $s = 4$, тип $14 \text{ }_{-4}\text{-}14$).

2 случай. $a_2 = 3$. Тогда $43a_3a_414 \in [43 \text{ }_{-4}\text{-}14]$, откуда, переходя к двойственному слову, получаем $[12 \text{ }_{-4}\text{-}41] \neq \emptyset$, что невозможно (см. таблицу 1, столбец при $s = 4$, тип $12 \text{ }_{-4}\text{-}14$).

2) Пусть от противного существует $f \in [12 \text{ }_{-6}\text{-}24]$. Тогда f имеет вид: $f = 12a_1a_2a_3a_424$, где $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{1, 2, 3, 4\}$. Ясно, что $a_1 = 4$ и $f = 124a_2a_3a_424$.

1 случай. $a_2 = 1$. Тогда $41a_3a_424 \in [41 \text{ }_{-4}\text{-}24]$, поэтому $[14 \text{ }_{-4}\text{-}31] \neq \emptyset$, что невозможно (см. таблицу 1).

2 случай. $a_2 = 3$. Тогда $43a_3a_424 \in [43 \text{ }_{-4}\text{-}24]$, поэтому $[12 \text{ }_{-4}\text{-}31] \neq \emptyset$, что невозможно (см. таблицу 1).

Поскольку дальнейшие рассуждения в данном доказательстве ведутся аналогичным образом, мы ограничимся минимумом комментариев.

3) Пусть от противного существует $f \in [12 \text{ }_{-6}\text{-}34]$. Тогда f имеет вид: $f = 12a_1a_2a_3a_434 \Rightarrow f = 124a_2a_3a_434$.

Если $a_2 = 1$, то $41a_3a_434 \in [41 \text{ }_{-4}\text{-}34] \Rightarrow [14 \text{ }_{-4}\text{-}21] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 1).

Если $a_2 = 3$, то $43a_3a_434 \in [43 \text{ }_{-4}\text{-}34] \Rightarrow [12 \text{ }_{-4}\text{-}21] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 1).

4) Пусть от противного существует $f \in [13 \text{ }_{-6}\text{-}14]$. Тогда f имеет вид: $f = 13a_1a_2a_3a_414$.

Если $a_4 = 2$, то

$$f = 13a_1a_2a_3214 \Rightarrow 13a_1a_2a_321 \in [13 \text{ }_{-5}\text{-}21] \Rightarrow [13 \text{ }_{-5}\text{-}21] \neq \emptyset,$$

противоречие (см. таблицу 2).

Если $a_4 = 3$, то

$$f = 13a_1a_2a_3314 \Rightarrow 13a_1a_2a_331 \in [13 \text{ }_{-5}\text{-}31] \Rightarrow [13 \text{ }_{-5}\text{-}31] \neq \emptyset,$$

противоречие (см. таблицу 2).

5) Пусть от противного существует $f \in [13 \text{ }_{-6}\text{-}34]$. Тогда f имеет вид: $f = 13a_1a_2a_3a_434 \Rightarrow f = 13a_1a_2a_3134$.

Если $a_3 = 2$, то $13a_1a_221 \in [13 \text{ }_{-4}\text{-}21] \Rightarrow [13 \text{ }_{-4}\text{-}21] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 1).

Если $a_3 = 4$, то $13a_1a_241 \in [13 \text{ }_{-4}\text{-}41] \Rightarrow [13 \text{ }_{-4}\text{-}41] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 1).

6) Пусть от противного существует $f \in [14-6-24]$. Тогда f имеет вид: $f = 14a_1a_2a_3a_424$.

Если $a_1 = 2$, то $42a_2a_3a_424 \in [42-5-24] \Rightarrow [13-5-31] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 2).

Если $a_1 = 3$, то $43a_2a_3a_424 \in [43-5-24] \Rightarrow [12-5-31] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 2).

7) Пусть от противного существует $f \in [14-6-34]$. Тогда f имеет вид: $f = 14a_1a_2a_3a_434$.

Если $a_1 = 2$, то $42a_2a_3a_434 \in [42-5-34] \Rightarrow [13-5-21] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 2).

Если $a_1 = 3$, то $43a_2a_3a_434 \in [43-5-34] \Rightarrow [12-5-21] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 2). \square

Лемма 5. *Не существует 4-изящных раскрасок 7-ветвей следующих типов:*

$$12-7-21, 12-7-41;$$

$$14-7-21, 14-7-41.$$

Доказательство. 1) Пусть от противного существует $f \in [12-7-21]$. Тогда $f = 12a_1a_2a_3a_4a_521$, где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \{1, 2, 3, 4\}$, поэтому $f = 124a_2a_3a_4421$.

Если $a_2 = 1$, то $41a_3a_4421 \in [41-5-21] \Rightarrow [14-5-34] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 2).

Если $a_2 = 3$, то $43a_3a_4421 \in [43-5-21] \Rightarrow [12-5-34] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 2).

2) Пусть от противного существует $f \in [12-7-41]$. Тогда f имеет вид: $f = 12a_1a_2a_3a_4a_541$, где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \{1, 2, 3, 4\}$, поэтому $f = 124a_2a_3a_4a_541$.

Если $a_2 = 1$, то $41a_3a_4a_541 \in [41-5-41] \Rightarrow [14-5-14] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 2).

Если $a_2 = 3$, то $43a_3a_4a_541 \in [43-5-41] \Rightarrow [12-5-14] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 2).

3) Пусть от противного существует $f \in [14-7-21]$. Тогда f имеет вид: $f = 14a_1a_2a_3a_4a_521$, где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \{1, 2, 3, 4\}$, поэтому $f = 14a_1a_2a_3a_4421$.

Если $a_1 = 2$, то $42a_2a_3a_4421 \in [42-6-21]$. При $a_4 = 1$ имеем

$$42a_2a_314 \in [42-4-14] \Rightarrow [13-4-41] \neq \emptyset,$$

противоречие (см. таблицу 1); а при $a_4 = 3$ имеем

$$42a_2a_334 \in [42-4-34] \Rightarrow [13-4-21] \neq \emptyset,$$

противоречие (см. таблицу 1).

Если $a_1 = 3$, то $43a_2a_3a_4421 \in [43-6-21]$. При $a_4 = 1$ имеем

$$43a_2a_314 \in [43-4-14] \Rightarrow [12-4-41] \neq \emptyset,$$

противоречие (см. таблицу 1); а при $a_4 = 3$ имеем

$$43a_2a_334 \in [43 -_4 -34] \Rightarrow [12 -_4 -21] \neq \emptyset,$$

противоречие (см. таблицу 1).

4) Пусть от противного существует $f \in [14 -_7 -41]$. Тогда f имеет вид: $f = 14a_1a_2a_3a_4a_541$, где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Если $a_1 = 2$, то $42a_2a_3a_4a_541 \in [42 -_6 -41] \Rightarrow [13 -_6 -14] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 3).

Если $a_1 = 3$, то $43a_2a_3a_4a_541 \in [43 -_6 -41] \Rightarrow [12 -_6 -14] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 3). \square

Лемма 6. *Не существует 4-изящных раскрасок 8-ветвей следующих типов:*

$$12 -_8 -21, 12 -_8 -31;$$

$$13 -_8 -21.$$

Доказательство. 1) Пусть от противного существует $f \in [12 -_8 -21]$. Тогда $f = 12a_1a_2a_3a_4a_5a_621$, где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \{1, 2, 3, 4\}$, поэтому $f = 124a_2a_3a_4a_5a_621$.

Если $a_2 = 1$, то $41a_3a_4a_5a_621 \in [41 -_6 -21] \Rightarrow [14 -_6 -34] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 3).

Если $a_2 = 3$, то $43a_3a_4a_5a_621 \in [43 -_6 -21] \Rightarrow [12 -_6 -34] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 3).

2) Пусть от противного существует $f \in [12 -_8 -31]$. Тогда f имеет вид: $f = 12a_1a_2a_3a_4a_5a_631$, где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \{1, 2, 3, 4\}$, поэтому $f = 124a_2a_3a_4a_5a_631$.

Если $a_2 = 1$, то $41a_3a_4a_5a_631 \in [41 -_6 -31] \Rightarrow [14 -_6 -24] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 3).

Если $a_2 = 3$, то $43a_3a_4a_5a_631 \in [43 -_6 -31] \Rightarrow [12 -_6 -24] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 3).

3) Пусть от противного существует $f \in [13 -_8 -21]$. Тогда f имеет вид: $f = 13a_1a_2a_3a_4a_5a_621$, где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \{1, 2, 3, 4\}$, поэтому $f = 13a_1a_2a_3a_4a_5421$.

Если $a_5 = 1$, то $13a_1a_2a_3a_414 \in [13 -_6 -14] \Rightarrow [13 -_6 -14] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 3).

Если $a_5 = 3$, то $13a_1a_2a_3a_434 \in [13 -_6 -34] \Rightarrow [13 -_6 -34] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 3). \square

Лемма 7. *Не существует 4-изящных раскрасок 9-ветвей следующих типов:*

$$12 -_9 -14, 12 -_9 -34;$$

$$14 -_9 -34.$$

Доказательство. 1) Пусть от противного существует $f \in [12 -_9 -14]$. Тогда $f = 12a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_714$, где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \in \{1, 2, 3, 4\}$, поэтому $f = 124a_2a_3a_4a_5a_6a_714$.

Если $a_2 = 1$, то $41a_3a_4a_5a_6a_714 \in [41 - 7 - 14] \Rightarrow [14 - 7 - 41] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 1).

Если $a_2 = 3$, то $43a_3a_4a_5a_6a_714 \in [43 - 7 - 14] \Rightarrow [12 - 7 - 41] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 1).

2) Пусть от противного существует $f \in [12 - 9 - 34]$. Тогда f имеет вид: $f = 12a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_734$, где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \in \{1, 2, 3, 4\}$, поэтому $f = 12a_2a_3a_4a_5a_6a_734$.

Если $a_2 = 1$, то $41a_3a_4a_5a_6a_734 \in [41 - 7 - 34] \Rightarrow [14 - 7 - 21] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 1).

Если $a_2 = 3$, то $43a_3a_4a_5a_6a_734 \in [43 - 7 - 34] \Rightarrow [12 - 7 - 21] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 1).

3) Пусть от противного существует $f \in [14 - 9 - 34]$. Тогда f имеет вид: $f = 14a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_734$, где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \in \{1, 2, 3, 4\}$, поэтому $f = 14a_1a_2a_3a_4a_5a_6134$.

Если $a_6 = 2$, то $14a_1a_2a_3a_4a_521 \in [14 - 7 - 21] \Rightarrow [14 - 7 - 21] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 1).

Если $a_2 = 4$, то $14a_1a_2a_3a_4a_541 \in [14 - 7 - 41] \Rightarrow [14 - 7 - 41] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 1). \square

Лемма 8. *Не существует 4-изящных раскрасок 11-ветвей следующего типа:*

$$12 -_{11} - 21.$$

Доказательство. Пусть от противного существует $f \in [12 -_{11} - 21]$. Тогда $f = 12a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_921$, где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 \in \{1, 2, 3, 4\}$, поэтому $f = 12a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_921$.

Если $a_2 = 1$, то $41a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_921 \in [41 - 9 - 21] \Rightarrow [14 - 9 - 34] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 3).

Если $a_2 = 3$, то $43a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_921 \in [43 - 9 - 21] \Rightarrow [12 - 9 - 34] \neq \emptyset$, противоречие (см. таблицу 3). \square

3 4-изящные раскраски узловых компонент

Прежде чем рассматривать 4-изящные раскраски узловых компонент деревьев T с максимальной степенью вершин $\Delta = 3$, приведём необходимые определения.

Для узловой компоненты G дерева T две граничные вершины, лежащие в расширенной узловой компоненте G' будем называть *близнецами*, если смежны инцидентные им граничные рёбра.

Ясно, что при 4-изящной раскраске расширенной узловой компоненты G' для близнецов должны выполняться следующие условия *допустимости* раскраски:

- близнецы имеют разный цвет,
- если один из близнецов имеет козырный цвет 1 или 4, то другой близнец имеет ординарный цвет (см. Рис. 7)

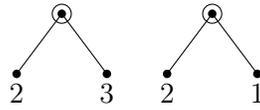


Рис. 7. Примеры допустимых раскрасок близнецов

Допустимым граничным условием для расширенной узловой компоненты G' будем называть такое распределение цветов на множестве всех граничных вершин компоненты G , при котором допустимы раскраски всех близнецов из G' (см. Рис. 8).

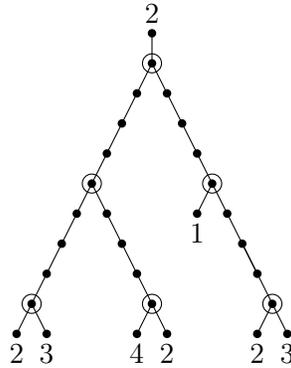


Рис. 8. Пример допустимого граничного условия для расширенной 3-компоненты

Теорема 1. Для любой расширенной узловой s -компоненты G' узловой s -компоненты G дерева T с максимальной степенью вершин $\Delta = 3$, где $s \geq 10$ и $s \neq 11$, существует такая 4-изящная раскраска, при которой все граничные вершины раскрашены в соответствии с предварительно заданным допустимым граничным условием.

Доказательство. Воспользуемся тем, что для таких s в силу леммы 1 граф s -переходов является полным двудольным графом вида $K_{6,6}$. Построим алгоритм нахождения 4-изящной раскраски расширенной узловой s -компоненты G' , отвечающей узловой s -компоненте G для фиксированного числа $s \geq 10$ и $s \neq 11$. При построении раскраски для G' будем использовать поиск в глубину в графе узлов и s -ветвей \tilde{G} , вершинами которого являются узлы из G , а ребрами — s -ветви, соединяющие узлы из G .

Если в G всего один узел, то утверждение теоремы очевидно выполняется. Поэтому будем предполагать, что в G имеется не менее двух узлов.

Зафиксируем некоторую граничную вершину v компоненты G и будем рассматривать G' в качестве корневого дерева с корнем v . Будем

раскрашивать G' , начиная с вершины v . Через u обозначим узел из G , который соединяется граничным ребром с корнем v . Граф \tilde{G} также будем рассматривать в виде корневого дерева с корнем u , поиск в глубину в \tilde{G} будем проводить из узла u .

Опишем теперь алгоритм 4-изящной раскраски для G' .

- (1) Раскрасим узел u и три смежные с ним вершины таким образом, чтобы были использованы все четыре краски 1, 2, 3, 4, граничные вершины раскрашены в соответствии с допустимым граничным условием и вершина u раскрашена в козырный цвет. Очевидно такая раскраска существует, зафиксируем ее.

Узел u поместим в стек S .

- (2) Пусть w — первая вершина в стеке S . (Отметим, что узел w и смежные с ним вершины из G' ранее при работе алгоритма раскрашены в четыре разных цвета).
- (3) Если имеется хотя бы одна не раскрашенная s -ветвь, выходящая из w , то выбираем такую s -ветвь.

Пусть w' — финальный узел выбранной s -ветви с началом в узле w .

Раскрасим узел w' и три смежные с ним вершины таким образом, чтобы были использованы все четыре краски 1, 2, 3, 4, граничные вершины раскрашены в соответствии с допустимым граничным условием и вершина u раскрашена в козырный цвет. Очевидно такая раскраска существует, зафиксируем ее.

В таблицах 1, 2 или 3 подберём 4-изящное слово для 4-изящной раскраски рассматриваемой s -ветви.

Для подбора такого слова берём 2-префикс, состоящий из краски, в которую окрашен узел w , и краски, в которую окрашена вторая вершина выбранной s -ветви (она смежна w и окрашена раньше). В качестве 2-суффикса берем краску, в которую окрашена предпоследняя вершина рассматриваемой s -ветви (эта вершина смежна w' и поэтому уже окрашена) и затем краску, в которую окрашен узел w' . В силу леммы 1 в таблицах имеется такое 4-изящное слово длины $s + 2$. Раскрашиваем рассматриваемую s -ветвь в такое слово (раскрашенная часть G' будет 4-изящно раскрашена).

После этого узел w' помещаем в стек S и переходим к выполнению шага (2).

- (4) Если не имеется не раскрашенных s -ветвей, выходящих из w , то
 - в случае $w \neq u$ удаляем w из стека S (т. е. возвращаемся от узла w к предшествующему ему узлу в процедуре поиска в глубину) и переходим к выполнению шага (2);
 - в случае $w = u$ убираем w из стека S (стек становится пустым и найдена 4-изящная раскраска для G') и Stop.

Очевидно, процесс раскраски вершин обязательно завершится и будет построена 4-изящная раскраска для G' . \square

Слабым допустимым граничным условием для расширенной узловой компоненты G' будем называть такое распределение цветов на множестве всех граничных вершин из G' , при котором допустимы раскраски всех близнецов из G' и в случае козырных красок в граничном условии указан лишь их *козырный тип* t (в дальнейшем *тип ординарных* раскрасок будем обозначать через o), а не конкретный цвет 1 или 4 (см. Рис. 9).

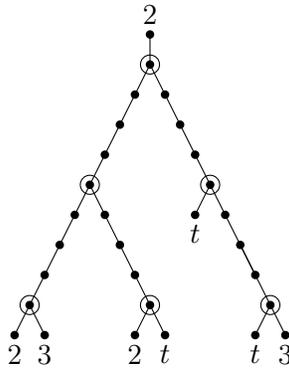


Рис. 9. Пример слабого допустимого граничного условия для расширенной 3-компоненты

Теорема 2. *Для любой расширенной узловой s -компоненты G' узловой s -компоненты G дерева T с максимальной степенью вершин $\Delta = 3$, где $s = 4, 6, 7, 8, 9, 11$, существует такая её 4-изящная раскраска, при которой все граничные вершины раскрашены в соответствии с предварительно заданным слабым допустимым граничным условием.*

Доказательство. Воспользуемся тем, что для таких s в силу лемм 2 и 3, а также двойственных к ним лемм, граф s -переходов содержит полные двудольные подграфы вида $K_{3,3}$ (они указаны в леммах).

Построим теперь алгоритм нахождения 4-изящной раскраски расширенной узловой s -компоненты G' , отвечающей узловой s -компоненте G для фиксированного числа $s = 4, 6, 7, 8, 9, 11$, аналогичный алгоритму, указанному в доказательстве теоремы 1. При построении раскраски для G' будем использовать поиск в глубину в графе узлов и s -ветвей \tilde{G} , отвечающему узловой s -компоненте G .

Алгоритм строится совершенно аналогично предыдущему, за исключением действий в (3). Теперь мы вынуждены выбирать цвет очередного узла w' в зависимости от козырного цвета t_1 узла w , который стоит в начале выбранной s -ветви, которая при поиске в ширину приводит к узлу

w' (w' стоит в конце этой s -ветви). Сначала по цвету t_1 узла w в двудольном графе s -переходов мы выбираем тот полный двудольный подграф вида $K_{3,3}$, в первой доле которого фигурирует цвет t_1 , а затем берем цвет t_2 , который фигурирует во второй доле выбранного полного двудольного графа $K_{3,3}$. Заметим, что при $s = 4, 7, 8, 11$ козырный цвет изменится при переходе от t_1 к t_2 , т. е. $t_1 \neq t_2$, а при $s = 6, 9$ он сохранится, т. е. $t_1 = t_2$. Поэтому для граничных вершин, в случае необходимости, мы можем гарантировать раскраску их в какой-то козырный цвет в соответствии со слабым допустимым граничным условием. С ординарными красками проблем нет — с их выбором все происходит точно также, как в алгоритме из теоремы 1. \square

Задача 4-изящного раскрашивания узловых s -компонент при $s = 1, 2, 3, 5$ значительно сложнее рассмотренных случаев для s . Такие компоненты могут задавать *запрещённые конфигурации* для 4-изящных деревьев, т. е. конфигурации, которые не могут содержаться в 4-изящных деревьях. Рассмотрению узловых s -компонент при $s = 1, 2, 3, 5$ будет посвящена наша следующая работа.

В заключительной части данной работы мы рассмотрим 4-изящные раскраски узловых 2-компонент дерева T с максимальной степенью вершин $\Delta = 3$ и покажем, как узловые 2-компоненты могут задавать запрещённые конфигурации для 4-изящных деревьев.

Лемма 9. *Любая расширенная узловая 2-компонента G' узловой 2-компоненты G дерева T с максимальной степенью вершин $\Delta = 3$ не имеет 4-изящных раскрасок таких, что все граничные вершины компоненты G имеют ординарный цвет.*

Доказательство. Пусть от противного расширенная узловая 2-компонента G' имеет 4-изящную раскраску такую, что все граничные вершины узловой 2-компоненты G имеют ординарный цвет. Зафиксируем некоторую такую раскраску для G' .

В G зафиксируем также узел v , который является висячей вершиной в дереве узлов и 2-ветвей \tilde{G} . Без ограничения общности с учетом двойственности для 4-изящных раскрасок будем считать, что v имеет цвет 1. Ясно, что у вершины v имеются две смежные с ней граничные вершины u_1 и u_2 узловой 2-компоненты G . Они являются близнецами и имеют различные ординарные цвета (их ординарный тип на рисунках мы договорились обозначать через o). Тогда третья вершина w_1 , смежная с узлом v , имеет цвет 4. Поскольку все граничные вершины узловой 2-компоненты G имеют ординарные цвета, вершина w_1 не является граничной вершиной. Следовательно, она принадлежит некоторой 2-ветви v, w_1, x_1, v_1 , выходящей из узла v и входящей в узел v_1 . Так как вершина w_1 имеет цвет 4, узел v_1 имеет цвет 1, а вершина x_1 имеет ординарный цвет.

Узел v_1 , кроме вершины x_1 , имеет ещё две смежные вершины y_2, w_2 . Без ограничения общности будем считать, что вершина y_2 имеет ординарный цвет, а вершина w_2 имеет цвет 4. Поэтому вершина w_2 не является граничной, следовательно, она принадлежит некоторой 2-ветви v_1, w_2, x_2, v_2 узловой 2-компоненты G .

Продолжаем указанный процесс построения 2-ветвей в узловой 2-компоненте G . Поскольку G' — дерево, повторения вершин не произойдёт, будет строиться поддерево дерева G' (см. Рис. 10).

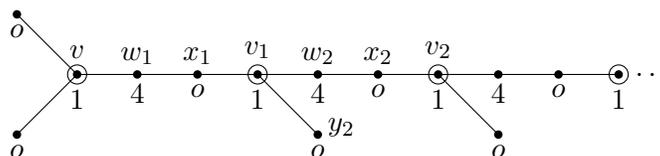


Рис. 10. Поддерево дерева G'

На некотором шаге построения строящееся поддерево будет содержать вершин больше чем дерево G' , пришли к противоречию. \square

Будем говорить, что узловая 2-компонента является *изолированной* (см. Рис. 11), если любая её граничная вершина *изолирована*, т. е. смежна некоторому узлу, не принадлежащему этой компоненте (будем говорить, что этот узел и инцидентное ему ребро, ведущее к граничной вершине, *изолируют* граничную вершину).

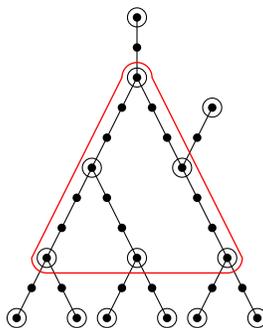


Рис. 11. Пример изолированной узловой 2-компоненты

Из леммы 9 очевидно вытекает следующая

Теорема 3. *Дерево, обладающее 4-изящной раскраской, не имеет изолированных узловых 2-компонент.*

Эта теорема говорит о том, что изолированные узловые 2-компоненты являются примерами запретных конфигураций для 4-изящных деревьев.

Лемма 10. *Любая расширенная узловая 2-компонента G' узловой 2-компоненты G дерева T с максимальной степенью вершин $\Delta = 3$ имеет 4-изящную раскраску, в которой одна наперёд заданная граничная вершина имеет козырный цвет, а остальные граничные вершины имеют ординарные цвета.*

Доказательство. Дерево G' представим в виде корневого дерева, причём в качестве корня возьмем и зафиксируем одну из граничных вершин v узловой 2-компоненты G . При построении 4-изящной раскраски для G' будем использовать поиск в ширину в графе узлов и 2-ветвей \tilde{G} , отвечающем узловой 2-компоненте G .

Если в G всего один узел, то утверждение леммы очевидно выполняется. Поэтому будем предполагать, что в G имеется не менее двух узлов.

Через u обозначим узел из G , смежный с v . Поиск в ширину в \tilde{G} будем проводить из узла u .

Опишем теперь алгоритм 4-изящной раскраски для G' .

- (1) Начнем с того, что раскрасим корень v в цвет 4. Потом раскрасим узел u из G , смежный с v , в цвет 1. Затем две вершины из G' , смежные с узлом u и отличные от v , раскрасим в ординарные цвета 2 и 3 (среди этих вершин могут быть и граничные вершины).

Узел u поместим в очередь S .

- (2) Пусть w — первая вершина в очереди S . (Отметим, что узел w и смежные ему вершины из G' ранее при работе алгоритма раскрашены в четыре разных цвета: для узлов, помещаемых в очередь на шаге (3), предпоследняя вершина 2-ветви всегда окрашена в цвет 4, а остальные, смежные с узлом вершины, окрашены в ординарные цвета.)
- (3) Если имеется хотя бы одна не раскрашенная 2-ветвь, выходящая из w , то раскрашиваем выходящие из текущего узла w все 2-ветви в соответствии с правилом раскраски а) или б), указанным на Рис. 12. В случае а) из узла w выходит одна 2-ветвь, подлежащая раскраске, в случае б) — две таких 2-ветви.

После раскраски 2-ветвей, выходящих из узла w , узлы, которыми заканчиваются вновь раскрашенные 2-ветви, отправляем в конец очереди и переходим к (2).

- (4) Если не имеется не раскрашенных 2-ветвей, выходящих из w , то
 - в случае $w \neq u$ удаляем w из очереди S (т. е. возвращаемся от узла w к предшествующему ему узлу в процедуре поиска в ширину) и переходим к (2);
 - в случае $w = u$ убираем w из очереди S (очередь становится пустой и найдена 4-изящная раскраска для G') и Stop.

Очевидно, процесс раскраски вершин обязательно завершится и будет построена 4-изящная раскраска для G' . \square

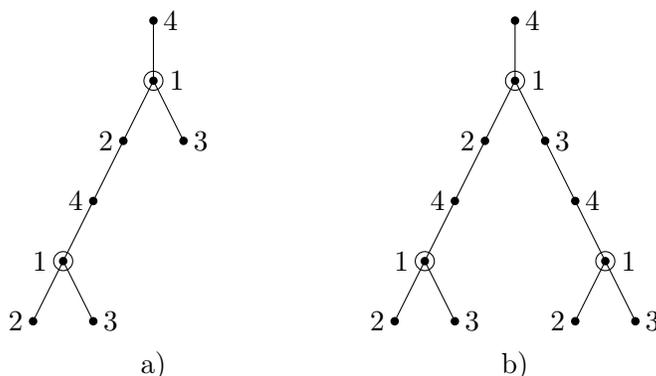


Рис. 12. Два способа раскраски для текущего узла w

Рассмотрим теперь произвольную конфигурацию H , которая является деревом с максимальной степенью вершин $\Delta = 3$ и которая устроена следующим образом. В H имеется подграф H_1 , представляющий из себя узловую 2-компоненту, и имеются выделенные узел w в H_1 и вершина v , не принадлежащая H_1 . Все граничные вершины узловой 2-компоненты H_1 , отличные от вершины v , являются изолированными в H .

Иными словами, H состоит из конфигурации H_1 , которая является узловой 2-компонентой в H , добавленной вершины v , добавленных граничных вершин, добавленных узлов и рёбер, изолирующих граничные вершины, отличные от v (пример такой конфигурации см. на Рис. 13).

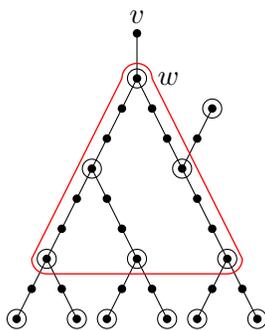


Рис. 13. Пример замка H с замочным входом vw и ключами 41, 14

Если такая конфигурация H содержится в 4-изящно раскрашенном дереве, то к ней применимы леммы 9 и 10, поэтому пара vw , где w — узел, в силу лемм 9 и 10 имеет цвета 14 или цвета 41.

Такую конфигурацию H будем называть замком с замочным входом vw и с ключами 14, 41. Из шести возможных раскрасок 21, 31, 41, 14, 24 и 34 для пары vw замка H допустимы лишь раскраски 14 и 41, которые

взаимно двойственны (т. е. с точностью до двойственности ключ единствен). Наличие замка H в дереве T при 4-изящной раскраске дерева T накладывает на раскраску вершины v жёсткое условие: вершина v имеет цвет 1, если узел w имеет цвет 4, и вершина v имеет цвет 4, если узел w имеет цвет 1.

В следующей работе будут указаны и другие виды замков с другими ключами. Будут приведены различные способы построения запрещённых конфигураций в 4-изящных деревьях с помощью замков.

В заключение отметим следующую задачу.

Задача. Изучить семейство запрещённых конфигураций в 4-изящных графах.

References

- [1] M. O. Asanov, V. A. Baranskii, and V. V. Rasin, *Discrete Mathematics: Graphs, Matroids, Algorithms*, Publ. Lan', 2010 [in Russian].
- [2] V.A. Baransky, I.A. Nasyrov, T.A. Senchonok, *4-graceful trees*, Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN, **30**:4 (2024), 34–47 [in Russian].
- [3] G. Chartrand, P. Zhang, *Chromatic Graph Theory. Discrete Mathematics and Its Applications*, Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton, 2009.
- [4] J.A. Gallian, *A dynamic survey of graph labeling*, Electron. J. Comb. DS6, Dynamic Surveys (electronic only) (1998), 43 pages.
- [5] E. English, P. Zhang, *On graceful colorings of trees*, MATHEMATICA BOHEMICA, **142**:1 (2016), 57–73.
- [6] A.D. Byers, *Graceful Colorings and Connection in Graphs*, Diss. Doct. at Western Michigan University, 2018. Dissertations. 3308.
- [7] I.N. Suparta, M. Venkathacalam, A.I. Gunadi Gede, A.C. Pratama Putu, *Graceful chromatic number of some Cartesian product graphs* Ural Math. J., **9**:2 (2023), 193–208.
- [8] D. Laavanya, S. Devi Yamini, *A structural approach to the graceful coloring of a subclass of tree* Helion, **9**:9 (2023), 10 pages.

BARANSKY VITALY ANATOLIEVICH
 URAL FEDERAL UNIVERSITY,
 LENINA AV., 51,
 620000, EKATERINBURG, RUSSIA
Email address: vitaly.baransky@urfu.ru

NASYROV ILIA ALEKSANDROVICH
 URAL FEDERAL UNIVERSITY,
 LENINA AV., 51,
 620000, EKATERINBURG, RUSSIA
Email address: ilia.nasyrov@urfu.ru

SENCCHONOK TATIANA ALEKSANDROVNA
 URAL FEDERAL UNIVERSITY,
 LENINA AV., 51,
 620000, EKATERINBURG, RUSSIA
Email address: tatiana.senchonok@urfu.ru