S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 22, № 2, стр. 100–100 (2025) УДК 517.958
https://doi.org/10.33048/semi.2025.22.??? MSC 76T30

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕХМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Д.А. Закора, Д.А. Прокудин,

Представлено П.П. Петровым

Abstract: An initial-boundary value problem for three-dimensional equations of the dynamics of incompressible multicomponent media is considered. A local existence and uniqueness theorem for a time-strong solution is proved without restrictions on the structure of the viscosity matrix, except for the standard properties of symmetry and positivity.

Keywords: mixture of viscous fluids, incompressible viscous fluid, initial-boundary value problem, existence and uniqueness theorem.

1 Введение

Приведём постановку нелинейной задачи, описывающей баротропное движение многокомпонентной вязкой сжимаемой жидкости. В работе изучается случай несжимаемых компонент смеси.

Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с C^2-гладкой границей $\partial\Omega$ заполнена гомогенной смесью нескольких вязких сжимаемых жидкостей.

Zakora, D.A., Prokudin, D.A., Solvability of non-stationary equations of three-dimensional motion of a multicomponent viscous incompressible fluid.

Исследование выполнено за счет гранта РНФ № 25-11-00056.

Поступила 30 октября 2025 г., опубликована 31 декабря 2025 г.

Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $\partial\Omega$ и направленный вне области Ω. Баротропное движение смеси $n \geqslant 2$ вязких сжимаемых жидкостей описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} &\rho_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \rho_i (\mathbf{u}_i \cdot \nabla)\mathbf{u}_i = \operatorname{div} \mathbf{T}_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + \rho_i \mathbf{f}_i, \\ &\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{u}_i) = 0, \quad (t, \boldsymbol{x}) \in [0, T] \times \Omega, \quad i = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(t, \boldsymbol{x}) = \big(u_{i1}(t, \boldsymbol{x}); u_{i2}(t, \boldsymbol{x}); u_{i3}(t, \boldsymbol{x})\big)^{\intercal}$ ($\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \Omega$) — поле скоростей i-й компоненты смеси (символом $\intercal$ обозначена операция транспонирования), $\rho_i = \rho_i(t, \boldsymbol{x})$ — плотность, $a_{ij} = a_{ji} \geqslant 0$ — коэффициенты, отвечающие за интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси, $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i(t, \boldsymbol{x})$ — известные поля внешних массовых сил. Тензоры напряжений $\mathbf{T}_i$ и тензоры вязких напряжений $\mathbf{S}_i$ определяются равенствами[1]:

$$\mathbf{T}_i := -p_i \mathbf{I}_3 + \mathbf{S}_i, \quad \mathbf{S}_i := \sum_{j=1}^{n} \big(\lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}) \mathbf{I}_3 + 2\mu_{ij} e(\mathbf{u})\big),$$

где $p_i = p_i(t, \boldsymbol{x})$ — давление в i-й компоненте смеси, $\mathbf{I}_3$ — единичная матрица в $\mathbb{R}^3$, μ_{ij}, λ_{ij} — компоненты матриц вязкостей $\mathbf{M} := \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, $\mathbf{\Lambda} := \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$. Матрицы вязкостей подчинены следующим условиям:

$$\mathbf{M} > 0, \quad 2\mathbf{M} + 3\mathbf{\Lambda} \geqslant 0.$$

Давление и плотность в каждой компоненте смеси обычно связаны некоторым уравнением состояния, а система (1) рассматривается с классическими граничными условиями прилипания, либо с условиями непротекания и нулевыми касательными напряжениями.

Система уравнений (1) — один из многих вариантов описания движения многокомпонентных жидкостных смесей и моделирует движения гомогенной смеси вязких сжимаемых жидкостей, многоскоростная модель (подробности см. в [1, 2, 3, 4]). В частности, это означает, что в каждой точке пространства присутствуют все компоненты смеси, которые находятся в одной фазе, но имеют каждая свою локальную скорость движения; взаимодействие между компонентами осуществляется через обмен импульсом и вязкое трение. При этом учёт межкомпонентного вязкого трения посредством рассмотрения недиагональных матриц вязкостей $\mathbf{M}$ и $\mathbf{\Lambda}$ во многом определяет специфику исследуемой модели динамики смесей. Если матрицы вязкостей диагональны и в (1) все

---

[1] Для векторного поля $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)^{\intercal}$ определим набор коэффициентов $e_{lk}(\mathbf{u}) := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_l}{\partial x_k} + \dfrac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)$ $(l, k = 1, 2, 3)$ тензора скоростей деформаций $e(\mathbf{u})$. Через $\operatorname{tr} e(\mathbf{u}) := \sum_{s=1}^{3} e_{ss}(\mathbf{u}) \equiv \operatorname{div}\mathbf{u}$ обозначим след матрицы $e(\mathbf{u})$.

$a_{ij} = 0$, то мы будем иметь дело с n независимыми системами уравнений Навье–Стокса для каждой компоненты.

Математическое исследование многоскоростных моделей движения многокомпонентных сред с недиагональными матрицами вязкостей началось относительно недавно. Одной из первых работ, в которой были получены результаты о разрешимости в многомерном случае, является работа J. Frehse, S. Goj и J. Málek [5]. В упомянутой работе доказана разрешимость задачи Коши для системы без конвективных членов в случае общей зависимости давлений от плотностей компонент. В [6] этими же авторами получен результат о единственности слабых решений задачи Коши при дополнительных предположениях, что массовые силы и члены, учитывающие обмен импульсом между различными компонентами равны нулю. В работе J. Frehse и W. Weigant [7] доказано существование и единственность классического решения краевой задачи для квазистационарной системы без конвективных слагаемых со специальными граничными условиями. Результаты о существовании решений с учетом конвективных слагаемых получены А.Е. Мамонтовым и Д.А. Прокудиным для многоскоростной модели в [4, 8]. Спектральный анализ некоторых линейных моделей сжимаемых вязких многокомпонентных сред проведен в [9, 10, 11].

Цель данной работы — обоснование разрешимости ранее не исследованной начально-краевой задачи о движениях смеси вязких несжимаемых жидкостей. Основные результаты изложены в теореме 1.

2 Постановка задачи и основной результат

Будем считать, что компоненты смеси — несжимаемые однородные жидкости с плотностями $\rho_i(t, \boldsymbol{x}) = \rho_i = \mathrm{const}_i > 0$. В этом случае система (1), граничные условия прилипания и начальные условия примут следующий вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla)\mathbf{u}_i = -\frac{1}{\rho_i}\nabla p_i + \frac{1}{\rho_i}\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}\Delta \mathbf{u}_j + \frac{1}{\rho_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + \mathbf{f}_i,\\ \mathrm{div}\mathbf{u}_i = 0, \quad (t, \boldsymbol{x}) \in [0, T] \times \Omega, \qquad \mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \quad (t, \boldsymbol{x}) \in [0, T] \times \partial\Omega, \\ \mathbf{u}_i(0, \boldsymbol{x}) = \mathbf{u}_i^0(\boldsymbol{x}), \quad i = 1, \dots, n.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь μ_{ij} — коэффициенты вязкостей, $a_{ij} = a_{ji} \geqslant 0$ — коэффициенты, отвечающие за интенсивность обмена импульсами между компонентами, $T > 0$. Матрица $\mathbf{M} := \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, называемая матрицей вязкостей, является симметричной и положительной: $\mathbf{M} > 0$.

Определение 1. *Поля $\mathbf{u}_i \in C^1([0, T]; \mathbf{L}_2(\Omega)) \cap C([0, T]; \mathbf{W}_2^2(\Omega))$ и функции $p_i \in C([0, T]; W_2^1(\Omega))$ $(i = 1, \dots, n)$, называются решением начально-краевой задачи (2), если в (2) выполнены начальные условия, выполнены уравнения и граничные условия при всех $t \in [0, T]$ и при п.в. $\boldsymbol{x}$.*

Обозначим $\mathbf{J}_0^1(\Omega) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \ (\boldsymbol{x} \in \Omega), \ \ \mathbf{u} = \mathbf{0} \ (\boldsymbol{x} \in \partial\Omega)\}$ (см., например, [12, гл. 2, § 2, п. 4] или [13, гл. 2, § 2.2, п. 2.2.4]). Основное содержание работы составляет следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{u}_i^0 \in \mathbf{W}_2^2(\Omega) \cap \mathbf{J}_0^1(\Omega)$ *(*$i = 1, \ldots, n$*), а поля* $\mathbf{f}_i$ *удовлетворяют локальному условию Гёльдера, т.е. для любого* $\tau > 0$ *существуют* $K_i = K_i(\tau) > 0$*,* $\kappa_i = \kappa_i(\tau) \in (0, 1]$ *такие, что*

$$\|\mathbf{f}_i(t) - \mathbf{f}_i(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant K_i|t - s|^{\kappa_i} \quad \forall\, 0 \leqslant t, s \leqslant \tau.$$

Тогда начально-краевая задача (2) *имеет единственное решение (в смысле определения 1) на некотором отрезке* $[0, T]$.

3 Корректная разрешимость задачи (2)

Исследование корректной разрешимости задачи (2) опирается на теорему П.Е. Соболевского (см. [14, теорема 7]) и аналогичные исследования уравнений однокомпонентной жидкости (см., например, [15, гл. 3, § 3.5], [16, гл 2, § 15, п. 15.19]). Задача (2) сначала трактуется как задача Коши для нелинейного операторного уравнения в подходящем гильбертовом пространстве, затем применяется указанная теорема.

3.1. Операторная трактовка задачи. Введём гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(\Omega)$ с обычным скалярным произведением и нормой

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} \mathbf{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \overline{\mathbf{v}(\boldsymbol{x})}\, d\Omega, \quad \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} |\mathbf{u}(\boldsymbol{x})|^2\, d\Omega.$$

Для пространства $\mathbf{L}_2(\Omega)$ справедливо разложение Г. Вейля в ортогональную сумму соленоидальных полей с нулевой нормальной составляющей на границе и потенциальных полей (см., например, [12, гл. 2, § 1, формула (1.18)]):

$$\mathbf{L}_2(\Omega) = \mathbf{J}_0(\Omega) \oplus \mathbf{G}(\Omega),$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_0(\Omega) &:= \big\{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \ \ (\boldsymbol{x} \in \Omega), \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \ \ (\boldsymbol{x} \in \partial\Omega)\big\},\\
\mathbf{G}(\Omega) &:= \big\{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega) : \mathbf{u} = \nabla p\big\}.
\end{aligned}$$

Здесь операции дивергенции и нормальной составляющей на границе понимаются в смысле теории обобщённых функций (см. [12, гл. 2, § 1, п. 6]).

Будем считать далее, что поля $\mathbf{u}_i$, ∇p_i $(i = 1, \ldots, n)$ зависят от переменной t и принимают значения в $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Тогда $\mathbf{u}_i(t) \in \mathbf{J}_0(\Omega)$ в силу уравнений неразрывности и граничных условий из (2), а $\nabla p_i(t) \in \mathbf{G}(\Omega)$, очевидно, при каждом $t \geqslant 0$. Введём ортопроекторы P_0 и P_G пространства $\mathbf{L}_2(\Omega)$ на подпространства $\mathbf{J}_0(\Omega)$ и $\mathbf{G}(\Omega)$ соответственно. Применяя к уравнениям импульсов из (2) поочерёдно ортопроекторы P_0 и P_G, получим следующие соотношения:

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} + P_0(\mathbf{u}_i \cdot \nabla)\mathbf{u}_i = \frac{1}{\rho_i}\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}P_0\Delta\mathbf{u}_j + \frac{1}{\rho_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + P_0\mathbf{f}_i(t), \quad (3)$$

$$P_G(\mathbf{u}_i \cdot \nabla)\mathbf{u}_i = -\frac{1}{\rho_i}\nabla p_i + \frac{1}{\rho_i}\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}P_G\Delta\mathbf{u}_j + P_G\mathbf{f}_i, \quad i = 1, \ldots, n. \quad (4)$$

Из соотношений (4) по известным полям $\mathbf{u}_i$ и заданным полям $\mathbf{f}_i$ можно восстановить поля ∇p_i $(i = 1, \ldots, n)$, поэтому далее будем изучать только соотношения (3).

Введём оператор Стокса A — расширение по Фридрихсу оператора $-P_0\Delta$, определённого на гладких полях из $\mathbf{J}_0(\Omega)$ с условием прилипания на границе $\partial\Omega$ области Ω (см., например, [12, гл. 2, § 2, п. 6] или [13, гл. 2, § 2.2, п. 2.2.5]). Оператор A самосопряжён и положительно определён, а его спектр дискретен. Из [17, гл. 3, § 5, теорема 2] следует, что если граница $\partial\Omega$ класса C^2, то область определения оператора Стокса имеет вид $\mathcal{D}(A) = \mathbf{W}_2^2(\Omega) \cap \mathbf{J}_0^1(\Omega)$.

С использованием оператора Стокса уравнения (3) вместе с начальными условиями из (2) перепишем в виде начальной задачи для системы операторных уравнений в гильбертовом пространстве $\mathbf{J}_0(\Omega)$:

$$\begin{gathered}\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} + \frac{1}{\rho_i}\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}A\mathbf{u}_j = -P_0(\mathbf{u}_i \cdot \nabla)\mathbf{u}_i + \frac{1}{\rho_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + P_0\mathbf{f}_i(t), \\ \mathbf{u}_i(0) = \mathbf{u}_i^0, \quad i = 1, \ldots, n.\end{gathered} \quad (5)$$

Введём гильбертово пространство

$$\mathcal{H} := \oplus_{i=1}^{n}\mathbf{J}_0(\Omega) = \left\{\xi := (\mathbf{u}_1; \ldots; \mathbf{u}_n)^{\mathsf{T}} : \ \mathbf{u}_i \in \mathbf{J}_0(\Omega), \ \ i = 1, \ldots, n\right\}$$

с обычным скалярным произведением и соответствующей нормой. Введём ряд обозначений и операторов, связанных с (5):

$$\begin{gathered}\xi^0 := \left(\mathbf{u}_1^0; \ldots; \mathbf{u}_n^0\right)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{H}, \quad \mathcal{F}(t) := \left(P_0\mathbf{f}_1(t); \ldots; P_0\mathbf{f}_n(t)\right)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{H}, \\ \mathcal{R}\xi := \left\{\delta_{ij}\rho_j I\right\}_{i,j=1}^{n}\xi, \quad \mathcal{M}\xi := \left\{\mu_{ij}I\right\}_{i,j=1}^{n}\xi, \quad \mathcal{A}\xi := \left\{\delta_{ij}A\right\}_{i,j=1}^{n}\xi, \\ \mathcal{S}(\xi) := \left(P_0(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)\mathbf{u}_1; \ldots; P_0(\mathbf{u}_n \cdot \nabla)\mathbf{u}_n\right)^{\mathsf{T}}, \\ \mathcal{B}\xi := \Big(-\sum_{j=1}^{n}a_{1j}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_1); \ldots; -\sum_{j=1}^{n}a_{nj}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_n)\Big)^{\mathsf{T}}.\end{gathered} \quad (6)$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, I — единичный оператор в $\mathbf{J}_0(\Omega)$, оператор $\mathcal{A}$ определён на естественной области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \oplus_{i=1}^{n}\mathcal{D}(A)$.

Легко видеть, что оператор $\mathcal{R}$ является ограниченным[2], т.е. $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, самосопряженным и положительно определённым в $\mathcal{H}$. Обозначим через

[2] Через $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ обозначена алгебра линейных ограниченных из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$ операторов, определённых на всём пространстве $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{L}(\mathcal{H}) := \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

$\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ энергетическое пространство оператора $\mathcal{R}$. Пространства $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ поэлементно совпадают, а нормы в них эквивалентны.

Систему уравнений и начальных условий (5) теперь можно трактовать как задачу Коши в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$:

$$\frac{d\xi}{dt} + \mathcal{A}_0\xi = \mathcal{N}(t,\xi), \quad \xi(0) = \xi^0, \tag{7}$$

$$\mathcal{A}_0 := \mathcal{R}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{A}, \quad \mathcal{N}(t,\xi) := -\mathcal{S}(\xi) - \mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}\xi + \mathcal{F}(t). \tag{8}$$

Определение 2. *Функция ξ называется решением задачи Коши (7), если $\xi \in C^1([0,T];\mathcal{H})$, $\xi(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при всех $t \in [0,T]$, $\mathcal{A}\xi \in C([0,T];\mathcal{H})$, выполнено уравнение из (7) при всех $t \in [0,T]$ и начальное условие.*

3.2. Свойства оператора $\mathcal{A}_0$. Пусть $\mathbf{Q} := \{q_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — матрица, действующая в $\mathbb{C}^n$. Поставим ей в соответствие оператор $\mathcal{Q} := \{q_{ij}I\}_{i,j=1}^n$, действующий в $\mathcal{H}$. Будем писать при этом $\mathbf{Q} \longleftrightarrow \mathcal{Q}$.

Лемма 1. *Пусть $\det \mathbf{Q} \neq 0$ и $\mathbf{Q} \longleftrightarrow \mathcal{Q}$. Тогда операторы $\mathcal{Q}\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\mathcal{Q}$ замкнуты на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{Q}\mathcal{A}\xi = \mathcal{A}\mathcal{Q}\xi$ для любых $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.*

Доказательство. 1) Покажем, что оператор $\mathcal{Q}\mathcal{A}$ замкнут на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Оператор $\mathcal{A}$, в силу своей диагональной структуры, замкнут на своей естественной области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \oplus_{i=1}^n \mathcal{D}(A)$. Очевидно, что оператор $\mathcal{Q}$ ограничен, то есть $\mathcal{Q} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, поскольку все коэффициенты операторной матрицы $\mathcal{Q}$ пропорциональны единичным операторам I. Из $\det \mathbf{Q} \neq 0$ следует, что существует $\mathcal{Q}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Отсюда следует (см., например, [18, гл. 3, § 5, п. 5.2, задача 5.7]), что оператор $\mathcal{Q}\mathcal{A}$ замкнут на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Действительно, пусть $\xi_n \longrightarrow \xi$ ($\xi_n \in \mathcal{D}(\mathcal{Q}\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{A})$), $\mathcal{Q}\mathcal{A}\xi_n \longrightarrow \zeta$. Последнее соотношение перепишем в эквивалентной форме $\mathcal{A}\xi_n \longrightarrow \mathcal{Q}^{-1}\zeta$. Отсюда и из замкнутости оператора $\mathcal{A}$ следует, что $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{A}\xi = \mathcal{Q}^{-1}\zeta$ или, что то же, $\mathcal{Q}\mathcal{A}\xi = \zeta$.

2) Покажем, что оператор $\mathcal{A}\mathcal{Q}$ замкнут на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Оператор $\mathcal{A}\mathcal{Q}$ задан на естественной области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{Q}) := \{\xi \in \mathcal{H} : \ \mathcal{Q}\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})\}$ и замкнут на ней. Действительно, пусть $\xi_n \longrightarrow \xi$ ($\xi_n \in \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{Q})$), $\mathcal{A}\mathcal{Q}\xi_n \longrightarrow \zeta$. Учитывая ограниченность оператора $\mathcal{Q}$, из этих условий следует формулировка: $\mathcal{Q}\xi_n \longrightarrow \mathcal{Q}\xi$ ($\mathcal{Q}\xi_n \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$), $\mathcal{A}(\mathcal{Q}\xi_n) \longrightarrow \zeta$. Отсюда и из замкнутости оператора $\mathcal{A}$ следует, что $\mathcal{Q}\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (или $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{Q})$) и $\mathcal{A}\mathcal{Q}\xi = \zeta$.

Покажем, что $\mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{Q}) = \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Пусть $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Учитывая структуру оператора $\mathcal{Q}$ и то, что область определения $\mathcal{D}(A)$ оператора Стокса A линейное множество, получим, что $\mathcal{Q}\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, а значит, $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{Q})$. Пусть теперь $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{Q})$, то есть $\mathcal{Q}\xi =: \zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Тогда рассуждая как и выше, получим, что $\xi = \mathcal{Q}^{-1}\zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, а значит, $\mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{Q}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

3) Равенство $\mathcal{Q}\mathcal{A}\xi = \mathcal{A}\mathcal{Q}\xi$ для любых $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ проверяется непосредственно. □

Лемма 2. *Оператор $\mathcal{A}_0 = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{A}$ с $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(\mathcal{A})$ самосопряжён и положительно определён в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$.*

Доказательство. 1) Покажем, что оператор $\mathcal{MA}$ самосопряжён в $\mathcal{H}$. Действительно, из $\mathcal{M} = \mathcal{M}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ следует (см. [18, гл. 3, § 5, задача 5.26]), что $(\mathcal{MA})^* = \mathcal{A}^*\mathcal{M}^* = \mathcal{AM}$ на $\mathcal{D}((\mathcal{MA})^*) = \mathcal{D}(\mathcal{AM})$. Из $\det \mathbf{M} \neq 0$ и леммы 1 следует, что $\mathcal{AM} = \mathcal{MA}$ на $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{MA}) = \mathcal{D}(\mathcal{AM})$.

Далее, оператор $\mathcal{R}^{-1}\mathcal{MA}$ самосопряжён в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{R}$ оператора $\mathcal{R}$. Действительно, учитывая $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*, \mathcal{R}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, имеем для любых $\xi, \zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{MA})$:

$$\left(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{MA}\xi, \zeta\right)_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} = \left(\mathcal{MA}\xi, \zeta\right)_{\mathcal{H}} = \left(\mathcal{R}\xi, \mathcal{R}^{-1}\mathcal{MA}\zeta\right)_{\mathcal{H}} = \left(\xi, \mathcal{R}^{-1}\mathcal{MA}\zeta\right)_{\mathcal{H}_\mathcal{R}}.$$

2) Покажем, что оператор $\mathcal{R}^{-1}\mathcal{MA}$ положительно определён в $\mathcal{H}_\mathcal{R}$.

Обозначим через $\lambda_j(\mathbf{M})$, $\varphi_j(\mathbf{M})$ $(j = 1, \dots, n)$ собственные значения и соответствующие им собственные векторы матрицы $\mathbf{M}$. Координаты собственных векторов можно считать действительными, а сама система $\{\varphi_j(\mathbf{M})\}_{j=1}^n$ есть ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$, так как матрица вязкостей $\mathbf{M}$ положительна по условию. Обозначим через $\mathbf{M}_\varphi = \mathbf{M}_\varphi(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ матрицу, столбцами которой являются собственные векторы матрицы $\mathbf{M}$. Тогда имеют место равенства $\mathbf{M}_\varphi^\intercal = \mathbf{M}_\varphi^*$, $\mathbf{M}_\varphi^*\mathbf{M}_\varphi = \mathbf{M}_\varphi\mathbf{M}_\varphi^* = \mathbf{I}_n$, где $\mathbf{I}_n$ — единичная матрица в $\mathbb{C}^n$, $\mathbf{M}_\varphi^*\mathbf{M}\mathbf{M}_\varphi = \{\delta_{ij}\lambda_j(\mathbf{M})\}_{i,j=1}^n$. Положим $\mathbf{M}_\varphi \longleftrightarrow \mathcal{M}_\varphi$. Тогда $\mathcal{M}_\varphi^*\mathcal{M}_\varphi = \mathcal{M}_\varphi\mathcal{M}_\varphi^* = \mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ — единичный оператор в $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}_\varphi^*\mathcal{M}\mathcal{M}_\varphi = \{\delta_{ij}\lambda_j(\mathbf{M})I\}_{i,j=1}^n$.

Для любого $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{MA})$ с учётом леммы 1 теперь имеем

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{MA}\xi, \xi\right)_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} &= \left(\mathcal{MA}\xi, \xi\right)_{\mathcal{H}} = (\mathcal{MA}\mathcal{M}_\varphi\mathcal{M}_\varphi^*\xi, \mathcal{M}_\varphi\mathcal{M}_\varphi^*\xi)_\mathcal{H} = \\
&= \left((\mathcal{M}_\varphi^*\mathcal{M}\mathcal{M}_\varphi)\mathcal{A}\mathcal{M}_\varphi^*\xi, \mathcal{M}_\varphi^*\xi\right)_\mathcal{H} = \left(\{\delta_{ij}\lambda_j(\mathbf{M})A\}_{i,j=1}^n\mathcal{M}_\varphi^*\xi, \mathcal{M}_\varphi^*\xi\right)_\mathcal{H} = \\
&\geqslant \lambda_1(A) \min_{j=1,\dots,n} \lambda_j(\mathbf{M})(\mathcal{M}_\varphi^*\xi, \mathcal{M}_\varphi^*\xi)_\mathcal{H} = \lambda_1(A) \min_{j=1,\dots,n} \lambda_j(\mathbf{M})(\xi, \xi)_\mathcal{H} \geqslant \\
&\geqslant \lambda_1(A) \min_{j=1,\dots,n} \lambda_j(\mathbf{M}) \min_{j=1,\dots,n} \rho_j^{-1}(\mathcal{R}\xi, \xi)_\mathcal{H} \geqslant \\
&= \lambda_1(A) \min_{j=1,\dots,n} \lambda_j(\mathbf{M}) \min_{j=1,\dots,n} \rho_j^{-1}(\xi, \xi)_{\mathcal{H}_\mathcal{R}},
\end{aligned}$$

а значит, оператор $\mathcal{A}_0 = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{MA}$ положительно определён в $\mathcal{H}_\mathcal{R}$. □

3.3. Вспомогательные предложения и разрешимость задачи (7). По лемме 2 оператор $\mathcal{A}_0$ самосопряжен и положительно определён в $\mathcal{H}_\mathcal{R}$. Приведём формулировку теоремы П.Е. Соболевского [14, теорема 7] (см. также [15, гл. 3, § 3.3, теорема 3.3.3] или [16, гл. 2, § 15, лемма 15.23]), адаптированную к задаче (7).

Предложение 1 (см. [14], теорема 7). *Пусть $\alpha \in [0, 1)$ и $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0^\beta)$ при некотором $\beta > \alpha$, и пусть $\|\mathcal{A}_0^\alpha\xi^0\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} < r$. Предположим, что для любого $\tau > 0$ существуют $C = C(r, \tau) > 0$ и $\kappa = \kappa(r, \tau) \in (0, 1]$ такие, что*

$$\|\mathcal{N}(t, \xi_1) - \mathcal{N}(s, \xi_1)\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} \leqslant C\left(|t - s|^\kappa + \|\mathcal{A}_0^\alpha(\xi_1 - \xi_2)\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}}\right) \tag{9}$$

при любых $0 \leqslant t, s \leqslant \tau$, $\|\mathcal{A}_0^\alpha\xi_i\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} \leqslant r$ $(i = 1, 2)$. Тогда задача (7) имеет единственное непрерывное на $[0, T]$ и непрерывно дифференцируемое на

$(0,T]$ *решение при некотором* $T>0$. *Если* $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$, *то это решение непрерывно дифференцируемо и при* $t=0$.

Для исследования нелинейного оператора $\mathcal{N}(t,\cdot)$ понадобится следующее утверждение (см. [15, гл. 3, § 3.8] или [16, гл. 2, § 15, п. 15.25]).

Предложение 2. *Для любого* $3/4<\alpha<1$ *существует* $C_\alpha>0$ *такая, что для любых* $\mathbf{u}_1 \in \mathcal{D}(A^\alpha)$, $\mathbf{u}_2 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ *имеет место оценка*

$$\|P_0(\mathbf{u}_1\cdot\nabla)\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant C_\alpha \|A^\alpha \mathbf{u}_1\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \|A^{1/2}\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}.$$

Обозначим через $T_{\mathcal{H}_\mathcal{R}\to\mathcal{H}}$ оператор вложения пространства $\mathcal{H}_\mathcal{R}$ в $\mathcal{H}$, а через $T_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}_\mathcal{R}}$ оператор вложения пространства $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}_\mathcal{R}$. Поскольку пространства $\mathcal{H}_\mathcal{R}$ и $\mathcal{H}$ поэлементно совпадают, указанные операторы ставят в соответствие элементу пространства $\mathcal{H}_\mathcal{R}$ или $\mathcal{H}$ его же, но в пространстве $\mathcal{H}$ или $\mathcal{H}_\mathcal{R}$ соответственно.

Лемма 3. *Имеют место следующие оценки*

$$\|T_{\mathcal{H}_\mathcal{R}\to\mathcal{H}}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\mathcal{R},\mathcal{H})} \leqslant \|\mathcal{R}^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}, \quad \|T_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}_\mathcal{R}}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H}_\mathcal{R})} \leqslant \|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}.$$

Доказательство. Указанные неравенства следуют из следующих элементарных оценок:

$$\|T_{\mathcal{H}_\mathcal{R}\to\mathcal{H}}\xi\|_\mathcal{H} = \|\xi\|_\mathcal{H} = \|\mathcal{R}^{-1/2}\mathcal{R}^{1/2}\xi\|_\mathcal{H} \leqslant \|\mathcal{R}^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\|\xi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} \quad \forall\, \xi \in \mathcal{H}_\mathcal{R},$$
$$\|T_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}_\mathcal{R}}\xi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} = \|\xi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} = \|\mathcal{R}^{1/2}\xi\|_\mathcal{H} \leqslant \|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\|\xi\|_\mathcal{H} \quad \forall\, \xi \in \mathcal{H}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 4. *Пусть* $\alpha \in [0,1]$. *Тогда* $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0^\alpha) = \mathcal{D}(\mathcal{A}^\alpha)$ *и*

$$\|\mathcal{A}^\alpha T_{\mathcal{H}_\mathcal{R}\to\mathcal{H}}\xi\|_\mathcal{H} \leqslant \|\mathcal{R}^{-1/2}\|^{1-\alpha}_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\|\mathcal{M}^{-1}\mathcal{R}^{1/2}\|^\alpha_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\|\mathcal{A}_0^\alpha\xi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} \quad \forall\, \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0^\alpha),$$
$$\|\mathcal{A}_0^\alpha T_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}_\mathcal{R}}\xi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} \leqslant \|\mathcal{R}^{1/2}\|^{1-\alpha}_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\|\mathcal{R}^{-1/2}\mathcal{M}\|^\alpha_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\|\mathcal{A}^\alpha\xi\|_\mathcal{H} \quad \forall\, \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\alpha).$$

Доказательство. 1) Пусть $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Тогда

$$\|\mathcal{A}T_{\mathcal{H}_\mathcal{R}\to\mathcal{H}}\xi\|_\mathcal{H} = \|\mathcal{M}^{-1}\mathcal{R}^{1/2}\big(\mathcal{R}^{1/2}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{A}\xi\big)\|_\mathcal{H}$$
$$\leqslant \|\mathcal{M}^{-1}\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\|\mathcal{R}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{A}\xi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} = \|\mathcal{M}^{-1}\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\|\mathcal{A}_0\xi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}},$$

а значит, формально $T_{\mathcal{H}_\mathcal{R}\to\mathcal{H}}\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Из леммы 3, последней оценки и неравенства Гайнца (см. [19, гл. 1, § 7, теорема 7.1]) следует первая оценка в лемме.

2) Пусть $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Тогда

$$\|\mathcal{A}_0 T_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}_\mathcal{R}}\xi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} = \|\mathcal{R}^{1/2}\big(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{A}\xi\big)\|_\mathcal{H} \leqslant \|\mathcal{R}^{-1/2}\mathcal{M}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\|\mathcal{A}\xi\|_\mathcal{H},$$

а значит, формально $T_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}_\mathcal{R}}\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$. Из леммы 3, последней оценки и неравенства Гайнца следует вторая оценка в лемме. □

Лемма 5. *Пусть для любого* $\tau>0$ *существуют* $K_i = K_i(\tau) > 0$, $\kappa_i = \kappa_i(\tau) \in (0,1]$ *такие, что*

$$\|\mathbf{f}_i(t)-\mathbf{f}_i(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant K_i|t-s|^{\kappa_i} \quad \forall\, 0\leqslant t,s\leqslant\tau, \quad i=1,\dots,n.$$

Зафиксируем $3/4 < \alpha < 1$. *Тогда для любого* $r > 0$ *существуют такие константы* $C = C(r,\tau) > 0$ *и* $\kappa = \kappa(r,\tau) \in (0,1]$, *что*

$$\|\mathcal{N}(t,\xi_1) - \mathcal{N}(s,\xi_1)\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} \leqslant C\big(|t-s|^\kappa + \|\mathcal{A}_0^\alpha(\xi_1 - \xi_2)\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}}\big)$$

при любых $0 \leqslant t, s \leqslant \tau$, $\|\mathcal{A}_0^\alpha \xi_i\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} \leqslant r$ *(*$i = 1,2$*).*

Доказательство. Фиксируем $3/4 < \alpha < 1$ и $r > 0$.

1) Пусть $\xi = (\mathbf{u}_1;\ldots;\mathbf{u}_n)^\intercal \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0^\alpha)$ такой, что $\|\mathcal{A}_0^\alpha \xi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} \leqslant r$. Тогда

$$\|A^\alpha \mathbf{u}_i\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant r\|\mathcal{R}^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{1-\alpha}\|\mathcal{M}^{-1}\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{\alpha}, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{10}$$

Действительно, с учётом леммы 4 имеем оценки

$$\begin{aligned} r \geqslant \|\mathcal{A}_0^\alpha \xi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} &\geqslant \|\mathcal{R}^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{\alpha-1}\|\mathcal{M}^{-1}\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-\alpha}\|\mathcal{A}^\alpha \xi\|_{\mathcal{H}} = \\ &= \|\mathcal{R}^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{\alpha-1}\|\mathcal{M}^{-1}\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-\alpha}\sqrt{\sum_{i=1}^n \|A^\alpha \mathbf{u}_i\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2} \geqslant \\ &\geqslant \|\mathcal{R}^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{\alpha-1}\|\mathcal{M}^{-1}\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-\alpha}\|A^\alpha \mathbf{u}_i\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}, \quad i = 1,\ldots,n. \end{aligned}$$

2) Пусть $\xi_i = (\mathbf{u}_1^{(i)};\ldots;\mathbf{u}_n^{(i)})^\intercal \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0^\alpha)$ такие, что $\|\mathcal{A}_0^\alpha \xi_i\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} \leqslant r$ $(i = 1,2)$. С использованием (10) и предложения 2 оценим (см. (6))

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{S}(\xi_1) - \mathcal{S}(\xi_2)\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \big\|P_0(\mathbf{u}_i^{(1)}\cdot\nabla)\mathbf{u}_i^{(1)} - P_0(\mathbf{u}_i^{(2)}\cdot\nabla)\mathbf{u}_i^{(2)}\big\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2} \leqslant \\ &\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n \big\|\big(\mathbf{u}_i^{(1)}\cdot\nabla\big)\big(\mathbf{u}_i^{(1)} - \mathbf{u}_i^{(2)}\big) + \big((\mathbf{u}_i^{(1)} - \mathbf{u}_i^{(2)})\cdot\nabla\big)\mathbf{u}_i^{(2)}\big\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2} \leqslant \\ &\leqslant C_\alpha\bigg(\sum_{i=1}^n \Big(\big\|A^\alpha \mathbf{u}_i^{(1)}\big\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\cdot\big\|A^{1/2}\big(\mathbf{u}_i^{(1)} - \mathbf{u}_i^{(2)}\big)\big\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + \\ &\qquad\qquad + \big\|A^\alpha(\mathbf{u}_i^{(1)} - \mathbf{u}_i^{(2)})\big\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\cdot\big\|A^{1/2}\mathbf{u}_i^{(2)}\big\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\Big)^2\bigg)^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant C_\alpha\|A^{1/2-\alpha}\|\sqrt{\sum_{i=1}^n \Big(\big\|A^\alpha \mathbf{u}_i^{(1)}\big\| + \big\|A^\alpha \mathbf{u}_i^{(2)}\big\|\Big)^2\big\|A^\alpha(\mathbf{u}_i^{(1)} - \mathbf{u}_i^{(2)})\big\|^2} \leqslant \\ &\leqslant 2rC_\alpha\|\mathcal{R}^{-1/2}\|^{1-\alpha}\|\mathcal{M}^{-1}\mathcal{R}^{1/2}\|^{\alpha}\|A^{1/2-\alpha}\|\sqrt{\sum_{i=1}^n \big\|A^\alpha(\mathbf{u}_i^{(1)} - \mathbf{u}_i^{(2)})\big\|^2} = \\ &= 2rC_\alpha\|\mathcal{R}^{-1/2}\|^{1-\alpha}\|\mathcal{M}^{-1}\mathcal{R}^{1/2}\|^{\alpha}\|A^{1/2-\alpha}\|\cdot\|\mathcal{A}^\alpha(\xi_1 - \xi_2)\|_{\mathcal{H}} \leqslant \\ &= 2rC_\alpha\|\mathcal{R}^{-1/2}\|^{2-2\alpha}\|\mathcal{M}^{-1}\mathcal{R}^{1/2}\|^{2\alpha}\|A^{1/2-\alpha}\|\cdot\|\mathcal{A}_0^\alpha(\xi_1 - \xi_2)\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}}. \end{aligned} \tag{11}$$

3) Учитывая, что $\|P_0\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega))} = 1$, проведём оценку (см. (6))

$$\|\mathcal{F}(t) - \mathcal{F}(s)\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} \leqslant \|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|\mathcal{F}(t) - \mathcal{F}(s)\|_{\mathcal{H}} =$$
$$= \|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sqrt{\sum_{i=1}^n \|P_0\mathbf{f}_i(t) - P_0\mathbf{f}_i(s)\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}} \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\mathbf{f}_i(t) - \mathbf{f}_i(s)\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}} \leqslant \|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sqrt{\sum_{i=1}^n K_i^2 |t-s|^{2\kappa_i}} =$$
$$= \|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sqrt{\sum_{i=1}^n K_i^2 |t-s|^{2(\kappa_i - \min\limits_{j=1,\ldots,n} \kappa_j)}} \cdot |t-s|^{\min\limits_{j=1,\ldots,n} \kappa_j} \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sqrt{\sum_{i=1}^n K_i^2 \tau^{2(\kappa_i - \min\limits_{j=1,\ldots,n} \kappa_j)}} \cdot |t-s|^{\min\limits_{j=1,\ldots,n} \kappa_j} \ \forall\, 0 \leqslant t, s \leqslant \tau. \quad (12)$$

4) Из (11), (12) теперь найдём, что (см. (8))

$$\|\mathcal{N}(t,\xi_1) - \mathcal{N}(s,\xi_1)\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} =$$
$$= \| - \mathcal{S}(\xi_1) - \mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}\xi_1 + \mathcal{F}(t) + \mathcal{S}(\xi_2) + \mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}\xi_2 + \mathcal{F}(s)\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathcal{S}(\xi_1) - S(\xi_2)\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} + \|\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}(\xi_1 - \xi_2)\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} + \|\mathcal{F}(t) - \mathcal{F}(s)\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} \leqslant$$
$$\leqslant 2rC_\alpha \|\mathcal{R}^{-1/2}\|^{2-2\alpha} \|\mathcal{M}^{-1}\mathcal{R}^{1/2}\|^{2\alpha} \|A^{1/2-\alpha}\| \cdot \|\mathcal{A}_0^\alpha(\xi_1 - \xi_2)\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} +$$
$$+ \|\mathcal{R}^{-1/2}\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \cdot \|\xi_1 - \xi_2\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} +$$
$$+ \|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sqrt{\sum_{i=1}^n K_i^2 \tau^{2(\kappa_i - \min\limits_{j=1,\ldots,n} \kappa_j)}} \cdot |t-s|^{\min\limits_{j=1,\ldots,n} \kappa_j} \leqslant$$
$$\leqslant 2rC_\alpha \|\mathcal{R}^{-1/2}\|^{2-2\alpha} \|\mathcal{M}^{-1}\mathcal{R}^{1/2}\|^{2\alpha} \|A^{1/2-\alpha}\| \cdot \|\mathcal{A}_0^\alpha(\xi_1 - \xi_2)\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} +$$
$$+ \|\mathcal{R}^{-1/2}\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|\mathcal{A}_0^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\mathcal{R})} \cdot \|\mathcal{A}_0^\alpha(\xi_1 - \xi_2)\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}} +$$
$$+ \|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sqrt{\sum_{i=1}^n K_i^2 \tau^{2(\kappa_i - \min\limits_{j=1,\ldots,n} \kappa_j)}} \cdot |t-s|^{\min\limits_{j=1,\ldots,n} \kappa_j} \leqslant$$
$$\leqslant C\big(|t-s|^\kappa + \|\mathcal{A}_0^\alpha(\xi_1 - \xi_2)\|_{\mathcal{H}_\mathcal{R}}\big),$$

где $\kappa = \kappa(r,\tau) := \min\limits_{j=1,\ldots,n} \kappa_j(\tau) \in (0,1]$, а

$$C = C(r,\tau) := \max\Big\{ 2rC_\alpha \|\mathcal{R}^{-1/2}\|^{2-2\alpha} \|\mathcal{M}^{-1}\mathcal{R}^{1/2}\|^{2\alpha} \|A^{1/2-\alpha}\| +$$
$$+ \|\mathcal{R}^{-1/2}\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|\mathcal{A}_0^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\mathcal{R})},$$
$$\|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sqrt{\sum_{i=1}^n K_i^2 \tau^{2(\kappa_i - \min\limits_{j=1,\ldots,n} \kappa_j)}} \Big\} > 0.$$

Лемма доказана. □

Лемма 6. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда начально-краевая задача (2) имеет единственное решение (в смысле определения 1) на некотором отрезке* $[0, T]$.

Доказательство. Условия $\mathbf{u}_i^0 \in \mathbf{W}_2^2(\Omega) \cap \mathbf{J}_0^1(\Omega)$ $(i = 1, \dots, n)$ эквивалентны тому, что $\mathbf{u}_i^0 \in \mathcal{D}(A)$ $(i = 1, \dots, n)$, как отмечено при введении оператора Стокса. Следовательно, $\xi^0 := \big(\mathbf{u}_1^0; \dots; \mathbf{u}_n^0\big)^\intercal \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ (см. (6) и лемму 2).

Если поля $\mathbf{f}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ удовлетворяют локальному условию Гёльдера, то по лемме 5 нелинейный оператор $\mathcal{N}(t, \cdot)$ удовлетворяет (9).

Из предложения 1, учитывая $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, теперь следует, что задача (7) имеет единственное непрерывно дифференцируемое на $[0, T]$ решение при некотором $T > 0$. Это означает, что $\xi \in C^1([0, T]; \mathcal{H})$, $\xi(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при всех $t \in [0, T]$ и $\mathcal{A}\xi \in C([0, T]; \mathcal{H})$, функция $\xi(t)$ удовлетворяет уравнению из (7) при всех $t \in [0, T]$ и начальному условию. Последнее эквивалентно тому, что $\mathbf{u}_i \in C^1([0, T]; \mathbf{L}_2(\Omega))$ $\mathbf{u}_i(t) \in \mathcal{D}(A) \subset \mathbf{W}_2^2(\Omega)$ при всех $t \in [0, T]$ и $A\mathbf{u}_i \in C([0, T]; \mathbf{L}_2(\Omega))$ $(i = 1, \dots, n)$, поля $\mathbf{u}_i$ удовлетворяет уравнениям из (5) при всех $t \in [0, T]$ и при п.в. $\boldsymbol{x} \in \Omega$, и начальным условиям. Отсюда и из (4) теперь следует, что поля $\mathbf{u}_i$ и функции p_i $(i = 1, \dots, n)$ есть решение начально-краевой задачи (2) в смысле определения 1. □

4 Заключение

Для системы дифференциальных уравнений динамики смеси вязких несжимаемых жидкостей проведен анализ разрешимости в общем случае трёх пространственных переменных. Доказаны существование и единственность сильного по времени решения начально-краевой задачи, соответствующей течениям смеси в ограниченной области с условиями прилипания на границе области течения.

References

[1] R.I. Nigmatulin, *Dynamics of multiphase media, Vol. 1*, Nauka, Moscow, 1987.

[2] K.L. Rajagopal, L. Tao, *Mechanics of mixtures, Ser. Adv. Math. Appl. Sci., 35*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995.

[3] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence*, Methods Appl. Anal., **20**:2 (2013), 179–195.

[4] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solvability of nonstationary equations of multicomponent viscous compressible fluids*, Izv. RAN. Ser. matem., **82**:1 (2018), 151–197.

[5] J. Frehse, S. Goj, J. Málek, *On a Stokes–like system for mixtures of fluids*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, **36**:4 (2005), 1259–1281.

[6] J. Frehse, S. Goj, J. Málek, *A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum*, Applications of Mathematics, **50** (2005), 527–541.

[7] J. Frehse, W. Weigant, *On quasi–stationary models of mixtures of compressible fluids*, Applications of Mathematics, **53** (2008), 319–345.

[8] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solvability of the initial-boundary value problem for the equations of polytropic motion of mixtures of viscous compressible fluids*, Sibirskie elektronnye matem. izvestia, **13** (2016), 541–583.
[9] Zakora D.A. *Spectral properties of the operator in the problem of oscillations in a mixture of viscous compressible fluids*, Differential Equations, **59**:4 (2023), 473–490.
[10] Zakora D.A. *The problem of small motions of a mixture of viscous compressible fluids*, Sibirskie elektronnye matem. izvestia, **20**:2 (2023), 1552–1589.
[11] D.A. Zakora, *Spectral properties of operators in the problem on normal oscillations of a mixture of viscous compressible fluids*, Journal of Mathematical Sciences, **283**:2 (2024), 231–254.
[12] N.D. Kopachevsky, S.G. Krein, Ngo Zuy Kan, *Operator methods in linear hydrodynamics: evolutionary and spectral problems*, Nauka, Moscow, 1989.
[13] N.D. Kopachevsky, S.G. Krein, *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Voume 1: Self-adjoint problems of an ideal fluid*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2001.
[14] P.E. Sobolevskiĭ *On equations of parabolic type in a Banach space*, Tr. Moskov. Mat. Obshch., **10** (1961), 297–350.
[15] D. Henry *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Math. No. 840, Springer, Berlin, 1981.
[16] J.A. Goldstein *Semigroups of linear operators and applications*, Oxford University Press, New York, 1985.
[17] O.A. Ladyzhenskaya *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Nauka, Moscow, 1970.
[18] T. Kato *Perturbation theory of linear operators*, Mir, Moscow, 1972.
[19] S.G. Krein, *Linear differential equations in a Banach space*, Nauka, Moscow, 1967.

Dmitry Alexandrovich Zakora
Voronezh State University,
1, Universitetskaya Ploshchad',
394018, Voronezh, Russia
Email address: dmitry.zkr@gmail.com

Dmitry Alexeyevich Prokudin
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
15, pr. Lavrent'eva,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: prokudin@hydro.nsc.ru