S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 517.958
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 35B35

ЛИНЕЙНОЕ ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ КАК РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ: СИСТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЗОРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИТЕРАТУРЫ

Ю.В. Юлмухаметова

Abstract: A systematic review of the exact solutions of the equations of ideal gas dynamics with a solution in the form of a linear velocity field is performed. This type of solution is a fundamental solution for any equations of continuum mechanics. At the same time, even viscosity does not affect such movements. As it turned out, such movements have long been known as inhomogeneous deformation, that is, if we decipher this concept, it means that the Eulerian coordinates of the particle linearly depend on the Lagrangian coordinates, and the dependence is homogeneous. The aim of the study is to systematically summarize studies' results of scientific research containing the solution of equations of continuum mechanics in the form of a linear velocity field. **Methods.** The search for publications was performed in the Scopus databases, the Scientific Electronic Library (eLibrary). The selection of publications was also made in the libraries of the Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences, the Scientific Library of the S. L. Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. The language of publications: Russian, English. The publication period

Yulmuhametova, Yu.V., linear velocity field.

Работа выполнена при поддержке средствами госбюджета по госзаданию 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

Поступила 1 января 2025 г., опубликована 31 декабря 2025 г.

is limited to 2024. A systematic review of the research results was carried out in accordance with the recommendations of the PRISMA 2020 guidelines. **Result.** 44 articles were selected. The results of selected works are presented with an emphasis on the type of linear velocity field and the physical process that it describes. **Conclusion.** The results obtained by the research authors can be used to find solutions with a linear velocity field for more complex models. The principles applied in the works of scientists from previous years allow me, as a researcher of a linear velocity field, to understand in which direction to move in order to obtain new scientific results.

Keywords: systematic review, PRISMA, linear velocity field, gas dynamics, the exact solution.

Введение

Систематический обзор – это оригинальное аналитическое произведение, объемом с крупную научную статью, подготовленное на основании результатов специального научного исследования, выполненное по особой методике [1]. Литературных обзоров по данной тематике несколько. Последний датируется 2010 годом. В представленном систематическом обзоре будут включены некоторые материалы из известных литературных обзоров с добавлением новых исследований, а также ранее не известных. Как результат получившийся систематический обзор позволит проследить наличие «белых пятен» и наметить новые направления для будущих исследований.

Прежде чем говорить о физических явлениях и процессах, которые описывает данный вид решений, погрузимся в историю возникновения данного вопроса. Откуда возникло решение с однородной деформацией и чем оно полезно сейчас?

Для этого обратимся к обзору [2]. Изучение газовой динамики частиц, скорости которых являются линейными функциями от пространственных координат, тесно связано с исследованием динамики жидких и газовых самогравитирующих эллипсоидов. Интерес к данной области обусловлен её значением для космогонии и астрофизики, в частности, важностью её выводов для теории фигур небесных тел. Этим исследованиям предшествовал длительный период изучения статических фигур равновесия, восходящий к«Началам» Ньютона и обусловленный научным интересом к фигуре Земли. Показал, что медленное вращение фигуры должно приводить к незначительной сплюснутости. Определил величину сжатия $\sim 1/230$ без учета неоднородности Земли (на самом деле $\sim 1/294$). Следующий успех связан с именем Маклорена, который в 1742 году обобщил результат Ньютона на случай, когда сжатие, обусловленное вращением, нельзя считать малым. Определил значение ускорения на экваторе и полюсах сфероида. Через 100 лет после открытия Маклореном сфероидов, Якоби в 1834 году установил, что эллипсоиды с тремя неравными осями вполне могут служить фигурами равновесия. При этом экваториальное сечение можно взять в форме произвольного эллипса и определить третью ось (наименьшую из трех осей) и угловую скорость вращения так, чтобы этот эллипсоид был фигурой равновесия. Но Якоби не полностью исследовал связь найденных им эллипсоидов со сфероидами Маклорена. Эту связь установил Мейер в 1842 г. Его основной результат состоит в доказательстве того, что последовательность эллипсоидов Якоби«ответвляется» от последовательности сфероидов Маклорена в точке, для которой эксцентриситет равен 0,81267. В 1856 году Дирихле приступил к решению следующей задачи: при каких условиях однородная жидкая масса, находящаяся под действием сил взаимного притяжения ее частиц, может сохранять все время эллипсоидальную фигуру и иметь внутренние движения, поле скоростей которых в инерциальной системе координат выражается линейными функциями положения. В результате им было найдено новое частное решение уравнений гидродинамики, описывающее движение однородного самогравитирующего эллипсоида и выведены уравнения движения частиц жидкости в неподвижных осях. Найдены семь первых интегралов полученных уравнений. Хочется отметить, что именно Дирихле указал, что в рассматриваемой задаче речь идет об однородном линейном поле скоростей. Развитие теории Дирихле получило в работе Римана. Им получено полное решение задачи о стационарных фигурах, допустимых при общих предположениях Дирихле. Риман сначала показал, что при условии линейной зависимости поля скоростей от координат наиболее общий тип движения, совместимого с условием сохранения эллипсоидальной формы фигуры равновесия, представляет собой суперпозицию равномерного вращения и внутренних движений с равномерно распределенной завихренностью жидкости. Так же показал, что эллипсоидальные фигуры равновесия возможны лишь в трех случаях.

Для ясности принципа, по которому производится систематически обзор, приведем основные формулы и уравнения, необходимые для понятия сути исследования. Постановку задачи приведем в эйлеровых и лагранжевых координатах.

Рассмотриваются уравнения идеальной газовой динамики в эйлеровых переемнных [3]

$$\begin{gathered}\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0,\\ \rho_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\rho + \rho\nabla\cdot\vec{u} = 0,\\ S_t + (\vec{u}\cdot\nabla)S = 0 \ \text{ или } \ p_t + (\vec{u}\cdot\nabla)p + \rho a^2\nabla\cdot\vec{u} = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

где $t, \vec{x} = (x, y, z)$ — независимые переменные, $\vec{u} = (u, v, w)$ — скорость, p — давление, ρ — плотность, S — энтропия, уравнение состояние $p =$

$f(\rho, S)$ замыкает систему (1), $a^2 = f_\rho$ — квадрат скорости звука газа. Если из уравнения состояния выразить энтропию $S = g(\rho, p)$, то $a^2(p, \rho) = f_\rho(\rho, g(p, \rho))$.

Решение (1) разыскивается в виде линейного поля скоростей

$$\vec{u} = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t), \tag{2}$$

где $A(t)$ – трехмерная матрица, $\vec{u}_0(t)$ – трехмерный вектор. Если $\vec{u}_0 = 0$, то (2) задает решение с однородной деформацией. Если $\vec{u}_0 \neq 0$, то соотношение (2) является решением с неоднородной деформацией. Представление для функций плотности и давления общего вида.

Рассмотрим задачу в лагранжевых переменных. Лагранжевы переменные t, $\vec{\xi}$ вводятя с помощью решения $\vec{x} = \vec{x}(t, \vec{\xi})$ задачи Коши

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t), \quad \vec{x}|_{t=0} = \vec{\xi}. \tag{3}$$

Решение имеет представление

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + M(t)\vec{\xi}, \quad \vec{x}_0(0) = 0, \quad M(0) = I, \tag{4}$$

где I – единичная матрица.

Замечание. На самом деле понятие однородной/неоднородной деформации выходит из зависимости эйлеровых координат от лагранжевых. При $\vec{x}_0 = 0$ движение называется с однородной деформацией. При $\vec{x}_0 \neq 0$ – с неоднородной деформацией.

После подставновки вида вектора $\vec{x}$ в (3) получим тождество линейное по $\vec{\xi}$. После приравнивания коэффициентов при $\vec{\xi}$ нулю получим соотношения, связывающие матрицы A, M и векторы $\vec{u}_0$, $\vec{x}_0$.

$$M' = AM, \quad \vec{x}_0' = A\vec{x}_0 + \vec{u}_0.$$

В лагранжевых координатах уравнения газовой динамики (1) с линейным полем скоростей имеют два интеграла

$$\rho = \rho_0(\vec{\xi})|M|^{-1}, \quad S = S_0(\vec{\xi}),$$

и сводятся к векторному уравнению

$$\rho M^T \vec{x}_{tt} + \nabla_\xi p = 0,$$

где $|M|$ – определитель матрицы M, M^T – транспонированная матрица.

Таким образом, в исследованиях, которые будут включены в систематический обзор, главным образом интересует вид матриц A и/или M. В зависимости от того в каких переменных решает задачу исследователь.

1 Цель исследования

Провести систематическое обобщение результатов научных исследований, содержащих точные решения уравнений механики сплошной среды в виде линейного поля скоростей как с однородной, так и с неоднородной деформацией. Преимущественно будем обращать внимание на работы, в которых явно содержится представление для матрицы линейности A и описывается какой физический процесс данное решение описывает.

2 Материалы и методы исследования

Систематический обзор результатов исследования был проведен согласно критериям PRISMA 2020 [4].

Поиск публикаций выполнен в базах данных Scopus, Научная электронная библиотека (www.elibrary.ru) и КиберЛенинка (www.cyberleninka.ru). Так же выбор публикаций произведен в библиотеках Института математики с ВЦ УФИЦ РАН, Научная Библиотека Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Для поиска информации в eLibrary использовался следующий запрос в разделе "расширенный поиск": линейное поле скоростей OR однородная деформация AND газовая динамика без кавычек. Поиск осуществлялся в названии, в аннотации, в ключевых словах статей в журналах, книгах и диссертациях. Дополнительными параметрами поиска служили пункты «искать с учетом морфологии», «искать в публикациях, имеющих полный текст на eLibrary.ru» и «искать в публикациях, доступных для Вас». Так же прописана тематика публикаций: математика и механика. После получения выборки в разделе «Параметры» в тематике оставлено только Математика и Механика. Язык публикаций: русский, английский. Период публикаций ограничен 2024 годом. Выбраны публикации изданные до 2024 года включительно.

В КиберЛенинке запрос имел вид: линейное поле скоростей однородная деформация газовая динамика. Без кавычек. Так же был установлен фильтр Математика.

В базе данных Scopus поиск производился при помощи программы Publish or Perish по ключевым словам: uniform deformation, gas dynamics equations. Остальные поля поиска не заполнялись.

Так же выборка статей была произведена по системе Snowballing (Backward (обратный метод – берем список литературы в конце статьи) и Forward (прямой метод – берем цитирующие статьи).

3 Результаты выборки

На этапе идентефикации из русскоязычных библиографических баз в обзор включены 219 ссылки из eLibrary и 32 из КиберЛенинка. Статей индексированных в Scopus оказалось 32. Статей, найденных по системе Snowballing было найдено 52 штук. Таким образом, в начале этапа идентефикации всего было отобрано 335 исследований. Идентификация статей по их названиям позволила удалить из результатов поиска 234 публикацию, которые не были релевантными основной цели обзора. Так же проведена проверка на дублирование названий исследований. В итоге было исключено 8 исследования. Результатом этапа идентификации явился отбор 93 публикации по теме обзора. На основе отобранных публикаций была сформирована матрица синтеза – таблица Microsoft Exel, в которую занесены данные об авторах публикации, название публикации, издательство, год публикации.

На этапе скрининга отобранных публикаций было исключено 23 исследования. Основной причиной исключения были несоответствия основной теме обзора (модель в исследовании не соответствует модели, которая приведена во введении в качестве постановки задачи). В итоге для рассмотрения полнотекстовых версий осталось 70 исследований (eLibrary – 18 исследований, КиберЛенинка – 4 исследования, Scopus – 5 исследования, библиотечные источники – 43). После исключения исследований, недоступных для изучения полнотекстовых версий публикаций их результатов (Scopus – 3 публикации), оценено на приемлемость 67 исследования. Рассматривая полные тексты исследований, было исключено 23 исследования. При этом в ходе скрининга в матрицу синтеза были внесены уточняющие моменты исследований: выбранная система координат, вид точного решения, какие физические явления описывает полученное решение (при наличии), полученные результаты.

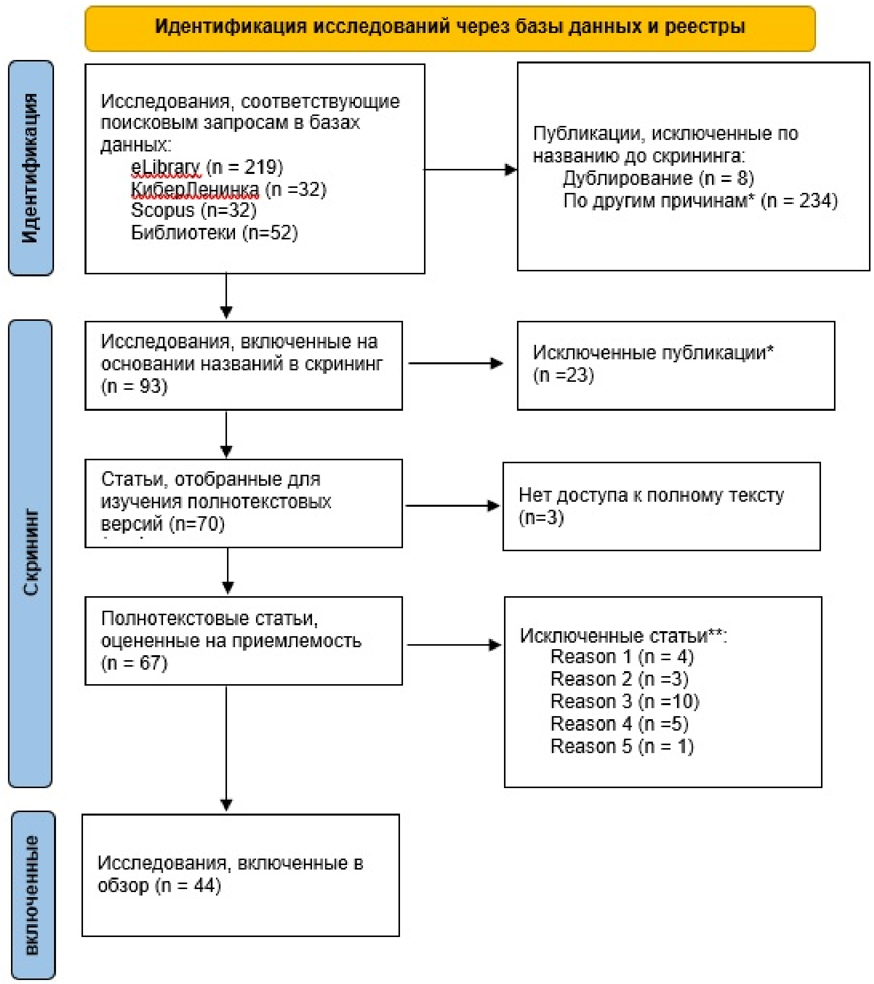
Таким образом, в итоговый систематический обзор попало 44 публикации. На их основе была создана матрица синтеза, позволяющая выявить "пробелы"в текущих знаниях, структурировать статьи в соответствии с интересующими аспектами исследования по теме линейного поля скоростей. Далее проведем статистику по выбранным публикациям.

4 Статистика и выводы

Охват публикаций состовляет 167 лет: самая ранняя публикация 1857 года, самая поздняя 2023 года. В таблице представлены некоторые статистические данные, которые удалось выделить после скрининга публикаций и представляющий наибольший научный интерес. Вот некоторые выводы:

Большинство источников, включенных в обзор, датированы 1985–2024 гг., что свидетельствует о растущем интересе к исследуемому вопросу. Большая часть исследований проведена в России (СССР). В публикациях удалось выделить три основные модели, которые рассмотренв авторами: модель Римана (основана на сингулярном разложении матрицы M из (4) при $\vec{x}_0 = 0$) [7], [34], модель Овсянникова (лагранжево представление уравнений газовой динамики и его решения (4)) и модель Юлмухаметовой (эйлерово представление уравнений газовой динамики и его решения (3)) [35, 38, 39, 44], [46]- [51]. Пять работ не имеют формальных признаков модели, так как рассматривают прикладные аспекты данного типа движения [11], [24], [40], [42], [43].

По типу рассматриваемых сред выделены несжимаемая жидкость и сжимаемая жидкость или газ.



*Критерии исключения

1. название исследования не соответствует цели данного обзора

**Критерии исключения

1. Модель в исследовании не соответствует модели идеальной газовой динамики.
2. Являются кратким обзором на уже изданную ранее статью
3. Не содержит точного решения или механизмов, позволяющего его найти
4. Результаты работы содержаться в более широком исследовании.
5. Нет доступа к полной версии статьи.

Рис. 1. Блок-схема процесса и результатов поиска источников информации

Категория	**Характеристика**	**Количество публикаций**
Год публикации	1857–1899	3
	1900–1942	0
	1943–1985	14
	1985–2024	27
Страна проведения исследования	Россия (СССР)	33
	Германия	3
	США (Корея, Англия, Китай)	5
	Франция	3
Рассматриваемые модели	Модель Римана	2
	Модель Овсянникова	27
	Модель Юлмухаметовой	10
	Без модели	5
По типу жидкости/газа	Сжимаемая среда	34
	Несжимаемая среда	10

5 Обсуждение

Систематический обзор литературы будем производить по дате выхода статьи или книги начиная с самой ранней. Приведем краткую информацию из каждого исследования, вошедшего в обзор.

Именно **Дирихле Г.Л.** [5], [6] выяснил, если во время движения жидкая масса сохраняет свою эллипсоидальную форму, то координаты произвольного элемента жидкости можно записать как линейные однородные функции начальных координат. В своей работе [6] он рассматривает случай однородной жидкости, имеющей единичную плотность. А уравнения гидродинамики представлены в лагранжевых координатах в случае, когда силы, действующие на жидкость, потенциальны. Решение он разыскивает с однородной деформацией, то есть когда $\vec{u}_0(t) = 0$ в (2). При этом уравнения газовой динамики свелись к системе 10 уравнений, 9 из которых являются дифференциальными уравнениями второго порядка. Для такой системы найдено 7 первых интегралов: 6 интегралов соответствуют законам сохранения завихренности и полного момента, а седьмой интеграл – полная энергия движущийся жидкости. Указано, что даже при наличии интегралов система очень сложна для решения, поэтому полное решение задачи можно получить только при очень простых предположениях о начальном состоянии жидкой массы. Одно из таких предположений состоит в том, что в начале движения как форма, так и характеристики движения полностью симметричны относительно некоторой оси.

Рассмотрено частное решение с матрицей блочнодиагонального вида. Это решение описывает осесимметричное движение однородного жидкого самогравитирующего эллипсоида с единичной плотностью.

Большой вклад в исследование динамики жидких эллипсоидов внес **Б. Риман** [7]. Он представил полное решение задачи о стационарных фигурах, в постановке Дирихле. Показал, что при условии линейной зависимости поля скоростей от координат наиболее общий тип движения, совместного с условием сохранения эллипсоидальной формы фигуры равновесия, представляет собой суперпозицию равномерного вращения и внутренних движений с равномерно распределенной завихренностью жидкости. При этом уравнения движения записаны в специальном виде (модель Римана). Так же указаны все частные решения, соответствующие движению эллипсоида без изменения формы, и исследованы условия их существования. Этим решениям соответствует вращение эллипсоида вокруг оси, неподвижной в пространстве.

Изучение динамики газовых эллипсоидов с линеным полем скоростей начинается с работы **Овсянникова Л.В.** [9]. В статье рассматриваются уравнения идеальной газовой динамики для политропного газа с однородной деформацией. Получено точное решение, описываемое формулами:

$$\vec{u} = M' M^{-1}\vec{x}, \quad \rho = \frac{F(M^{-1}\vec{x})}{|M|}, \quad p = \frac{G(M^{-1}\vec{x})}{|M|^{\gamma}},$$

где γ – показатель адиабаты, а матрица M удовлетворяет дифференциальному уравнению 2-го порядка (модель Овсянникова)

$$M^T M'' + |M|^{1-\gamma} L_1 = 0$$

с постоянной марицей L_1. Выяснено для каких матриц L_1 существуют нетривиальные решения. Найдено несколько первых интегралов дя таких систем.

Используя результаты [9], **Немчиновым Л.В.** [10] изучен разлет трехосного газового эллипсоида без вращения. Рассмотрены уравнения газовой динамики в лагрнажевых переменных. Для описания движения в регулярном режиме в статье использовано разделение переменных для искомых функций. При этом матрица зависимости эйлеровых переменных от лагранжевых выбрана диагональная. В случае политропного газа изучено изменение размеров трехосного эллипсоида во времени и характер его разлета на основании численных расчетов для модели.

Зельдович Я.Б. в [11] рассматривает анизатропное движение однородной материи с плотностью, зависящей только от времени. Материя равномерно распределена по произвольному трехосному эллипсоиду. Указано, что значение следа матрицы A определяет расширение или сжатие материи, антисимметричная часть матрицы A – вращение. Приведено обсуждение того, что линейная зависимость скорости в свою очередь обеспечивает поддержание однородности с течением времени. Рассмотрено несколько частных случаев решения: сферически симметричное решение, движение без вращения, осевая симметрия. Выяснено, что вырожденные случаи не дают примеров конечного движения, при котором линейные размеры и плотность всегда оставались бы конечными.

В следующих работах **Овсянникова Л.В.** [12, 13] рассматриваются неустановившиеся движения идеальной несжимаемой жидкости ($\rho = \rho_0$) с неоднородной деформацией. Решение описывает движение массы жидкости, первоначально ограниченной произвольной поверхностью второго порядка. Приведены частные случаи таких движений: плоскопараллельное движение жидкости в форме полосы, плоскопараллельное движение жидкости из начальной формы круга, пространственное осесимметричное движение массы жидкости из начальной формы шара, вихревое движение, сжатие плоского слоя, сжатие круглого цилиндра, вытягивание иглы, разрушение иглы.

Dyson J.F. [14] рассматривает модель идеального политропного газа, который в начальный момент времени являтся изотермическим (модель Овсянникова). Определены константы движения: завихренность, угловой момент и полная энергия. Рассмотрен специальный случай, когда матрица M диагональная. Решение такого вида описывает свободное расширение эллипсоидального газового облака с фиксированной ориентацией. Считая, что газовое облако в начальный момент времени занимает сфероид, получены асимптотические оценки изменения полуосей эллипсоида. В результате облако, имеющее форму сигары, будет расширяться до диска и наоборот.

Анисимов С.И., Лысиков Ю.И. [15] рассмотрели модель Дайсона [14], в которой внутренняя энергия является однородной функцией минус второй степени от элементов матрицы M, то есть одноатомный газ. (Получаем модель Овсянникова с $\gamma = 5/3$) При таких условиях был найден дополнительный интеграл. С его помощью аналитически решена задача о расширении сфероида при отсутсвии вращения, что аналитически подтвердило выводы Дайсона. Так же рассмотрены две двумерные задачи. Задача о разлете бесконечного вращающегося эллиптического цилиндра и задача о разлете кругового цилиндра.

Пухначев В.В [16] рассмотрел плоское движенмие идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей. Внешние силы и поверхностное натяжение отсутствуют. Математическая модель имеет вид из [12]. Найдено точное решение в случае, когда $L_1 = I$ и матрица M_0' – антисимметричная с нулевыми диагональными элементами. Это решение описывает вращение жидкого круга вокруг центра с постоянной угловой скоростью.

В статье **Андреева В.К.** [17] точное решение уравнений сжимаемой жидкости используется для описания движения со свободной границей. Модель выбрана из работы Овсянникова Л.В. [9]. Для плотности, зависящей только от времени, записана функция давления. Так же функция давления записана в случае изэнтропического движения и для специального значения констант в случае политропного газа. В последнем случае поверхности уровня давления – есть поверхности 2-го порядка.

В книге **Богоявленского О.И.** [18] рассматриваются уравнение адиабатического движения идеального газа в эйлеровых переменных с однородной деформацией. Получена модель аналогичная модели Овсянникова Л.В. в [9] для первого случая. Но Богоявлениский О.И. переписал эту систему в лагранжевом виде с лагранжианом, выраженным через элементы матрицы M. И оказалось, что если поверхности постоянного давления и постоянной плотности газа являются гиперболоидами, то такие решения могут быть использованы для моделирования движений газа типа смерчей в атмосфере. В работе приведены оценки роста суммы квадратов полуосей газового эллипсоида при стремлении времени к бесконечности. С их помощью показано, что движение эллипсоида со свободной границей является неограниченным.

В серии работ **Лаврентьевой О.М.** [19, 20] рассматривалось движение конечной массы идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей, при котором скорости являются линейными функциями координат (однородная деформация). Рассмотрена модель Овсянникова [12] с диагональной матрицей L_1 и изучено качественное поведение решения такой модели при больших временах и специальной матрицей M. Это решение описывает движение эллипсоида, при котором одна из полуосей все время остается постоянной и сохраняет свое направление, вторая неограниченно возрастает, третья стремится к нулю при $t \to \infty$. Показано как при помощи закона сохранения момента колличества движения у системы понижен порядок. В статье [20] при условии $L_1 = E$ доказана неустойчивость точных решений из [12] относительно возмущений, сохраняющих момент импульса и циркуляцию. При дополнительных условиях получены точные асимптотики изменения длин полуосей эллипсоида при больших временах.

В работе **Осина А.И., Пославского С.А.** [21] рассмотрена аналогичная задача из работы [15], но с учетом вращения. Найдено и исследовано точное аналитическое решение адиабатического движения идеального совершенного одноатомного газа с однородной деформацией с матрицей M из [5] и диагональной L_1 ранга 3 с равными элементами. При исследовании решений выделено четыре случая движения вращающегося газового облака:

1. Первоначально происходит сжатие газа, находившегося в состоянии бесконечного разряжения. Затем возникает колебательный режим, во время которого форма облака газа конечное число раз переходит из "дискообразной"в "сигарообразную"и обратно. Число оборотов облака вокруг оси вращения конечно.

2. Периодические пульсации объема газа:

- за конечное время происходит бесконечное число вырождений попеременно в "нить"и в "блин";
- бесконечное число вырождений облака в "блин"или в "нить";

- бесконечное число вырождений облака в "блин"или в "нить"с учетом вращения.

3. В некоторый момент времени один раз происходит схлопывание газового облака в точку.

4. Случай аналогичен 1 рассмотрению, но с некоторыми ограничениями:

- движение аналогично 1 случаю, но при этом степень сжатия сфероида ограничена;
- движение аналогично 1 случаю, но при этом не происходит вырождения в "нить".

Так же рассмотрен случай, когда в модели Овсянникова Л.В. [9] ранг матрицы L_1 равен 1 и L_1 – симметричная. Это решение, содержащее вращение и сдвиг, обобщает ранее известное решение Л.И. Седова [22] для одномерного случая.

Пославским С.А., Шикиным И.С. [23] рассматривается модель из работы [21], где $|M(0)| = 1$, матрица L_1 диагональная ранга 3 с равными элементами. Матрица M общего вида представима как в работе Дайсона [14] через произведение ортогональных и диагональной матриц. Найдено новое точное решение, описывающее движение вращающегося газового эллипсоида с сохраняющимся отношением полуосей.

Абрамян М.Г. [24] рассмотрел вращающуюся с угловой скоростью систему отсчета, связанную с главными осями эллипсоида (угловая скорость и $\mathrm{rot}\vec{u}$ направлены по x_3), поле скоростей жидкости имеет вид

$$u_1 = -\nu\frac{a_1}{a_2}, \quad u_2 = \nu\frac{a_2}{a_1}, \quad u_3 = 0,$$

где a_1, a_2 – полуоси эллипсоида, ν – частота движения жидких частиц по линиям тока. В результате обобщены S-эллипсоиды Римана с учетом гравитации сфероидального гало и систематезированы последовательности вложенных эллипсоидов в зависимости от свойств гало. Показано, что наличие даже самого слабого гало качественно меняет геометрию устойчивых сферойдов.

Голубятниковым А.Н. [25] развит подход к решению задачи об оптимизации по начальным данным процесса линейного ускорения тела расширяющимся газом. Постановка задачи сводится к нахождению максимально возможной скорости поршня при подходящих начальных распределениях плотности и давления газа. Точное решение имеет вид линейного поля скоростей. Найдено начальное распределение плотности.

Для модели аналогичной из [9] **Овсянниковым Л.В.** [26] расмматривается точное решение, описывающее двумерное движение газового цилиндра, находящегося под действием внешнего давления. Показано существование периодического по времени решения. Политропный газ, заполняющий круглый цилиндр, под действием периодически меняющегося внешнего давления, находится одновременно во вращательном и колебательном (по радиусу) режиме движения.

Gaffe B. [27, 28] рассматривалась модель Овсянникова. Он показал, что наличие завихренности в целом разрушает свойство интегрируемости для одноатомного газа в случае когда матрица M является блочнодиагональной. Такая матрица описывает вращение вокруг неподвижной оси трехосного эллипсоида. В работе [28] описано обобщение результатов статьи [27] на случай, когда матрица M не является блочнодиагональной без завихренности, путем введения новых интегралов движения.

Голубятниковым А.Н. в более поздней статье [29] изучено решение с однородной деформацией для адиабатического движения идеального совершенного газа, которое найдено при изучении работы газодинамической метательной установки. Рассмотрен случай осесимметричного распределения параметров газа для движений без закручивания. В этом случае получено точное решение, для которого описан механизм движения газа с образованием сходящейся ударной волны. С точки зрения приложения к описанию метательных установок рассмотрено 2 случая: движения газа без поперечной деформации и поперечное сжатие газа с постоянной скоростью.

Андреев В.К. в [30] рассматривает задачу нестационарного изэнтропического движения газовой струи с политропным уравнением состояния. Составлена модель Овсянникова с матрицей вида $M = \mathrm{diag}(\sigma, \sigma, 1+kt)$, где $\sigma(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка из модели Овсянникова. Движение струи определяется функцией $\sigma(t)$. Дифференциальное уравнение на $\sigma(t)$ сводится к задаче Коши для уравнения Эмдена-Фаулера. Автором изучены свойства решений этого уравнения.

Анисимовым С.И., Лукьянчуком Б.С. [31] рассматривается процесс адиабатического расширения трехмерного парового облака после лазерной абляции. Так как плотность испаряющегося материала высокая, то движение пара описывается уравненями газовой динамики. Простейшее решение с однородной деформацией иногда используются при анализе эксперементальных данных по лазерному нагреванию плазмы и лазерной абляции. Рассмотрена модель Овсянникова с диагональной матрицей M. По результатам численных расчетов выявлено, что:
1. На поздних стадиях расширения, разлет газового облака происходит по инерции.
2. Изучена эволюция формы облака при различных значениях адиабаты.
3. Установлено, что с течением времени расширение облака происходит быстрее в направлении большего начального градиента давления (в направлении короткой оси фокального пятна). В результате напыленное пятно, оказывается повернутым относительно фокального пятна на 90°. Это так называемый flip-over effect.

В ряде работ **Хабирова С.В.** [32,33] для дифференциально-инвариантной подмодели газовой динамики с нулевой дивергенцией рассмотрены решения с линейным полем скоростей для плоского и пространственного движений. Составлена модель Овсянникова

$$M^T M'' = C, \quad M^T \vec{x}_0'' = \vec{c}, \quad |M| = 1,$$

где C, $\vec{c}$ – постоянные. Для симметричной матрицаы C найдены функции плотности и давления. Если матрица не симметричная, то рассматривается плоский случай. При таком рассмотрении найдены функции давления и плотности. Для $C = 0$ получены вид матрицы A и вектора $\vec{x}_0$. Записаны интегралы движения для плоского случая, когда матрица $C \neq 0$.

Борисовым А.В., Мамаевым И.С., Ивановой Т.Б. [34] исследуются возможные фигуры равновесия и устойчивость жидкого несжимаемого самогравитирующего эллиптического цилиндра с внутренним линейным полем скоростей. Рассматривается модель Римана. Матрица M вида

$$M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^0 & 0 \\ 0 & a_2^0 \end{pmatrix}^{-1},$$

где φ – угол поворота цилиндра вокруг своей оси как целого в неподвижной системе координат, ψ – угол, описывающий внутреннее движение относительно главных осей цилиндра, $a_1 > a_2$ – полуоси цилиндра, $a_1 a_2 = const$, a_1^0, a_2^0 – главные полуоси в начальный момент. После подставновки матрицы M в модель Римана исследуются области существования решения.

Уразбахтиной Л.З. [35] рассмотрен интегрируемый случай решений уравнений газовой динамики с линейным полем скоростей. Предполагается, что уравнение состояния произвольного вида. При этом дифференциальное уравнение на матрицу A является уравнением Риккати и интегрируется после перехода к лагранжевой модели. Записано решение матричного дифференциального уравнения в 4-х возможных случаях. Найдены решения когда ускорение $\vec{u}_0 = 0$ и $\vec{u}_0 \neq 0$. Выделено два специальных случая вида квадрата скорости звука. Приведен пример инвариантного решения, для которого выделенный объем коллапсирует в отрезок.

Sideris T.S. [36] рассмотрел трехмерную модель идеальной жидкости, окруженной вакуумом. Рассматрено существование и асимптотическое поведение движения. Для этого использована модель Овсянникова. Приведены оценки роста диаметра области, занимаемой жидкостью для сжимаемого и несжимаемого случаев. Исследовано асимптотическое поведение решения системы в случае несжимаемого закрученного потока.

В работе **Hadzic M., Jang J.J.** [37] рассматривается сжимаемый, политропный газ в трехмерном пространстве, расширяющийся. На основе модели Овсянникова получены асимптотические оценки сущестования решения вида $M = a(t) + tb$, $t \geq 0$, $a(t)$, b – матрицы.

Турцинский М.К. [38,39] рассматрел модель идеального политропного газа на равномерно вращающейся плоскости. Такие модели возникают в задачах динамики атмосферы. Получена модель Юлмухаметовой в двумерном случае с $\vec{\omega} = 0$ и вращением. Система обладает нетривиальными положениями равновесия, отвечающие осесимметричному вихревому движению и сдвигу. Одно из них – это однопараметрическое положение равновесия, описываемое антидиагональной матрицей с противоположными элементами. Для случая $\gamma = 2$ система сведена к одному дифференциальному уравнению первого порядка и найдено точное решение. Решение исследовано на устойчивость в близи положения равновесия [38]. В том числе на интервале $\gamma \in [1; 2)$ [39].

Хабиров С.В. [40]. Рассматриваются инвариантные решения с линейным полем скоростей, построенные на общей 3-х мерной подалгебре переносов. В результате получено несколько видов движения: коллапс на оси, коллапс на плоскости, "двойной коллапс"(сначала на оси в один момент времени и на плоскости в другой момент времени). Рассмотрены движения выделенных объемов частиц в виде параллелепипедов, которые проецируются в параллелограммы в моменты коллапса. Записаны уравнения звуковых поверхностей для политропного газа и получено их поведение для различных показателей адиабат.

Giron J.F., Ramsey S.D., Baty R.S. [41] рассмотрели двумерное осесимметричное течение невязкой сжимаемой идеальной жидкости. В описании процесса использовано уравнения Немчинова-Дайсона (модель Овсянникова). В начальный момент облако идеального газа имеет произвольный эксцентриситет и распределение внутреннего состояния газа. Газ политропный. Задано распределение скоростей. Найдены функции плотности, давления и энтропии. Получены точные решения с однородной плотностью. Все полученные решения образуют класс равномерно расширяющихся и сжимающихся решений.

Khrabrov A.V., Kaganovich I.D., Chen J., Guo H. [42]. Численными и аналитическими методами изучена эволюция однородной одномерной бесстолкновительной плазмы, возникающей между плоскими поглощающими стенками. Возникающий поток описывается волнами разрежения, которые распространяются симметрично внутрь от границ, взаимодействуют и в конечном итоге исчезают после пересечения. Моделирование показывает, что описываемый процесс качественно напоминает изоэнтропийную газовую динамику. А именно, в расширяющейся центральной области, где взаимодействуют распространяющиеся волны разрежения, образуется сглаженный профиль плотности с сопутствующим линейным профилем скорости.

Получено аналитическое решение. Изначально газ находится в состоянии покоя с начальной плотностью и скоростью звука 1. При $t \leq 1$

решение имеет вид

$$u(t,x) = \frac{2}{\gamma+1}(\xi-1), \quad \xi = \frac{x}{t}, \quad \rho(t,x) = \left(\frac{2+(\gamma-1)\xi}{\gamma+1}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}.$$

При $\gamma = 1$

$$u(t,x) = \xi - 1, \quad \rho(t,x) = e^{\xi-1}.$$

Хабировым С.В. [43] найдены инвариантные и новые частные решения частично инвариантной подмодели на 3-х мерной группе Галилея. Такие решения с линейным полем скоростей имеют точечный коллапс с искревленными траекториями частиц. Рассмотрены примеры движения частиц газа для некоторых моделей.

Юлмухаметова [44,45]. Модель Овсянникова только в эйлеровых переменных. Не исключены случаи решений с коллапсом частиц газа. Получено 11 моделей движения газа с линйеным полем скоростей. Модели состоят из системы основных дифференциальных уравнений на матрицу и вектор.

$$A' + A^2 = S + E < \vec{\omega} >, \quad S' + SA + A^T S = \varphi(t)S + \Psi(t),$$
$$\vec{\omega}' = A\vec{\omega} - \gamma \mathrm{tr} A \vec{\omega}, \quad \vec{u}_0' + A\vec{u}_0 = \vec{v},$$
$$\vec{v}' + A^T\vec{v} + S\vec{u}_0 + \vec{\omega} \times \vec{u}_0 = \varphi(t)\vec{v} + \vec{v}_0(t),$$

где φ, $\vec{v}_0$, Ψ – функция, вектор и матрица, вид которых зависит от уравнения состояния модели согласно приведенной классификации [44]. Помимо перечисленных дифференциальных уравнений модель может содержать дифференциальные уравнения на функции, входящие в выражения для плотности и давления.

Для некоторых моделей рассмотрены частные решения. Разлет частиц газа из точечного источника [45], радиальный разлет частиц газа из вихря [46], коллапсирующие движения двуатомного газа [47], точные решения, описывающие движения газа по винтовым линиям уровня с коллапсом на геликоиде [48], движения частиц наза по спиральным траекториям [49], плоский коллапс [50], схлопывание шара в иголку или диск [51].

6 Заключение

В статье проведен систематический обзор литературы по теме линейного поля скоростей. В обзоре участвовало 44 исследования. Результаты, полученные авторами исследований, могут быть использованы для нахождения решений с линейным полем скоростей более сложных моделей. Принципы, применяемые в работах ученых прошлых лет, позволяют мне как исследователю линейного поля скоростей, понять в какую сторону двигаться для получения новых научных результатов.

Благодарю Лакман Ирину Александровну, к.т.н., за знания и мотивацию, которые я получила на курсах повышения квалификации Систематичсекий обзор и метаанализ данных.

References

[1] O. L. Lavrik, T. A. Kalyuzhnaya, M. A. Pleshakova, *Systematic review as a type of review and analytical products*, Bibliosphere, **2** (2019), 33–51.

[2] S. Chandrasekhar, *Ellipsoidal equilibrium figures / Translated from the English by V. N. Rubanovsky; Edited by V. V. Rumyantsev.*, M: Mir, 1973. – 288 p.

[3] L.V. Ovsyannikov, *Lectures on the fundamentals of gas dynamics.* Moscow, Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovanii, 2003, 336 p.

[4] M.J.Page, J.E. McKenzie, P.M. Bossuyt, I. Boutron, T.C. Hoffmann, C.D. Mulrow, L. Shamseer, J.M. Tetzlaff, E.A. Akl, S.E. Brennan, R. Chou, J. Glanville, J.M. Grimshaw, A. Hrbjartsson, M.M. Lalu, T. Li, E.W. Loder, E. Mayo-Wilson, S. McDonald, L.A. McGuinness, L.A. Stewart, J. Thomas, A.C. Tricco, V.A. Welch, P. Whiting, D. Moher *The PRISMA 2020 statement: an updated guideline for reporting systematic reviews.* BMJ. **372** (2021), 71.

[5] G. L. Dirichlet, *Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik*, Nachrichten von der Gessellschaft der Wissenshaften zu Göttingen (Mathematisch-Physikalische Klasse), **14** (1857), 203–207.

[6] G. L. Dirichlet, *Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik*, J. reine angew. Math., **58** (1861), 181–216.

[7] B. Riemann, *Ein Beitrag zu den Untersuchungen ?ber die Bewegung einer flussigen gleichartigen Ellipsoides*, Abh. d. Konigl. Gesell. der Wiss. Zu G'ottingen, 1861.

[8] A.V. Borisov, I.S. Mamaev, *Dynamics of Liquid and Gas Ellipsoids*, Institute of Computer Research, Moscow-Izhevsk, 2010.

[9] L.V. Ovsyannikov, *A New Solution of the Hydrodynamic Equations*, Dokl. AN USSR. **111**:1 (1956), 47–49.

[10] I.V. Nemchinov, *Expansion of a Three-Axis Gas Ellipsoid in a Regular Mode*, PMM, **29**:1 (1965), 134-–140.

[11] Ya.B. Zeldovich, *Newtonian and Einsteinian motion of homogeneous matter*, Adv. Astron, **8**:5 (1965), 700–707.

[12] Л.В. Овсянников, *Об одном классе неустановившихся движений несжимаемой жидкости*, Труды V сессии Ученого совета по народнохозяйственному использованию взрыва. Фрунзе: ИЛИМ, (1965), 34–42.

[13] Л.В. Овсянников, *Задача о неустановившимся движении жидкости со свободной границей.* Новосибирск: Наука, СО РАН, (1967), 5–75.

[14] J.F. Dyson, *Dynamics of a spinning gas cloud*, J.Math.Mech., **18**:1 (1968), 91-–101.

[15] С.И. Анисимов, Ю.И. Лысиков, *О расширении газового облака в вакуум* // ПММ. **34**:5 (1970), 926–929.

[16] В.В. Пухначев, *О движении жидкого эллипса*, Динамика сплошной среды. **33**, (1978), 68–75.

[17] В.К.Андреев, *К задаче о неустановившемся движении несжимаемой жидкости со свободной границей* // Доклады Академии наук СССР. **244**:5 (1979), 1107–1110.

[18] О.И. Богоявленский, *Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике.* – М.: Наука, 1980. – 319 с.

[19] О. М. Лаврентьева, *О движении жидкого эллипсоида*, Докл. АН СССР, **253**:4 (1980), 828—831.

[20] О. М. Лаврентьева, *Об одном классе движений жидкого эллипсоида*, Прикл. мех. техн. физ., **25**:4 (1984), 148—153.

[21] А.И. Осин, С.А. Пославский, *О движениях с однородной деформацией в газовой динамике*, Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, **6** (1981), 81–85.

[22] Л.И. Седов, *Об интегрировании одномерного движения газа*, ДАН СССР, **90**:5 (1953), 735.

[23] С.А. Пославский, И.С. Шикин, *Об одном классе точных решений с однородной деформацией в газовой динамике*, ПММ. **48**:1 (1984), 137–142

[24] М.Г. Абрамян, *S-эллипсоиды Римана с гало* // Астрофизика, **25**:1 (1986), 173–187

[25] А.Н. Голубятников, *К оптитмальной постановке газодинамической задачи Лагрнажа* // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. **6** (1995), 59–61.

[26] Л.В. Овсянников, *Газовый маятник* // Прикладная механика и техническая физика, **41**:5 (2000), 115–119.

[27] B. Gaffet, *Spinning Gas Clouds Without Vorticity* // J. Phys. A: Math. Gen., **33** (2000), 3929—3946.

[28] B. Gaffet, *Spinning gas clouds without vorticity: the two missing integrals* // Journal of Physics A: Mathematical and General, **34** (2001), 2087—2095.

[29] А.Н. Голубятников, Н.Е. Леонтьев, *К оптимизации ускорения тела в классе движений толкающего газа с однородной деформацией* // Аэромеханика и газовая динамика. **2** (2001), 27–34.

[30] В.К. Андреев, *Нестационарное движение струи газа с линейным полем скоростей* // Сибирский журнал индустриальной математики. **5**:2 (2002), 23–35.

[31] S. I. Anisimov, B. S. Luk'yanchuk, *Selected problems of laser ablation theory* // Phys. Usp., **45**:3 (2002), 293—324.

[32] С. В. Хабиров, *Плоские движения газа без расхождения с линейным полем скоростей* // Уфимск. матем. журн., **2**:3 (2010), 113-–119

[33] С. В. Хабиров, *Пространственные движения без расхождения с линейным полем скоростей* // Уфимск. матем. журн., **7**:2 (2015), 114—122;

[34] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, Т. Б. Иванова, *Устойчивость жидкого самогравитирующего эллиптического цилиндра с внутренним вращением* // Нелинейная динам., **6**:4 (2010), 807—822.

[35] Л. З. Уразбахтина, *Интегрируемые гидродинамические подмодели с линейным полем скоростей* // Сиб. журн. индустр. матем., **5**:3 (2012), 135-–145.

[36] T. C. Sideris, *Global existence and asymptotic behavior of affine motion of 3D ideal fluids surrounded by vacuum* // Arch. Rat. Mech. Anal. **225**:1 (2017), 141–176.

[37] M. Hadzic, J.J. Jang, *A Class of Global Solutions to the Euler–Poisson System* // Commun. Math. Phys. **370** (2019), 475–505.

[38] М. К. Турцынский, *О свойствах решений уравнений газовой динамики на вращающейся плоскости, отвечающих движениям с однородной деформацией* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., **75**:2 (2020), 39–45.

[39] М. К. Турцынский, *Об исследовании устойчивости одного класса стационарных решений системы уравнений газовой динамики на вращающейся плоскости* // УБС, **84** (2020), 51–65.

[40] С.В. Хабиров, *Инвариантные движения частиц общей трёхмерной подгруппы группы всех пространственных переносов* // Челяб. физ.-матем. журн., **5**:4(1) (2020), 400–414.

[41] J. F. Giron, S. D. Ramsey, R. S. Baty, *Nemchinov–Dyson solutions of the two-dimensional axisymmetric inviscid compressible flow equations* // Physics of fluid, **32**:12 (2020),

[42] A. V. Khrabrov, I. D. Kaganovich, J. Chen, H. Guo, *Collisionless adiabatic afterglow* // Physics of plasma, Phys. Plasmas **27**, 123512 (2020).

[43] S. V. Khabirov, *Motion of Gas Particles Based on the Galilean Group* // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, **27**:1 (2021), 173–187.

[44] Yu.V. Yulmukhametova, *Submodels of gas dynamics with a linear velocity field* // Sib. electron. math. izv., **9** (2012), 208–226.

[45] Yu.V. Yulmukhametova, Gas Motion Submodels with a Linear Velocity Field: Dissertation for the Degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences / Yulmukhametova Yulia Valerievna, (2011) 119.

[46] Yu.V. Yulmukhametova, Straightening gas outflows from a vortex with a linear velocity field // Ufa Mathematical Journal, **4**:4 (2012), 162–175.

[47] I. I. Gumerov, A. A. Katashova, and Yu. V. Yulmukhametova, *Collapsing motions of a diatomic gas whose density depends only on time* // Multiphase Systems, **18**:1 (2023), 9–16.

[48] Yu. V. Yulmukhametova, *Solution of the ideal gas equations describing Galilean invariant motions with helical level lines, with collapse on a helicoid* // Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences, **23**:4 (2019), 797–808.

[49] Yu. V. Yulmukhametova, *Solution of the Rank 2 Hydrodynamic Submodel with a Linear Velocity Field* // Chelyab. Phys.-Math. J., **6**:3 (2021), 321–330.

[50] L. Z. Urazbakhtina, Yu. V. Yulmukhametova, *Flat Gas Collapse with a Linear Velocity Field* // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, **29**:2 (2023), 207–216.

[51] Yu.V. Yulmukhametova, *Deforming a Gas Ball into a Needle or a Disc* // Multiphase Systems, **19**:2 (2024), 59–63.

Yulya Valerevna Yulmukhametova
Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS,
pr. Oktabry, 71,
450054, Ufa, Russia
E-mail address: yulmuhametova.yuv@ugatu.su