S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

ISSN 1813-3304 Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 517.544
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 47A68

УСЕЧЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ВИНЕРА —ХОПФА С ВЕЩЕСТВЕННЫМ СИМВОЛОМ.

А.Ф. Воронин

Abstract: The paper provides sufficient conditions for the correct solvability of the truncated Wiener-Hopf equation with a real symbol.
Keywords:truncated Wiener —Hopf equation, correctness, existence, uniqueness, stability, real symbol.

1 Введение*

Рассматривается уравнение в свертках второго рода на конечном интервале, которое называют также усеченным уравнением Винера —Хопфа:

$$u(t)-\int\limits_0^\tau k(t-s)u(s)\,ds=f(t),\quad t\in(0,\tau), \tag{1}$$

где

$$k\in L_1(R),\quad f\in L_1(0,\infty),\ \tau>0. \tag{2}$$

Легко видеть, что значения функции $k(t)$ вне интервала $(-\tau,\tau)$ и функции $f(t)$ вне интервала $(0,\tau)$ не влияют на решение уравнения (1). Для удобства считаем, что $k(t),\ f(t)$ — заданные функции при $t\in(-\tau,\tau)$

Voronin, A.F., The truncated Wiener —Hopf equation with a real symbol.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009).
Поступила 1 ноября 2025 г., опубликована 31 декабря 2025 г.

и $t \in (0,\tau)$ соответственно, и произвольные при $t \notin (-\tau,\tau)$ и $t > \tau$ соответственно.

Решение уравнения (1) при условии (2) (решение задачи (1)–(2)) будем искать в $L_1(0,\tau)$.

Символом уравнения (1) называют функцию S:

$$S(x) := 1 - \mathcal{F}k(x),\ x \in R, \tag{3}$$

где $\mathcal{F}$– преобразование Фурье,

$$\mathcal{F}k(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t)e^{ixt}\,dt,\ x \in R.$$

Уравнения типа свертки тесно связаны с различными приложениями. Это задачи классической математической физики и ее обратные задачи, задачи информатики, всевозможные задачи современной техники и экономики: ядерной физики, автоматического управления, теории игр, массового обслуживания и другие [1, с. 6]. Заметим, что в [1] рассматриваются приложения уравнений Винера —Хопфа, усеченные же уравнения Винера —Хопфа имеют более широкую область применений. Например, усеченные уравнения Винера —Хопфа лежат в основе одной из модификации метода Гельфанда–Левитана-Марченко-Крейна [2]–[3]. Метод используется для решения множества обратных задач, таких как обратная задача рассеяния или обратные задачи для уравнений волнового типа. Кроме того, в алгебре Винера порядка два задача факторизации сводится к усеченному уравнению Винера —Хопфа [4]–[5].

К настоящему времени не существует общей теории уравнения (1) (в отличие от уравнения Винера —Хопфа [1],[6]). Более того, не существует теории корректности задачи (1)–(2) с обозримыми условиями корректности. Успех в исследовании задачи (1)–(2) достигнут лишь в частных случаях:

В [7] задача (1)–(2) исследована при условии, что ядро имеет следующий общий вид:

$$k(t) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{m_j} c_{lj}e^{p_j}t^l,\ t \in (-\tau,\tau),$$

где c_{lj}, p_j — комплексные постоянные.

В [8, теорема 7.2] показано, что существует $\tau_1 > 0$, такое что при всех $\tau > \tau_1$ решение задачи (1)–(2) существует и единственно, если выполнено следующее условие

$$S(x) \neq 0,\ x \in R,\ \operatorname{Ind} S(x) := \frac{1}{2\pi}\Delta_{\mathbb{R}} \arg S(x) = 0, \tag{4}$$

где $\operatorname{Ind} S(x)$– индекс функции S.

В [9] приведены результаты исследования задачи (1)–(2) при выполнении неравенства в (4) и условия

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}k(x)/S(x)\}(t) = 0,\ t < -\tau,$$

где $\mathcal{F}^{-1}$– обратное преобразование Фурье.

Случай, когда функция k является периодической, с периодом τ, исследован в [10].

Положим

$$k_{\pm}(t) = \theta(\pm t)\, k(t),\ t \in R,$$

где θ– функция Хевисайда.
Имеем

$$k(t) = k_{-}(t) + k_{+}(t),\ t \in R,\ \mathcal{F}k_{\pm}(x) = \mathcal{F}\{\theta(\pm t)k(t)\}(x).$$

Хорошо известно, для уравнения типа свертках второго рода на полубесконечном интервале (уравнения Винера —Хопфа) и для скалярной краевой задачи Римана существуют развитые теории (см., например, [1],[6]). Взаимосвязь (эквивалентность) между уравнением Винера —Хопфа и скалярной краевой задачей Римана —Гильберта была найдена в середине прошлого века (см. исторические сведения в [1]).

Изучение уравнений типа свертки на конечном интервале с помощью векторной краевой задачи Римана —Гильберта началось, по-видимому, с работы [11]. Развитие этого направления исследования смотри в [12].

В работах автора (см., например, [4]–[5]) развивается направление, в котором изучается векторная краевой задаче Римана —Гильберта (задача факторизации) с помощью уравнения типа свертки (1). Была получена формула взаимосвязи (и найдены условия эквивалентности) между задачей (1)–(2) и краевой задачей Римана —Гильберта с матричным коэффициентом, допускающим стандартную факторизацию в алгебре Винера порядка 2. Показано [4], что широкий класс краевых задач Римана —Гильберта (задач факторизации) сводится к задаче (1)–(2).

В данной работе построена матрица-функция, которая допускает каноническую факторизацию в алгебре Винера порядка 2. Показано, что задача Римана —Гильберта, коэффициент которой является построенная матрица-функция, сводится к задаче (1)–(2) с вещественным символом. В виду того, что существование канонической факторизации матрицы-функции гарантирует корректную разрешимость соответствующей краевой задачи Римана —Гильберта (см. ниже теорему 1), то по доказанной ниже теореме 2 были получены условия корректной разрешимости задачи (1)–(2) с вещественным символом (см. ниже теоремы 3,4).

Прежде чем перейти непосредственно к краевой задаче Римана —Гильберта и взаимосвязи этой задачи с усеченным уравнением Винера —Хопфа, введем следующие обозначения. Для $1 \le n, m \le 2$ положим $L_{n\times m}$ — пространство $n \times m$ матриц-функций с элементами из $L_1(R)$, $\mathcal{F}f$ — образ Фурье матрицы-функции $f \in L_{n\times m}$. $\mathbb{R}$ – расширенная вещественная прямая (R — вещественная прямая); $\mathbb{W}^{n\times n}$ — алгебра Винера непрерывных матриц-функций вида $C + \mathcal{F}f$, где C — постоянная матрица порядка n и $f \in L_{n\times n}$; $\mathbb{W}_{+}^{n\times n}$ ($W_{-}^{n\times n}$) — подалгебра в $\mathbb{W}^{n\times n}$, состоящая из матриц-функций вида $C + \mathcal{F}f$ таких, что $f(t) = 0$ при $t < 0$ (при $t > 0$); при C=0 соответствующие алгебры и подалгебры будем снабжать нижним индексом 0 ($\mathbb{W}_0^{n\times n}$, $\mathbb{W}_{0\pm}^{n\times n}$). При $n=1$ верхний индекс $n\times n$ при $\mathbb{W}$ будем опускать. Если B — некоторая алгебра, то через $\mathcal{G}B$ обозначим группу из обратимых элементов в B. Через $\mathbb{W}^{n\times 1}$, $\mathbb{W}_{\pm}^{n\times 1}$ обозначим группы, состоящие из векторов столбцов матриц-функций из алгебр $\mathbb{W}^{n\times n}$, $\mathbb{W}_{\pm}^{n\times n}$ соответственно.

2 Краевая задача Римана —Гильберта.

Рассмотрим краевую задачу Римана —Гильберта на расширенной прямой $\mathbb{R}$, в которой требуется найти вектор-функции $\Phi^{\pm} := (\Phi_1^{\pm}, \Phi_2^{\pm})^T \in \mathbb{W}_{0\pm}^{2\times 1}$ по краевому условию:

$$\Phi^+(x) = M(x)\,\Phi^-(x) + q^-(x),\ x\in\mathbb{R}, \tag{5}$$

где

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & e^{ix\tau}m^-(x) \\ e^{-ix\tau}m^+(x) & 1+m_{22}(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{G}\mathbb{W}^{2\times 2},\ q^- \in \mathbb{W}_{0-}^{2\times 1}, \tag{6}$$

$$q^-(x) = \int_{-\tau}^{0} q_-(t)e^{ixt}\,dt,\ q_- \in L_1(-\tau, 0), \tag{7}$$

$$m^{\pm} \in \mathbb{W}_{0\pm},\ 1+m_{22}(x) = d_M(x) + m^+(x)m^-(x),\ d_M \in \mathcal{G}\mathbb{W}. \tag{8}$$

Легко видеть, что определитель матрицы M равен d_M ($\det M = d_M$).

Считаем, что

$$\kappa := \operatorname{Ind} d_M(x) = 0.$$

Следовательно, справедлива следующая факторизация функции $d_M(x)$:

$$d_M(x) = d_M^+(x)\,d_M^-(x),\ x\in\mathbb{R},\ \text{где } d_M^{\pm} \in \mathcal{G}W_{\pm}. \tag{9}$$

Ниже приведем хорошо известные результаты из теории краевой задачи Римана —Гильберта и факторизации матриц-функций (см., например, [13, гл. I],[14, §7]).

Будем говорить, что матрица $M \in \mathcal{G}W^{2\times 2}$ допускает стандартную (левую) факторизацию, если она представляется в виде следующего произведения матриц:

$$M(x) = M_+(x)D(x)M_-(x),\ x\in\mathbb{R},$$

где $M_{\pm} \in \mathcal{G}W_{\pm}^{2\times 2}$ ($M_{\pm}$ — фактор-множители), $D(x)$ - диагональная матрица-функция,

$$D(x) = \Big\{\Big(\frac{x-i}{x+i}\Big)^{\kappa_1}, \Big(\frac{x-i}{x+i}\Big)^{\kappa_2}\Big\},$$

$\kappa_1 \geq \kappa_2$ — частные индексы матрицы M (целые числа), $\kappa = \operatorname{Ind}\det\, M(t) = \sum\limits_{j=1}^{2}\kappa_j$ — суммарный индекс матрицы M.

Корректность краевой задачи Римана определяют частные индексы ее матричного коэффициента. В частности, имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть суммарный индекс матрицы $M(t)$ равен нулю. Тогда для устойчивости чисел p и l (где l – число линейно независимых решений, p – число условий разрешимости задачи Римана —Гильберта* (5)*–*(6)*) относительно элементов матрицы $M(x)$ необходимо и достаточно, чтобы частные индексы матрицы $M(x)$ были равны нулю. Кроме того, если частные индексы матрицы $M(x)$ равны нулю, то однородная задача Римана —Гильберта* (5)*–*(6) *имеет только тривиальное решение, а неоднородная задача корректно разрешима (решение существует, единственно и устойчиво по отношению к коэффициентам задачи M и q^-).*

3 Взаимосвязь между краевой задачей Римана —Гильберта (5)–(6) и задачей (1)–(2).

Положим

$$w_\tau^\pm(x) := d_M^\pm(x) \mp m^\pm(x),\ \mathcal{F}f(x) := \frac{e^{ix\tau}q^-(x)}{w_\tau^+(x)}, \tag{10}$$

$$S(x) := \frac{d_M(x) + m^+(x)m^-(x)}{w_\tau^-(x)w_\tau^+(x)}, \tag{11}$$

где

$$|w_\tau^\pm(z)| > 0,\ \pm\mathrm{Im}\, z \geq 0\ \big(z = x + iy\big), \tag{12}$$

S— символ уравнения (1).
Справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены соотношения в* (10)*–*(12)*. Тогда решение u(t) (образ Фурье решения) усеченного уравнения Винера –Хопфа* (1) *при ограничении* (2) *выражается через решение краевой задачи Римана* (5)*–*(9) *по формуле:*

$$\mathcal{F}u(x) = \Phi_1^+(x) + e^{ix\tau}d_M^-(x)\Phi_2^-(x). \tag{13}$$

Доказательство. Перенесем вектор-столбец $(0, q^-)^T$ в левую часть краевого условия (5) и обозначим

$$\phi_2(x) := \Phi_2^+(x) - q^-.$$

Далее будем рассуждать также как при доказательстве [4, теоремы 3] вплоть до равенства [4, (2.9)], в котором, в нашем случае

$$C_2 = 0 = \hat{f} = 0,\ \Psi_1^+ = \Phi_1^+ + e^{ix\tau}\, d_M^-\Phi_2^-.$$

Таким образом, равенство [4, (2.9)] будет иметь вид:

$$(1 - \mathcal{F}k(x))\Psi_1^+(x) - \frac{\Phi_2^+(x) - q^-(x)}{w_\tau^+(x)}e^{ix\tau} = \frac{d_M^-(x)\Phi_1^-(x)}{w_\tau^-(x)},\ x \in R. \tag{14}$$

Из равенства (14), с учетом второго равенства в (10) и соотношений в [4, (2.10)–(2.13)] (при $C_2 = 0$), получим исходное уравнение (1). В последнем

$$f(t) = -\mathcal{F}^{-1}\{\frac{e^{ix\tau}q^-(x)}{w_\tau^+(x)}\}(t),\ k(t) = \mathcal{F}^{-1}\{1 - S(x)\}(t), \tag{15}$$

где S – символ уравнения (1), который определен формулой (11).

□

Отметим, что выражения для символа уравнения в (11) имеет эквивалентную форму [5, формула (1.7)]:

$$S(x) = \frac{d_M^+(x)}{w_\tau^+(x)} + \frac{d_M^-(x)}{w_\tau^+(x)} - 1. \tag{16}$$

4 Условия для корректной разрешимости задачи Римана —Гильберта (5)–(6).

Из теоремы 1 следует, что для корректной разрешимости задачи Римана —Гильберта (5)–(6) необходимо и достаточно существование канонической факторизации матрицы $M(x)$ в (6). Найдем достаточные условия для существования канонической факторизации матрицы $M(x)$. Справедлива

Лемма 1. *В следующих двух случаях матрица $M(x)$ в (6) допускает каноническую факторизацию (задача Римана —Гильберта (5)–(6) корректно разрешима):*

$$(i)\quad m^+ = \overline{m^-},\ d_M^\pm = 1;$$
$$(ii)\quad m^+ = -\overline{m^-},\ d_M^\pm = 1 \pm m^\pm,$$
$$d_M^-(x) = 1 - m^-(x) \neq 0,\ m^-(x) + \overline{m^-(x)} < 1,\ x \in R. \tag{17}$$

Доказательство. Доказательство начнем со случая (i). Легко видеть, что в этом случае матрица-функция $M(x)$ положительно определенная. Тогда матрица-функция $M(x)$ допускает каноническую факторизацию [15].

Перейдем к доказательству случая (ii). В этом случае матрица-функция $M(x)$ имеет следующий вид:

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & e^{ix\tau}m^-(x) \\ -e^{-ix\tau}\overline{m^-(x)} & 1 - m^-(x) - \overline{m^-(x)} \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$M_R(x) := \frac{M(x) + M^*(x)}{2} = \{1, 1 - m^-(x) - \overline{m^-(x)}\},$$

где

$$M^*(x) = \overline{M^T(x)},\ T - \text{знак транспонирования.}$$

Из второго неравенства в (17) следует, что $\det M_R(x) \neq 0,\ x \in R$.Таким образом, эрмитова матрица-функция $M_R(x)$ положительно определена.

Тогда по [14, теорема 8.1] получим, что матрица-функция $M(x)$ допускает каноническую факторизацию в случае (ii). $\square$

5 Уравнение (1) с вещественным символом.

Имеет место

Теорема 3. *Пусть выполнено неравенство*

$$||k_-||_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |k_-(t)|\, dt < 1. \tag{18}$$

Если символ уравнения (1) вещественен и для него справедливо неравенство

$$S(x) = 1 - \mathcal{F}k_-(x) - \overline{\mathcal{F}k_-(x)} > 0,\ \ x \in R, \tag{19}$$

то уравнение (1) корректно разрешимо в $L_1(0,\tau)$ для любой его правой части $f \in L_1(0,\tau)$.

Доказательство. Поставим в соответствие задаче (1)–(2) краевую задачу Римана —Гильберта (5)–(6) так, чтобы выполнялись теорема 2 и лемма 1 с условием (ii). Для этого положим

$$m^- := \mathcal{F}k_-,\ \ m^+ := -\overline{m^-},\ \ \ d_M^{\pm} := 1 \pm m^{\pm}\ \ (d_M = |1-\mathcal{F}k_-|^2). \tag{20}$$

Тогда из (10)–(11) получим

$$w_\tau^{\pm}(x) = 1,\ \ \mathcal{F}f(x) = e^{ix\tau}q^-(x), S(x) = d_M(x) + m^+(x)m^-(x). \tag{21}$$

Легко видеть, что условия теорема 2 и лемма 1 (с условием (ii)) выполнены. Следовательно, по лемме 1 краевая задача Римана —Гильберта (5)–(6) корректно разрешима.Тогда из теоремы 2 и равенств в (15) следует, что решение задачи (1)–(2) существует, единственно и справедлива оценка:

$$||u||_1 \le ||\Phi_1^+||_W + ||d_M^-(x)||_W||\Phi_2^-||_W, \tag{22}$$

где $||.||_W$ – норма в алгебре Винера. Из оценки (22) вытекает, что задача (1)–(2) устойчива. Из последнего равенства в (21) имеем

$$S(x) = 1 - \mathcal{F}k_-(x) - \overline{\mathcal{F}k_-(x)}. \tag{23}$$

$\square$

Рассмотрим другой случай, когда символ уравнения (1) вещественен и задан формулой

$$S(x) = \frac{1}{1+m^-(x)} + \frac{1}{1+\overline{m^-(x)}} - 1,\ \text{ где } ||m^-||_W < 1. \tag{24}$$

Имеет место

Теорема 4. *Пусть для символа уравнения* (1) *выполняется условие* (24)*, а для функций f и k справедливы равенства в* (15)*, где*

$$w_\tau^+ = 1 - \overline{m^-}.$$

Тогда уравнение (1) *корректно разрешимо в $L_1(0,\tau)$ для любой его правой части $f \in L_1(0,\tau)$.*

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3. Поставим в соответствие задаче (1)–(2) краевую задачу Римана —Гильберта (5)–(6) так, чтобы выполнялись теорема 2 и лемма 1 с условием (i). Для этого положим

$$m^+ := \overline{m^-},\ d_M^\pm = d_M := 1.$$

Тогда из (10)–(11) получим

$$w_\tau^\pm(x) = 1 \mp m^\pm,\ \mathcal{F}f(x) = e^{ix\tau}\frac{q^-(x)}{w_\tau^+(x)}.$$

Легко видеть, что условия теорема 2 (с равенством (16)) и леммы 1 (с условием (i)) выполнены. Следовательно, по лемме 1 краевая задача Римана —Гильберта (5)–(6) корректно разрешима.Тогда по теореме 2, с учетом оценки (22), корректно разрешима и задача (1)–(2).

□

6 Примеры.

1. Пусть символ уравнения (1) имеет вид (23) и справедливо неравенство

$$||k_-||_1 < 1/2.$$

Тогда

$$k(t) = k_-(t) + \overline{k_-(-t)},\ ||k||_1 < 1.$$

Из последнего неравенства по теореме Банаха об обратном операторе следует, что решение задачи (1)–(2) существует, единственно и представимо в виде абсолютно сходящегося ряда Неймана, т.е. устойчиво. Получим ниже такой же результат по теореме 3. Другими словами покажем, что в условиях примера теорема 3 выполняется. Легко видеть, что достаточно показать выполнение неравенства в (19). Для этого рассмотрим очевидную цепочку неравенств:

$$|\mathcal{F}k_-(x) + \overline{\mathcal{F}k_-(x)}| \le 2|\mathcal{F}k_-(x)| \le 2||k_-||_1 < 1.$$

Следовательно, $\mathcal{F}k_-(x) + \overline{\mathcal{F}k_-(x)} < 1$, и неравенство в (19) выполняется.

2. Пусть выполнены условия теоремы 3 или теоремы 4. Можно видеть, что выполняется и условие (4). Тогда по [8, теорема 7.2] существует $\tau_1 > 0$, такое что при всех $\tau > \tau_1$ решение задачи (1)–(2) существует и единственно. Что также следует из теоремы 3 или теоремы 4.

References

[1] F. D. Gakhov and Yu. I. Cherskii, *Equations of Convolution Type* [in Russian], Nauka, Moscow, 1978.

[2] V. G. Romanov, *On justification of the Gelfand-Levitan-Krein method for a two-dimensional inverse problem*, Siberian Math. J. **67**:3 (2021), 908–924.

[3] S. I. Kabanikhin, M. A. Shishlenin, N. S. Novikov, N. M. Prokhoshin, *Spectral, Scattering and Dynamics: Gelfand-Levitan-Marchenko-Krein Equations*. Mathematics, **11**:21 (2023), 4458–4468.

[4] A.F. Voronin, *On the method of factorization of matrix-functions in the Wiener algebra of order 2*, J. Appl. Industr. Math., **16**:2 (2022), 365-–376.

[5] A.F. Voronin, *Construction of a factorization of a certain class of matrix functions in the Wiener algebra of order two*, Russian Math. (Iz. VUZ), **18**:3 (2023), 32-–41.

[6] M. G. Krein, *Integral equations on the half-line with kernel depending on the difference of the arguments*, Uspekhi Mat. Nauk,**13**:5 (1958), 3–120.

[7] M. P. Ganin, *About an Integral Fredholm Equation with Kernel Depending on the Difference of Independent Variables,* Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved.Mat., :2 (1963), 31–43.

[8] I. Gohberg, I. A. Feldman, *Convolution Equations and Projection Methods for Their Solution,* [in Russian], Nauka, Moscow, 1971.

[9] A. F. Voronin, *A class of second-order convolution equations on an interval*, Differ. Equ., **36**:10 (2000), 1521–1528

[10] A.F. Voronin, *Analysis of a convolution integral equation of the second kind with periodic kernel on a finite interval*, J. Appl. Industr. Math., **4**:2 (2010),282–289.

[11] V. Yu. Novokshenov, *Convolution equations on a finite segment and factorization of elliptic matrices*, Math. Notes, **27**:6 (1980), 449–455.

[12] A. F. Voronin, *Truncated Wiener-Hopf equation and matrix function factorization*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **17** (2020), 1217–1226.

[13] I. Gohberg, M. A. Kaashoek and I. M. Spitkovsky, *An overview of matrix factorization theory and operator applications, Factorization and integrable systems*. (Faro, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., Birkhauser, Basel, **141** (2003), 1–102.

[14] I. Gohberg, M. G. Krein, *Systems of integral equations on the half-line with kernels depending on the difference of the arguments,* Uspekhi Mat. Nauk, **13**:2 (1958), 3-72.

[15] Yu. L. Shmul'yan, *Riemann's problem for positive definite matrices*, Russian Math. Surveys, **8**:2 (1953), 143–145.

Anatoly Fedorovich Voronin
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: voronin@math.nsc.ru