S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том ?, № ?, стр. ?–? (202?)
https://doi.org/10.33048/semi.2025.20.???

УДК 517.53
MSC 30D20,30D15

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ТОЧКАМИ МАКСИМУМА МОДУЛЯ И НУЛЯМИ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ

М.В. Каванко

Представлено

Abstract: The concept of proximate order is widely used in the theory of entire, meromorphic, subharmonic, and plurisubharmonic functions. In this paper, we provide a general interpretation of this concept as a proximate order relative to the model growth function. The classical proximate order in the sense of Valiron is the particular case of proximate order relative to the model growth function. The main result of this work is a lower estimate of the distance between the points at which the maximum modulus of the entire function and the set of zeros of this function is reached, using the concept of a proximate order relative to the model function.

Keywords: model function, growth function, proximate order, convex function, entire function.

1 Введение

В теории целых и субгармонических функций одной из важнейших проблем является проблема связи между ростом целой (субгармонической) функции и распределением нулей целой (риссовской меры субгармонической) функции. В данной работе исследуется связь расстояния

Kabanko, M.V., Generalization of formulas for the distance between a maximum modules points and the zero set of the entire function.

Поступила , опубликована .

между множеством нулей целой функции и точками, в которых достигается максимум модуля. Первые результаты в этом направлении были получены А. Макентайром в работе [1]. Дальнейшее развитие этих идей получило в работах [2]–[6], в которых И.В. Островский и А. Юрейн получили более точные оценки для исследуемых расстояний. Также можно отметить в этом направлении работы С.И. Фединяка и П.В. Филевича (см. например [7]).

В настоящей работе это расстояние оценивается на основе уточненного порядка относительно модельной функции, которая была введёна Б.Н. Хабибуллиным в работе [8] и, в дальнейшем, использовался авторами работ [9], [10] для уточнения классических результатов и приложений в теории роста целых и субгармонических функций.

Будем использовать следующие определения и терминологию. Через $K, M, \ldots, \varepsilon, \delta, \ldots$ обозначаем положительные константы. Через $\mathbb{N}$ обозначаем множество натуральных чисел, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\mathbb{R}$ — действительные числа и $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$ — положительная полуось. Одноточечные множества записываем без фигурных скобок, если это не вызывает разночтений. Открытый круг радиуса r с центром в точке a будем обозначать через $C(a, r)$, в частности, $C(r) = C(0, r)$. Через $B(a, r) = \overline{C(a, r)}$ обозначим замкнутый круг, $B(r) = B(0, r)$, $L(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$ — окружность радиуса r с центром в точке a, в частности, $L(r) = L(0, r)$.

Равенства (неравенства), которые выполняются для всех достаточно больших значений $r > 0$, называются асимптотическими равенствами (неравенствами).

Определение 1. *(см. [8]) Строго положительная и выпуклая относительно логарифма функция M на открытом луче $\mathbb{R}^+$, для которой $M'(r) > 0$ при всех $r \in \mathbb{R}^+$ и $\lim\limits_{r\to+\infty} M(r) = +\infty$, называется модельной функцией роста.*

Будем считать, что $M(0) = 0$ для модельной функции и $f(0) = 1$ для целых функций, поскольку нас будет интересовать поведение этих функций при достаточно больших $r > 0$. Это ограничение не уменьшает общности наших дальнейших рассуждений и носит технический характер, упрощая в некоторых случаях доказательства.

Известно, (см., например, [11]), для любого $r > 0$ существуют точки на окружности $L(r)$ в которых максимум модуля $\mathcal{M}(r, f) := \max\limits_{z\in L(r)} |f(z)|$ достигается. Множество таких точек $\{w(r)\}$ будем называть точками максимума модуля функции. Существование таких точек эквивалентно тому, что $|f(w)| = \mathcal{M}(|w(r)|, f)$. в дальнейшем будем отождествлять w и $w(r)$. Заметим, что $w(r)$, вообще говоря, неоднозначная функция от r.

Определение 2. *(см. [8], [9]) Абсолютно непрерывная функция ρ_M называется уточнённым порядком относительно модельной функции роста $M(r)$, если существуют пределы*

$$\lim_{r\to+\infty}\rho_M(r)=\varrho\in\mathbb{R},\quad \lim_{r\to+\infty}\frac{M(r)}{M'(r)}\rho'_M(r)\ln M(r)=0\,. \tag{1}$$

Здесь под $\rho'_M(r)$ мы понимаем наибольшее производное число. Далее, поскольку модельная функция роста M фиксированная, то индекс M в обозначении уточненного порядка мы будем опускать, если это не вызывает недоразумений.

Функцию $M^{\rho(r)}(r)$ мы будем обозначать через $V(r)$. Всюду далее будем считать, что $0<\varrho<\infty$.

Определение 3. *Порядком целой функции $f(z)$ относительно модельной функции роста $M(r)$ называется число*

$$\varrho_f:=\limsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\ln|f(re^{i\theta})|}{\ln M(r)}. \tag{2}$$

Если $0\leqslant\varrho_f<\infty$, то функция $f(z)$ называется функцией конечного порядка относительно $M(r)$; если $\varrho_f=+\infty$, то $f(z)$ называется функцией безконечного порядка относительно $M(r)$.

Определение 4. *Для любой целой функции $f(z)$ конечного порядка ϱ величина*

$$\sigma=\sigma_f=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\ln\mathcal{M}(r,f)}{V(r)}.$$

назыается типом функции $f(z)$ относительно уточненного порядка $\rho_M(r)$. Если $\sigma=0$, то $f(z)$ называется функцией минимального типа, если $0<\sigma<+\infty$, то $f(z)$ называется функцией нормально типа, если $\sigma=+\infty$, то $f(z)$ называется функцией максимального типа относительно уточненного порядка ρ_M.

2 Вспомогательные результаты

При исследовании роста целых функций часто исследуется поведение отношения

$$\frac{V(tr)}{V(r)},$$

где $V(r)$ – функция роста относительно уточненного порядка.

Рассмотри логарифм отношения для произвольного t, $0<a<t<b$

$$\begin{aligned}\ln\frac{V(tr)}{V(r)}&=\rho(tr)\ln M(tr)-\rho(r)\ln M(r)\\&=(\rho(tr)-\rho(r))\ln M(tr)+(\ln M(tr)-\ln M(r))\rho(r)\end{aligned}$$

В начале рассмотрим случай $a < t < 1$. Применяя для первого слагаемого в правой части равенства теорему Лагранжа, получим

$$(r-tr)\rho'(c)\ln M(tr)+\ln\frac{M(tr)}{M(r)}\rho(r)=$$
$$(r-tr)\rho'(c)\ln M(tr)+\ln\left(1+\frac{M(r)-M(tr)}{M(tr)}\right)\rho(r),$$

где $c\in(tr;r)$. Снова применяя теорему Лагранжа ко второму слагаемому получаем,

$$\ln\frac{V(tr)}{V(r)}=(r-tr)\rho'(c)\ln M(tr)+\ln\left(1+\frac{M(d)(r-tr)}{M(tr)}\right)\rho(r)=$$
$$(r-tr)\rho'(c)\ln M(tr)+$$
$$\frac{(1-t)rM'(r)}{M(r)}\ln\left(1+\frac{M(d)(r-tr)}{M(tr)}\right)^{\frac{M(tr)}{(1-t)rM'(d)}}\cdot\rho(r)=$$
$$\frac{(1-t)rM'(d)}{M(tr)}$$
$$\cdot\left(\frac{M(tr)}{M'(d)}\rho'(c)\ln M(tr)+\ln\left(1+\frac{M(d)(r-tr)}{M(tr)}\right)^{\frac{M(tr)}{(1-t)rM'(d)}}\cdot\rho(r)\right),$$

где $d\in(tr;r)$.

Отсюда следует равенство

$$\frac{M(tr)}{(1-t)rM'(d)}\ln\frac{V(tr)}{V(r)}=$$
$$\left(\frac{M(tr)}{M'(d)}\rho'(c)\ln M(tr)+\ln\left(1+\frac{M(d)(r-tr)}{M(tr)}\right)^{\frac{M(tr)}{(1-t)rM'(d)}}\cdot\rho(r)\right),$$

Аналогично, рассматривая значения $1 < t < b$, получим

$$\frac{M(tr)}{(t-1)rM'(d)}\ln\frac{V(tr)}{V(r)}=$$
$$\left(\frac{M(tr)}{M'(d)}\rho'(c)\ln M(tr)+\ln\left(1+\frac{M(d)(tr-r)}{M(tr)}\right)^{\frac{M(tr)}{(t-1)rM'(d)}}\cdot\rho(r)\right),$$

где $c,t\in(r;tr)$. Заметим, что при $t=1$ имеем

$$\ln\frac{V(tr)}{V(r)}=0.$$

Однако в дальнейшем нельзя сделать каких-либо выводов, поскольку соотношения зависят от асимптотического поведения выражения

$$\frac{rM'(r)}{M(r)}.$$

Как известно (см., например [12]), произвольная, положительная, непрерывно дифференцируемая при $x \geqslant b > 0$ функция $g(x)$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xg'(x)}{g(x)} = 0, \tag{3}$$

является медленно меняющейся.

Определение 5. *([12]) Измеримая на $(0, +\infty)$ функция $L_\alpha(x)$ называется правильно меняющейся на бесконечности с показателем $\alpha \in \mathbb{R}$, если выполняется*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{L_\alpha(tx)}{L_\alpha(x)} = t^\alpha.$$

Если $\alpha = 0$, то функция $L_0(x)$ называется медленно меняющейся на бесконечности.

Как было отмечено выше (см. [12]), критерием того, что дифференцируемая функция $g(x)$ является правильно (медленно) меняющейся функцией, является выполнение соотношений

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xg'(x)}{g(x)} = \alpha \ \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{xg'(x)}{g(x)} = 0\right).$$

Более того, известно представление правильно меняющейся функции в виде $R(x) = x^\alpha L_0(x)$, где $L_0(x)$ – медленно меняющаяся функция ([12]).

Лемма 1. *Пусть $\rho_L(r)$ – уточнённый порядок относительно медленно меняющейся модельной функции $L(x)$. Тогда медленно меняющейся будет и функция*

$$V(r) = (L(r))^{\rho_L(r)}. \tag{4}$$

Доказательство. Для доказательства будем использовать критерий (3). Непосредственными вычислениями получаем

$$V'(r) = L^{\rho(r)-1}(r)\rho(r)L'(r) + L^{\rho(r)}(r)\ln L(r)\rho'(r) = \\ V(r)\frac{L'(r)}{L(r)}\left(\rho(r) + \rho'(r)\ln L(r)\frac{L(r)}{L'(r)}\right).$$

Тогда

$$\frac{rV'(r)}{V(r)} = \frac{rL'(r)}{L(r)}\left(\rho(r) + \rho'(r)\ln L(r)\frac{L(r)}{L'(r)}\right).$$

Из определения уточненного порядка относительно модельной функции получаем

$$\lim_{r\to\infty} \rho'(r)\ln L(r)\frac{L(r)}{L'(r)} = 0, \ \lim_{r\to\infty} \rho_L(r) = \varrho,$$

а из критерия, определяющего медленно меняющююся функцию следует

$$\lim_{r\to\infty}\frac{rL'(r)}{L(r)}=0.$$

Таким образом, доказано, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{V(tr)}{V(r)}=1. \tag{5}$$

□

В дальнейших рассуждениях будем использовать обозначение $\psi(t):=\frac{1}{(\ln M(t))'}$

Лемма 2. *(см. [8], [9]) Пусть $\rho_M(r)$ – уточнённый порядок относительно модельной функции. Тогда будет справедливо следующее асимптотическое равенство при $0<\rho<\infty$:*

$$\psi(r)V'(r)=(\varrho+o(1))V(r), r\to+\infty. \tag{6}$$

Доказательство. Непосредственными вычислениями получаем

$$\begin{aligned}V'(r)&=M^{\rho(r)-1}(r)\rho(r)M'(r)+M^{\rho(r)}(r)\ln M(r)\rho'(r)\\&=V(r)\frac{M'(r)}{M(r)}\left(\rho(r)+\rho'(r)\ln M(r)\frac{M(r)}{M'(r)}\right).\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\frac{V'(r)}{(\ln M(r))'}=(\varrho+o(1))V(r), r\to+\infty.$$

Лемма доказана. □

Введем в рассмотрение следующую функцию

$$\xi(r)=r\exp\left(\frac{V(r)}{\psi(r)V'(r)}\right). \tag{7}$$

Тогда в силу равенства (6) получаем

$$\ln\frac{\xi(r)}{r}=\frac{1}{\varrho}+o(1), r\to+\infty.$$

Теорема 1. *Пусть $M(r)$ — мультипликативная модельная функция. Тогда для любого отрезка $[a,b]$, что $b\geq a>0$, равномерно относительно $M(t)\in[a,b]$ выполняется соотношение*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{V(tr)}{V(r)}=M^{\varrho}(t).$$

Доказательство. Рассмотрим соотношение

$$\frac{V(tr)}{V(r)}=(M(t))^{\rho(tr)}M(r)^{\rho(tr)-\rho(r)}.$$

Пусть, $\varepsilon(r) = \sup\limits_{u\geq r}\left|\frac{\ln M(u)}{M'(u)}\rho'(u)\ln M(u)\right|$. Легко видеть, что $\lim\limits_{r\to+\infty}\varepsilon(r) = 0$. Используя это соотношение, получим

$$|\rho(tr)-\rho(r)| = \left|\int\limits_r^{tr}\rho'(u)\,du\right| = \left|\int\limits_r^{tr}\frac{\rho'(u)M(u)\ln M(u)}{M'(u)}\frac{M'(u)}{M(u)\ln M(u)}\,du\right|$$
$$\leq \max\{\varepsilon(r);\varepsilon(tr)\}\left|\int\limits_r^{tr}\frac{M'(u)}{M(u)\ln M(u)}\,du\right|$$
$$= \max\{\varepsilon(r);\varepsilon(tr)\}\ln\left(1+\frac{\ln M(t)}{\ln(M(r)}\right).$$

Отсюда следует, что

$$0 \leq \left|\overline{\lim_{r\to+\infty}}\ln\frac{(M(r))^{\rho(tr)}}{V(r)}\right| \leq \overline{\lim_{r\to+\infty}}\ln M(r)|\rho(tr)-\rho(r)|$$
$$\leq \overline{\lim_{r\to+\infty}}\left(\max\{\varepsilon(r);\varepsilon((tr)\}\ln M(r)\ln\left(1+\frac{\ln M(t)}{\ln M(r)}\right)\right)$$
$$\leq \lim_{r\to+\infty}\max\{\varepsilon(r);\varepsilon(tr)\} = 0.$$

Таким образом, существует предел

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{(M(r))^{\rho(tr)}}{V(r)} = 1.$$

Тогда

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{(M(tr))^{\rho(tr)}}{V(r)} = \lim_{r\to+\infty}(M(t))^{\rho(tr)}\cdot\lim_{r\to+\infty}M(r)^{\rho(tr)-\rho(r)} = M^{\varrho}(t).$$

$\square$

Замечание 1. *Как известно, (см., например [12]), мультипликативными непрерывно дифференцируемыми функциями, являются только степенные функции.*

Из теоремы 1 легко следует

Теорема 2. *При $r\to\infty$ и $0<a\leq M(t)\leq b<\infty$ равномерно относительно t выполняется асимптотическое неравенство*

$$(1-\epsilon)M^{\varrho}(t)V(r) < (M(tr))^{\rho(tr)} < (1+\epsilon)M^{\varrho}(t)V(r).$$

Заметим, что при $M(t)>1$ имеет место асимптотическое неравенство

$$(M(tr))^{\rho(tr)} < (M(t))^{\varrho+\epsilon}V(r).$$

Теорема 3. *Пусть $M(r)$ – правильно меняющееся модельная функция. Тогда при $r\to\infty$ и $0<a\le t\le b<\infty$ равномерно относительно t выполняется соотношение*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{V(tr)}{V(r)}=t^{\alpha\cdot\varrho}\,.$$

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $M(r)=r^{\alpha}L(r)$, где $\alpha>0$ и $L(r)$ – медленно меняющаяся функция. Тогда непосредственные вычисления показывают, что

$$\frac{rV'(r)}{V(r)}=\frac{rM'(r)}{M(r)}\left(\rho(r)+\rho'(r)\ln M(r)\frac{M(r)}{M'(r)}\right). \tag{8}$$

Поскольку $M(r)$ – правильно меняющаяся, то получаем

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{rM'(r)}{M(r)}=\alpha.$$

С другой стороны, легко видеть, что если модельная функция $M(r)$, то она удовлетворяет определению 2, то будет верно

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{M(r)}{M'(r)}\rho'(r)\ln M(r)=0\,.$$

Таким образом,

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{rV'(r)}{V(r)}=\alpha\cdot\varrho.$$

Исходя из полученных результатов, следует утверждение теоремы.

□

Лемма 3. *Для $\xi(r)$ определённой равенством (7), будет справедливо равенство*

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{V(\xi(r))}{V(r)}=e^{\alpha}$$

Доказательство. Действительно, из (1) непосредственно получаем

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{V(\xi(r))}{V(r)}=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{V\left(r\exp\left(\frac{\psi(r)V(r)}{V'(r)}\right)\right)}{V(r)}=(e^{\frac{1}{\varrho}})^{\alpha\cdot\varrho}=e^{\alpha}$$

Лемма доказана. □

Рассмотрим функцию вида

$$K(M(r),f)=\frac{d}{d\ln M(r)}\ln\mathcal{M}(M(r),f)=\frac{M(r)}{M'(r)}\frac{d}{dr}\ln\mathcal{M}(M(r),f).$$

Функция $K(M(r),f)$ является неотрицательной и неубывающей.

Легко видеть, что из леммы 3 следует неравенство

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{V(\xi(r))}{\psi(r)V'(r)\ln\frac{\xi(r)}{r}}\leqslant e^{\alpha} \tag{9}$$

Лемма 4. *Пусть целая функция $f(z)$ имеет конечный отличный от нуля порядок относительно уточненного порядка ρ_M и тип не превосходящий σ. Тогда будет верно неравенство*

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{K(r,f)}{\psi(r)V'(r)} \leqslant \sigma \cdot e^{\alpha}$$

Доказательство. Для любых $R > r$ получаем

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{M}(M(R), f) &= \int_0^R \frac{d}{dt} \ln \mathcal{M}(M(t), f) dt \\ &= \int_0^R \frac{d}{d\ln M(t)} \ln \mathcal{M}(M(t), f) d\ln M(t) \\ &\geqslant \int_r^R \frac{d\ln \mathcal{M}(M(t), f)}{d\ln M(t)} d\ln M(t) \\ &\geqslant K(M(r), f) \int_r^R d\ln M(t) = K(M(r), f) \cdot \ln \frac{M(R)}{M(r)}.\end{aligned}$$

Таким образом для $b = M(r)$, $B = M(R)$ при $R > r$ получаем оценку

$$\ln \mathcal{M}(B, f) \geq K(b, f) \cdot \ln \frac{B}{b}.$$

Оценивая отношение $\frac{K(b,f)}{\psi(b)V'(b)}$, получим

$$\frac{K(b,f)}{\psi(b)V'(b)} \leqslant \frac{\ln \mathcal{M}(B,f)}{V(B)} \cdot \frac{V(B)}{\psi(b)V'(b)\ln \frac{B}{b}}$$

Следовательно, при стремлении r к бесконечности, используя (9), полагая в нем $B = \xi(b)$, получаем требуемое неравенство.

□

3 Основной результат

Обозначим через Z_f множества нулей функции $f(z)$: $Z_f = \{z \in \mathbb{C} | f(z) = 0\}$. Под $\operatorname{dist}(a, G)$ будем понимать расстояние между точкой a и множеством G:

$$\operatorname{dist}(a, G) = \inf_{z\in G} |a - z|.$$

Определение 6. *Пусть $M(r)$ – модельная функция роста и*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln \mathcal{M}(r,f)}{\ln M(r)} = \varrho \in \mathbb{R}_+ .$$

Функция $\rho(r) = \rho_M(r)$ называется собственным уточненным порядком целой функции $f(z)$ если $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \varrho$.

Теорема 4. *Пусть $\rho_M(r)$ — собственный уточненный порядок целой функции $f(z)$ и $\sigma = \sigma_f$ — тип функции $f(z)$ относительно модельной функции $\rho_M(r)$. Тогда*

$$\varliminf_{|w|\to\infty} \operatorname{dist}(w, Z_f)\frac{\psi(|w|)V'(|w|)}{|w|} \geqslant \frac{1}{\sigma \cdot e^{\alpha+1}}.$$

где w – точка максимума модуля, $V(r) = (M(r))^{\rho(r)}$ – функция роста, относительно правильно меняющейся модельной функции $M(r)$ и $\psi(r) = \frac{1}{(\ln M(r))'}$.

Доказательство. В доказательстве теоремы мы будем использовать идеи А. Макентайра из работы [1], которые также использовались авторами работ [2]–[6].

Пусть, как и выше, w – точка максимума модуля функции $f(z)$. Определим функции $\Phi_w(z)$ и $Q(h,w)$ равенствами:

$$\Phi_w(z) = \frac{f(w+z)}{f(w)},\ Q(h,w) = \max_{|z|\leqslant h}|\Phi_w(z)|.$$

Поскольку для функции $f(z)$ верно неравенство

$$|f(w+z)| \leqslant \mathcal{M}(|w|+|z|, f),$$

то получаем оценку

$$Q(h,w) \leqslant \frac{\mathcal{M}(|w|+h, f)}{\mathcal{M}(|w|, f)}.$$

После логарифмирования этого неравенства, получаем

$$\ln Q(h,w) \leqslant \ln \mathcal{M}(|w|+h, f) - \ln \mathcal{M}(|w|, f) = \int\limits_{M^{-1}(|w|)}^{M^{-1}(|w|+h)} d\ln \mathcal{M}(M(t), f)$$

$$= \int\limits_{M^{-1}(|w|)}^{M^{-1}(|w|+h)} \frac{d}{d\ln M(t)}\ln \mathcal{M}(M(t), f) d\ln M(t)$$

$$= \int\limits_{M^{-1}(|w|)}^{M^{-1}(|w|+h)} K(M(t), f) d\ln M(t) \leqslant K(|w|+h, f)\int\limits_{M^{-1}(|w|)}^{M^{-1}(|w|+h)} d\ln M(t)$$

$$= K(|w|+h, f)\ln\left(1+\frac{h}{|w|}\right) \leqslant K(|w|+h, f)\frac{h}{|w|}.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из последнего неравенства и леммы 4 следует, что при $|w| > r_\varepsilon$ справедливо асимптотическое неравенство

$$\ln Q(h,w) \leqslant (\sigma \cdot e^{\alpha} + \varepsilon)\psi(|w|+h)V'(|w|+h)\frac{h}{|w|}. \tag{10}$$

Теперь с помощью функции $Q(h,w)$ оценим требуемое расстояние. Для этого будем использовать функцию

$$\eta_w(z)=\frac{Q(h,w)(\Phi_w(z)-1)}{Q^2(h,w)-\Phi_w(z)}.$$

Эта функция была введена в работе [1] и рассуждения с её применением, с некоторыми изменениями, аналогичны доказательствам работ [2], [3], [4], [5], [6]. Для полноты изложения приведём доказательство.

Функция $\eta_w(z)$ удовлетворяет условиям $\eta_w(0)=0$ и $|\eta_w(z)|\leqslant 1$ при значениях $|z|\leqslant h$. Применив к этой функции лемму Шварца, получаем для $|z|\leqslant h$

$$|\eta_w(z)|\leqslant\frac{|z|}{h}.$$

Тогда

$$Q(h,w)|\Phi_w(z)-1|\leqslant\frac{|z|}{h}\cdot|Q^2(h,w)-\Phi_w(z)|\leqslant\frac{|z|}{h}(|Q^2(h,w)-1|+|1-\Phi_w(z)|).$$

Из последнего соотношения следует неравенство

$$|\Phi_w(z)-1|\leqslant\frac{|z|}{h}\cdot\frac{|Q^2(h,w)-1|}{|Q(h,w)-\frac{|z|}{h}|}\leqslant\frac{|z|}{h(Q(h,w)+1)}<1.$$

Так как правая часть последнего неравенства меньше единицы, тогда $|z|<\frac{h}{Q(h,w)}$. Отсюда следует, что $\Phi_w(z)\neq 0$ и более того, $f(w+z)\neq 0$ для значений $|z|<\frac{h}{Q(h,w)}$. Таким образом получаем

$$\operatorname{dist}(w,Z_f)\geqslant\frac{h}{Q(h,w)}. \tag{11}$$

Из (10) и (11) получаем следующую оценку для любого $\varepsilon>0$ при $|w|>r_\varepsilon$

$$\operatorname{dist}(w,Z_f)\geqslant h\exp\left(-\sigma\cdot e^\alpha+\varepsilon)\psi(|w|+h)V'(|w|+h)\frac{h}{|w|}\right), \text{при } |w|>r_\varepsilon. \tag{12}$$

Положим

$$h=\frac{|w|}{\sigma\cdot e^\alpha\psi(|w|)V'(|w|)}. \tag{13}$$

Из (12) получим при $|w|>r_\varepsilon$

$$\operatorname{dist}(w,Z_f)\frac{\psi(|w|)V'(|w|)}{|w|}\geqslant\frac{1}{\sigma\cdot e^\alpha}\exp\left(-\left(1+\frac{\varepsilon}{\sigma\cdot e^\alpha}\right)\frac{\psi(|w|+h)V'(|w|+h)}{\psi(|w|)V'(|w|)}\right).$$

Применяя лемму 2, получаем

$$\operatorname{dist}(w, Z_f)\frac{\psi(|w|)V'(|w|)}{|w|} \geqslant \frac{1}{\sigma\cdot e^{\alpha}}\exp\left(-\left(1+\frac{\varepsilon}{\sigma\cdot e^{\alpha}}\right)\frac{V(|w|+h)}{V(|w|)}\right).$$

Оценим сомножитель $\dfrac{V(|w|+h)}{V(|w|)}$ в показателе экспоненты. По лемме 1, учитывая выбор h в (13) получим

$$\frac{V(|w|+h)}{V(|w|)} = \frac{V\left(|w| + \frac{|w|}{\sigma\cdot e^{\alpha}\psi(|w|)V'(|w|)}\right)}{V(|w|)} \leqslant \left(1+\frac{1}{\sigma\cdot e^{\alpha}\psi(|w|)V'(|w|)}\right)^{\alpha\cdot\varrho}$$

Таким образом, при стремлении $|w|$ к бесконечности, получим асимптотическое неравенство

$$\varliminf_{|w|\to\infty} \operatorname{dist}(w, Z_f)\frac{\psi(|w|)V'(|w|)}{|w|} \geqslant \frac{1}{\sigma\cdot e^{\alpha}}\exp\left(-\left(1+\frac{\varepsilon}{\sigma\cdot e^{\alpha}}\right)\right).$$

откуда и следует утверждение теоремы.

□

Автор выражает благодарность профессору К.Г. Малютину за полезные обсуждения, которые позволили улучшить данную работу.

References

[1] A.J. Macintyre, *Wiman's method and "flat regions" of integral functions*, Quart. J. Math., **9** (1938), 81–88.
[2] I.V. Ostrovskii, A.E. Üreyen, *The growth irregularity of slowly growing entire functions*, Funct. Anal. Its Appl., **40** (2006), 304-–312.
[3] I.V. Ostrovskii, A.E. Üreyen, *Maximum modulus points and zero sets of entire functions of regular growth*, Comptes Rendus Mathematique, **341**:8 (2005), 481–484.
[4] I.V. Ostrovskii, A.E. Üreyen, *Distance between a Maximum Modulus Point and Zero Set of an Entire Function*, Complex Var. Theory Appl., **48**:6 (2003), 341–354.
[5] I.V. Ostrovskii, A.E. Üreyen, *Maximum modulus points and zero sets of entire functions of regular growth*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris. **341**:8 (2005), 381–384.
[6] A.E. Üreyen, *On maximum modulus points and the zero set for an entire function of either zero or infinite order*, Comput. Methods Funct. Theory., **4**:2 (2004), 341–354.
[7] S.I. Fedynyak, P. Filevych, *Distance between a maximum modulus point and zero set of an analytic function*, Matematychni Studii, **52**:1 (2019), 10–23.
[8] B.N. Khabibullin, A generalization of the proximate order, Doklady Bashkirskogo Universiteta, **5**:2 (2020), 1–5.

[9] M.V. Kabanko, K.G. Malyutin, B.N. Khabibullin, On the proximate growth function relative to the model growth function, Itogi nauki i tehniki. Sovremennay matematika i ee prilozeniy. Tematicheskie obzory, **230** (2023), 56–74.
[10] M.V. Kabanko, K.G. Malyutin, On the Proximate Order with Respect to the Model Function, J. Math. Sci., **280** (2024), 692–709.
[11] B. Ya. Levin, Distribution of zeros of entire functions, Amer. Math. Soc. Transl., **5**, Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1964.
[12] E. Seneta, Regularly Varying Functions, Springer Berlin, Heidelberg, 1976.

Mikhail Vladimirovich Kabanko
Kursk State University,
Radishchev st., 33,
305000, Kursk, Russia
Email address: kabankom@gmail.com