

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОДЪЕМА  
МАГМЫ В ДАЙКАХ С УЧЕТОМ КИНЕТИКИ  
КРИСТАЛЛИЗАЦИИР.Ф. АБДУЛЛИН *Представлено Р.Ф. Абдуллиным*

**Abstract:** The dynamics of magma ascent in dykes are strongly influenced by crystallization processes, which affect the rheological properties of silicate melts. We develop a mathematical model of magma ascent that explicitly accounts for crystallization kinetics. The model reproduces the evolution of crystal size distribution and demonstrates how the interplay between nucleation and growth controls the temporal and spatial structure of the crystalline phase. Such modeling provides a quantitative framework for interpreting textural variations in magmatic rocks and linking crystallization dynamics to magma flow.

**Keywords:** magma ascent, dyke, crystal size distribution, numerical modeling.

## 1 Введение

Подъём магмы в дайках является одним из основных механизмов её транспорта от глубинных источников к приповерхностным зонам. При

---

ABDULLIN, R.F., MATHEMATICAL MODELING OF MAGMA ASCENT IN DYKES WITH CRYSTALLIZATION KINETICS.

© 2025 Абдуллин Р.Ф..

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWGG-2022-0002).

подъёме расплав разгружается по давлению и охлаждается, что приводит к дегазации и кристаллизации. Эти процессы изменяют вязкость магмы и, тем самым, определяют режим её течения и динамику роста дайки. Понимание динамики распространения даек важно как для интерпретации вулканической активности, так и для задач рудной геологии [18]. Для порфировых систем, являющихся основным источником меди и значимой доли золота, ключевыми являются процессы глубинного накопления, быстрого подъёма и внедрения флюидонасыщенных расплавов [19, 27, 20].

В ряде работ транспорт магмы моделируется в предположении равновесной кристаллизации, когда фазовый состав определяется текущими термодинамическими условиями [4, 26, 25]. Однако даже для кислых магм с высоким содержанием  $\text{SiO}_2$  скорость подъёма может быть достаточно большой, чтобы кристаллизация отклонялась от равновесного режима. Кристаллизация в таких условиях определяется соотношением между скоростью нуклеации и скоростью роста кристаллов. Эксперименты с контролируемым изменением давления показывают, что скорости нуклеации и роста нелинейно зависят от эффективного переохлаждения  $\Delta T_{\text{eff}}$ , которое связано с разностью между температурой ликвидуса и текущей температурой магмы. При умеренных значениях  $\Delta T_{\text{eff}}$  скорость роста кристаллов максимальна, а при больших значениях возрастает роль нуклеации, что приводит к формированию более мелкозернистой текстуры [2, 3, 22, 23]. Разделение процессов нуклеации и роста позволяет количественно описывать распределение кристаллов по размерам и использовать его как индикатор истории подъёма магмы и параметров питающей системы [1, 24, 21].

Целью настоящей работы является разработка математической модели подъёма магмы в дайке с учётом кинетики кристаллизации. На основе этой модели исследуется, как начальная водонасыщенность расплава и масса подаваемой магмы влияют на скорость подъёма дайки, глубину её остановки и интенсивность кристаллизации. Отдельное внимание уделяется расчёту распределения кристаллов по размерам и выявлению его связи с траекторией декомпрессии и охлаждения магмы. Тем самым, модель позволяет связать параметры магматического источника и динамику течения в дайке с формирующейся кристаллической текстурой.

## 2 Математическая модель

Математическая модель подъёма магмы в дайках, рассматриваемая в данной работе, основана на модели, предложенной ранее в статье [4]. Здесь вкратце приведем основные уравнения модели. Будем считать, что дайка представляет собой трещину постоянной ширины, растущую в вертикальном направлении. Пусть вертикальная ось задается координатой  $x$ . Магма представляет собой многофазную среду, и её плотность

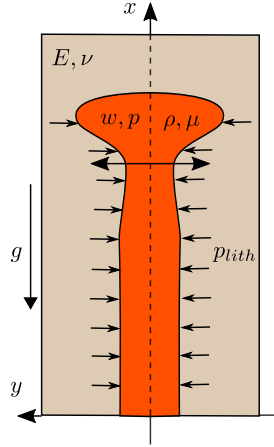


Рис. 1. Схема системы «дайка — вмещающая порода». Магма в дайке характеризуется вязкостью  $\mu$ , плотностью  $\rho$ , давлением  $p$  и температурой  $T$ . Вмещающая порода моделируется как линейная упругая среда с постоянными модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$

может быть представлена как сумма объёмных плотностей всех компонентов

$$\rho = \rho_m + \rho_c + \rho_d + \rho_g, \quad (1)$$

где  $\rho_m$ ,  $\rho_c$ ,  $\rho_d$  и  $\rho_g$  — соответственно объёмные плотности (т.е. плотность, отнесённая к полному объёму магмы) расплава, кристаллической фазы, растворённого и выделившегося газа. Их значения выражаются через плотности соответствующих чистых фаз следующим образом:

$$\rho_g = \alpha \rho_g^0, \quad (2)$$

$$\rho_c = (1 - \alpha) \beta \rho_c^0, \quad (3)$$

$$\rho_d = (1 - \alpha)(1 - \beta) c \rho_m^0, \quad (4)$$

$$\rho_m = (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - c) \rho_m^0. \quad (5)$$

Здесь  $\alpha$  — объёмная концентрация выделившегося газа (пузырьков),  $\beta$  — объёмная концентрация кристаллической фазы в расплаве без пузырьков,  $c$  — массовая концентрация растворённого газа в расплаве.  $\rho_g^0$  и  $\rho_c^0$  — плотности чистых газовой и кристаллической фаз соответственно, а  $\rho_m^0$  — средняя плотность жидкого расплава, зависящая от содержания в нём растворённых летучих компонентов.

Как и в работе [4], считаем, что все фазы движутся с одинаковой скоростью  $v(y)$ . Тогда для каждой фазы можно записать локальный закон сохранения массы

$$\frac{\partial \rho_N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_N v(y)) = \mathcal{I}_N, \quad N = g, c, d, m. \quad (6)$$

Здесь  $\mathcal{I}_N$  описывает массовый обмен между фазами и связан с процессами кристаллизации жидкого расплава и дегазации растворенного газа. В общем случае параметры магмы могут изменяться по раскрытию трещины [15, 17], однако в настоящей работе используется осреднённая по раскрытию постановка. Тогда просуммировав уравнения (6) по всем фазам и интегрируя по раскрытию дайки, получаем уравнение сохранения массы для всего объёма магмы в дайке в приближении Рейнольдса [16]

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho q)}{\partial x} = \rho_{ch} Q_{ch}(t) \delta(x - x_{ch}), \quad (7)$$

где  $w$  — раскрытие дайки,  $Q_{ch}$  — скорость поступления магмы из источника на глубине  $x_{ch}$ ,  $\rho_{ch}$  — плотность магмы в источнике, а  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака. Объёмный расход магмы в трещине  $q$  определяется интегрированием параболического профиля скорости по поперечной координате  $y$

$$q(x) = \int_{-w/2}^{w/2} v(y) dy = -\frac{w^3}{12\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \right). \quad (8)$$

Вязкость магмы  $\mu$  определяется, прежде всего, температурой  $T$ , составом расплава  $\mathbf{X}$  и объёмной долей кристаллов

$$\mu = \mu_m(T, \mathbf{X}) \cdot \theta(\beta), \quad (9)$$

где  $\mu_m(T, \mathbf{X})$  — вязкость чистого расплава, рассчитываемая по модели из [10]. Параметр состава  $\mathbf{X}$  задаётся массовыми долями основных оксидов расплава и растворенной водой ( $\text{SiO}_2$ ,  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{TiO}_2$ ,  $\text{FeO}_{\text{tot}}$ ,  $\text{MgO}$ ,  $\text{CaO}$ ,  $\text{Na}_2\text{O}$ ,  $\text{K}_2\text{O}$  и  $\text{H}_2\text{O}$ ). Функция  $\theta(\beta)$  учитывает влияние объёмной доли кристаллов на вязкость и задаётся аппроксимацией [11]

$$\theta(\beta) = \phi(\beta) \frac{1 + \left( \frac{\beta}{\beta_*} \right)^\delta}{\left( 1 - \varepsilon \operatorname{erf} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}\beta}{2\varepsilon\beta_*} \left[ 1 + \frac{\beta}{\beta_*} \right]^\gamma \right\} \right)^{2.5\beta_*}}. \quad (10)$$

Коррекция  $\phi(\beta)$  учитывает изменение состава остаточного расплава. Для функции  $\phi(\beta)$  используется аппроксимация на основе работы [12], полученная для расплавов вулкана Шивелуч в диапазоне содержаний  $\text{SiO}_2$  69–77 масс.%

$$\phi(\beta) = \exp [a_1(\beta - \beta_{ch}) + a_2(\beta - \beta_{ch})^2], \quad (11)$$

Здесь  $\beta_{ch}$  — объёмная доля кристаллов в магматическом очаге. В расчётах используются значения  $\beta_* = 0.67$ ,  $\gamma = 3.99$ ,  $\delta = 16.94$ ,  $a_1 = 4.33$  и  $a_2 = 10.48$ .

Закон сохранения энергии для потока магмы внутри дайки имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w e) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho e q) = 2q_n - p \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \Phi + Q_c. \quad (12)$$

Здесь  $q_n$  — тепловой поток через стенку дайки,  $\Phi$  — член, учитывающий вязкую диссипацию, а  $Q_c$  — скрытая теплота кристаллизации. Удельная внутренняя энергия магмы задаётся как функция температуры  $T$  и давления  $p$

$$e(p, T) = \frac{e_g(p, T)\rho_g + C_m(\rho_m + \rho_d)T + C_c\rho_c T}{\rho}, \quad (13)$$

где  $e_g(p, T)$  — удельная внутренняя энергия выделившегося газа,  $C_m$  — удельная теплоёмкость расплава,  $C_c$  — удельная теплоёмкость кристаллической фазы.

Из-за симметрии задачи относительно  $y = 0$  уравнение теплопроводности в породе решается только для стенки  $y = w/2$ . Тогда член  $2q_n$  в правой части уравнения (12) описывает суммарные потери тепла через обе стенки трещины  $y = \pm w/2$  и выражается как

$$q_n = -k_r \frac{\partial T_r}{\partial y}, \quad (14)$$

где  $k_r$  — теплопроводность породы,  $T_r$  — температура вмещающих пород,  $y$  — координата, перпендикулярная к границе дайки. Уравнение теплопроводности для вмещающей породы записывается для каждого сечения по глубине  $x$

$$\rho_r C_r \frac{\partial T_r}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_r \frac{\partial T_r}{\partial y} \right) = 0. \quad (15)$$

Одномерное приближение по координате  $y$  обусловлено выраженной анизотропией характерных пространственных и временных масштабов задачи. Кроме того, скорость подъёма магмы существенно превышает характерную скорость продольного теплопроводного переноса вдоль оси  $x$ , поэтому этим вкладом в первом приближении можно пренебречь. Уравнение (15) решается в слое  $w/2 < y < L_y$ , где  $L_y = \omega \sqrt{\frac{k_r}{\rho_r C_r} t_{\max}}$ . Параметр  $\omega$  выбирается достаточно большим, чтобы влияние внешней границы на температурное поле вблизи стенки дайки было пренебрежимо малым. На стенке дайки  $y = w/2$  температура породы принимается равной температуре магмы  $T$ . На внешней границе  $y = L_y$  задаётся температура вмещающих пород  $T_\infty(x)$ , а в начальный момент времени принимается  $T_r = T_\infty(x)$ :

$$\begin{aligned} T_r|_{y=\frac{w}{2}} &= T, \\ T_r|_{y=L_y} &= T_\infty(x), \\ T_r|_{t=0} &= T_\infty(x). \end{aligned} \quad (16)$$

Для упрощения постановки используется линейный профиль температуры вмещающих пород

$$T_\infty(x) = 20 + (T_{ch} - 20) \frac{x}{x_{ch}}, \quad (17)$$

так что  $T_\infty(0) = 20^\circ\text{C}$  на поверхности и  $T_\infty(x_{ch}) = T_{ch}$  на глубине источника.

Второй член в правой части уравнения (12) представляет работу сил давления, связанную с изменением плотности, усреднённую по раскрытию дайки.

Выделение тепла вследствие вязкого трения  $\Phi$  может быть аналитически рассчитано для параболического профиля скорости

$$\Phi = \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy = \frac{w^3}{12\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \right)^2. \quad (18)$$

Величина  $Q_c$  в уравнении (12) описывает выделение скрытой теплоты кристаллизации

$$Q_c = \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} L_* \mathcal{I}_c dy = L_* \left[ \frac{\partial(\rho_c w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_c q)}{\partial x} \right]. \quad (19)$$

Давление магмы внутри дайки складывается из литостатического давления  $p_{\text{lith}}$  и дополнительного упругого давления  $p_e$ , возникающего из-за раскрытия дайки

$$p = p_{\text{lith}} + p_e, \quad (20)$$

где литостатическое давление  $p_{\text{lith}}$  определяется как

$$p_{\text{lith}}(x) = p_{\text{atm}} + g \int_x^0 \rho_r(x') dx', \quad (21)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,  $\rho_r(x)$  — плотность вмещающей породы на глубине  $x$ , а  $p_{\text{atm}}$  — атмосферное давление на поверхности. Упругое давление  $p_e$ , связанное с раскрытием трещины  $w$  в упругой среде, выражается через интегральное уравнение [5]

$$p_e(x, t) = -\frac{E}{4\pi(1-\nu^2)} \int_{x_{ch}}^{l(t)} \frac{\partial w(s, t)}{\partial s} \frac{ds}{s-x}, \quad (22)$$

где  $E$  — модуль Юнга вмещающей породы,  $\nu$  — коэффициент Пуассона, а  $l(t)$  — глубина верхнего фронта дайки.

Распространение верхнего фронта дайки  $l(t)$  описывается в рамках линейной механики разрушения [7]

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{w(s)}{s^{1/2}} = \frac{K'}{E'}, \quad (23)$$

где  $K' = \sqrt{\frac{32}{\pi}} K_{Ic}$  и  $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ ,  $K_{Ic}$  — трещиностойкость вмещающей породы, а  $s$  — расстояние до фронта дайки. Дополнительно на верхнем

фронте задаётся условие нулевого расхода

$$q(l(t), t) = 0. \quad (24)$$

**2.1. Кинетика кристаллизации.** В предыдущей работе [4] рассматривалась равновесная зависимость объёмной доли кристаллов  $\beta$  от температуры и давления. Однако в реальных условиях подъёма магмы в дайке кристаллизация расплава представляет собой более сложный процесс [1]. Она основана на процессах нуклеации и роста кристаллов, зависящих от переохлаждения магмы. При этом сам расплав может состоять из нескольких фаз, каждая из которых кристаллизуется при определённых условиях.

Пусть в магме содержится  $N$  кристаллических фаз, тогда можно записать

$$\beta = \sum_{i=1}^N \beta_i. \quad (25)$$

Для каждой фазы введём функцию распределения кристаллов по размеру  $n_i$ . Тогда объёмная доля кристаллов каждой фазы определяется как

$$\beta_i = \sigma_i \int_0^{\infty} n_i l^3 dl. \quad (26)$$

Здесь  $\sigma_i$  — поправка на форму кристаллов  $i$ -й фазы,  $l$  — характерный размер (диаметр) кристаллов. Для каждой фазы можно записать локальное уравнение кинетики кристаллизации в следующем виде:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_i v(y)) + U_i \frac{\partial n_i}{\partial l} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (27)$$

где  $U_i$  — скорость роста кристаллов  $i$ -й фазы. Начальные и граничные условия задаются как

$$n_i|_{t=0} = n_{i,0}, \quad (28)$$

$$n_i|_{l=0} = \frac{I_i}{U_i}, \quad (29)$$

$$n_i|_{x=x_{ch}} = n_{i,ch}, \quad (30)$$

где  $n_{i,0}$  — начальное распределение кристаллов по размеру,  $n_{i,ch}$  — распределение в магме источника, а  $I_i$  — скорость нуклеации кристаллов. В предположении, что функция распределения  $n_i$  не зависит от  $y$ , проинтегрируем (27) по раскрытию дайки

$$\frac{\partial(n_i w)}{\partial t} + \frac{\partial(n_i q)}{\partial x} + U_i \frac{\partial(n_i w)}{\partial l} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (31)$$

Эффективное переохлаждение расплава магмы в дайке определяется как

$$\Delta T_{\text{eff}} = (T_L - T) (1 - \beta/\beta_{\text{eq}}), \quad (32)$$

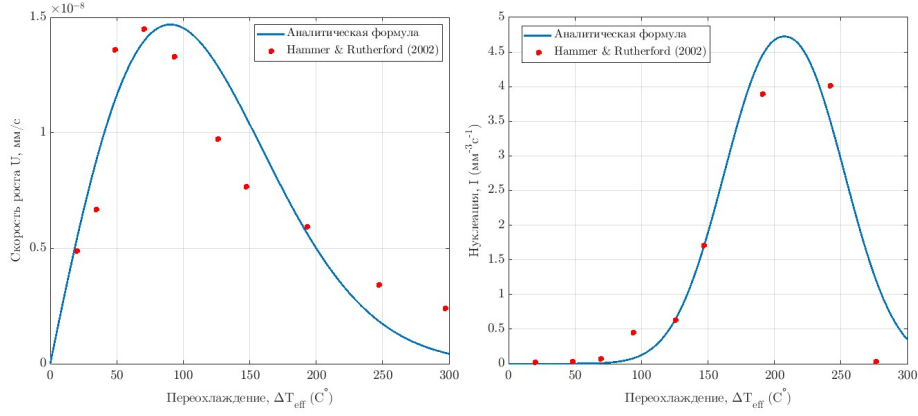


Рис. 2. Сравнение зависимостей скоростей роста  $U$  и нуклеации  $I$ , определяемых уравнениями (33) и (34), с экспериментальными данными Hammer & Rutherford [2] (рис. 15). Красные точки — экспериментальные значения, синяя линия — аналитические зависимости, вычисленные при температуре  $T = 780^{\circ}\text{C}$ , соответствующей условиям эксперимента. Использованы параметры:  $U_0 = 1.2 \times 10^{-8} \text{ мм/с}$ ,  $I_0 = 1.96 \times 10^2 \text{ мм}^{-3}\text{с}^{-1}$ ,  $a_g = 3931$ ,  $b_g = -10.81$ ,  $c_g = 135.2$ ,  $a_n = 3931$ ,  $b_n = 207.5$ ,  $c_n = 59.84$ .

где  $T_L$  — температура ликвидуса,  $T$  — текущая температура расплава,  $\beta$  — текущая доля кристаллов, а  $\beta_{\text{eq}}$  — равновесная доля при данных  $P$ – $T$  условиях. Скорость роста кристаллов  $U$  и скорость нуклеации  $I$  зависят от величины эффективного переохлаждения и аппроксимируются в виде

$$U = U_0 \exp\left(-\frac{a_g}{T}\right) \Delta T_{\text{eff}} \exp\left(-\left|\frac{\Delta T_{\text{eff}} - b_g}{c_g}\right|^2\right), \quad (33)$$

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{a_n}{T}\right) \exp\left(-\left|\frac{\Delta T_{\text{eff}} - b_n}{c_n}\right|^{2.2}\right). \quad (34)$$

На рисунке 2 изображены скорость роста кристаллов по размеру (слева) и скорость нуклеации (справа), где параметры подобраны по экспериментальным данным (рис. 15 из работы [2]) для расплава при температуре  $T = 780^{\circ}\text{C}$ . Полученные кривые хорошо воспроизводят наблюдаемые в экспериментах зависимости. При увеличении переохлаждения наблюдается рост скоростей, а при больших  $\Delta T_{\text{eff}}$  — их снижение.

Таким образом, задача подъёма магмы в дайке сводится к совместному решению уравнений упругости (20)–(22), законов сохранения массы (7) и энергии (12), а также кинетики кристаллизации (31). Искомые величинами являются раскрытие дайки  $w(x, t)$ , давление  $p(x, t)$ , температура  $T(x, t)$ , распределение кристаллов  $n_i(x, l, t)$ , а также положение



верхнего фронта  $l(t)$ . Для описания насыщения магмы смешанным флюидом  $\text{H}_2\text{O}-\text{CO}_2$  используется модель MagmaSat [8], реализованная в пакете VESIcal [9]. Постановка замыкается условием поступления магмы при  $x = x_{ch}$ , условиями на верхнем фронте дайки и начальными и граничными условиями для задач теплопроводности и кинетики кристаллизации.

**2.2. Численная схема.** Разобьем ось  $x$  на контрольные объёмы  $\mathcal{A}_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  с центрами  $x_i$  и шагом  $\Delta x$ . Пусть  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ , где  $\Delta t$  — шаг по времени. Считаем, что все основные параметры задаются кусочно-постоянной аппроксимацией

$$f(x, t) \approx \sum_{i=1}^{N_x} f_i(t) H_i(x), \quad (35)$$

$$H_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathcal{A}_i, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (36)$$

Интегральное уравнение упругости (22) дискретизируется методом разрывных смещений [6], что приводит к соотношению

$$p_i = p_{\text{lith}, i} + \sum_{j=1}^{N_x} C_{ij} w_j, \quad (37)$$

где элементы матрицы влияния имеют вид

$$C_{ij} = -\frac{E}{2\pi(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{x_i - x_{j+1/2}} - \frac{1}{x_i - x_{j-1/2}} \right). \quad (38)$$

Уравнения сохранения массы (7) и энергии (12) аппроксимируются методом конечных объёмов после интегрирования по каждому контрольному объёму и по времени [14, 4]. Для закона сохранения массы получаем неявную схему

$$\frac{(\rho w)_i^{n+1} - (\rho w)_i^n}{\Delta t} + \frac{(\rho q)_{i+1/2}^{n+1} - (\rho q)_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta x} = \frac{\rho_{ch} Q_{ch}^{n+1}}{\Delta x} I_{ch}(x_i), \quad (39)$$

где  $I_{ch}(x_i) = 1$ , если  $x_{ch} \in \mathcal{A}_i$ , и  $I_{ch}(x_i) = 0$  иначе, а  $Q_{ch}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} Q_{ch}(t) dt$ .

Для закона сохранения энергии используется аналогичная конечно-объёмная аппроксимация

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho w e)_i^{n+1} - (\rho w e)_i^n}{\Delta t} + \frac{(\rho e q)_{i+1/2}^{n+1} - (\rho e q)_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta x} = \\ & = \left( 2q_n - p \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \Phi + Q_c \right)_i^{n+1}. \end{aligned} \quad (40)$$

Уравнение теплопроводности вмещающих пород (15) в каждом фиксированном сечении по  $x$  решается неявной схемой по координате  $y$ .

На каждом шаге по времени вычисления выполняются последовательно в три этапа. На первом этапе при фиксированном положении верхнего фронта  $l(t)$  выполняется итерационный процесс, в ходе которого из уравнений упругости (20)–(22) и закона сохранения массы (7) находят раскрытие дайки  $w$ , давление магмы  $p$  и объёмный расход магмы  $q$ . Затем из закона сохранения энергии (12) определяется температура магмы  $T$ , после чего по табличным термодинамическим зависимостям для системы  $\text{H}_2\text{O}-\text{CO}_2$  обновляются объёмная доля выделившегося газа  $\alpha$ , плотность газовой фазы  $\rho_g^0$ , а также распределение  $\text{H}_2\text{O}$  и  $\text{CO}_2$  между растворённой и выделившейся фазами.

На втором этапе уравнение кинетики кристаллизации (31) решается методом конечных объёмов с использованием противопоточной схемы. Для этого вводится разбиение по размеру кристаллов  $0 = l_0 < l_1 < \dots < l_M = L$ . Тогда соотношение (26) для объёмной концентрации кристаллов можно записать в виде

$$\beta_i \approx \sigma_i \sum_{j=0}^{M-1} n_{i,j} \frac{l_{j+1}^4 - l_j^4}{4}, \quad (41)$$

где  $n_{i,j}$  — значение функции распределения для  $i$ -ой фазы в  $j$ -м интервале по размеру. Дискретная форма уравнения (31) на контрольном объёме  $[x_{k-1/2}, x_{k+1/2}] \times [l_j, l_{j+1}]$  записывается как

$$\begin{aligned} & \frac{(n_i w)_{k,j}^{n+1} - (n_i w)_{k,j}^n}{t^{n+1} - t^n} + \frac{(n_i q)_{k+1/2,j}^{n+1} - (n_i q)_{k-1/2,j}^{n+1}}{x_{k+1/2} - x_{k-1/2}} + \\ & U_i^{n+1} \frac{(n_i w)_{k,j+1}^{n+1} - (n_i w)_{k,j}^{n+1}}{l_{j+1} - l_j} = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

По полученному решению обновляются объёмные доли фаз  $\beta_i$  и суммарная доля кристаллов  $\beta$ .

На третьем этапе положение верхнего фронта дайки корректируется на основе асимптотического решения в окрестности вершины трещины [14]. После этого этапы текущего временного шага повторяются до достижения сходимости по всем неизвестным.

### 3 Численные результаты

В численных экспериментах рассматривается подъём кислой магмы, по минеральному составу преимущественно представленной плагиоклазом и мафическими минералами (пироксены, амфиболы, биотит). Согласно анализам андезитовых систем вулкана Суфриер-Хиллс [3], эти две фазы составляют основную долю кристаллического материала, тогда как суммарное содержание остальных минералов не превышает 2 %. Поэтому в расчётах они не учитывались. Для вычисления эффективного переохлаждения (32) по термодинамическим данным, полученным

ТАБЛИЦА 1. Параметры численных расчётов

Обозначение	Описание	Значение
$C_c$	удельная теплоёмкость кристаллов, Дж/кг·К	1200
$C_m$	удельная теплоёмкость расплава, Дж/кг·К	1200
$C_r$	удельная теплоёмкость вмещающей породы, Дж/кг·К	1200
$E$	модуль Юнга вмещающих пород, ГПа	15
$K_{Ic}$	трециностойкость вмещающей породы, МПа·м <sup>1/2</sup>	1
$L_*$	удельная теплота кристаллизации, Дж/кг	$3.5 \times 10^5$
$x_{ch}$	глубина магматического источника, км	30
$\rho_c$	плотность кристаллической фазы, кг/м <sup>3</sup>	2700
$\rho_r$	плотность вмещающей породы, кг/м <sup>3</sup>	2700
$\nu$	коэффициент Пуассона вмещающих пород	0.25
$T_{ch}$	температура магмы в источнике, °C	850
$t_{ch}$	время поступления магмы из очага, с	$10^4$

с использованием библиотеки *MAGEMin* [13], определяются температура ликвидуса  $T_L$  и равновесная доля кристаллов  $\beta_{eq}$  для плагиоклаза и мафической фазы при текущих давлении и температуре.

В таблице 1 приведены значения параметров для численных экспериментов. Поступление магмы из источника задаётся как  $Q_{ch}(t) = Q_{ch}$  при  $0 \leq t \leq t_{ch}$  и  $Q_{ch}(t) = 0$  при  $t > t_{ch}$ . Общая масса магмы на единицу ширины дайки определяется как  $M = \int_0^{t_{ch}} \rho_{ch} Q_{ch}(t) dt = \rho_{ch} Q_{ch} t_{ch}$ . Как показано в работе [4], изменение  $t_{ch}$  слабо влияет на итоговую картину динамики распространения дайки в случае постоянного  $M$ .

В параметрических расчётах варьировались начальная водонасыщенность  $c_{H_2O}$  и масса магмы  $M$  на единицу ширины дайки. Параметр  $c_{H_2O}$  задаёт массовую концентрацию растворённой воды в магме источника при  $x = x_{ch}$ . В базовом случае принималось  $c_{H_2O} = 6.23$  масс.%, а диапазон его изменения составлял 3–11 масс.%. Для массы магмы использовалось базовое значение  $M = 50 \times 10^6$  кг/м.

На рисунке 3 показано влияние начальной водонасыщенности расплава на кристаллизацию и динамику подъёма магмы в дайке. Повышение содержания воды снижает вязкость расплава, что способствует более быстрому подъёму магмы (см. рис. 3а, б). Однако при увеличении скорости подъёма магма достигает более холодных слоёв, вследствие чего эффективное переохлаждение вблизи кончика дайки возрастает. В этих

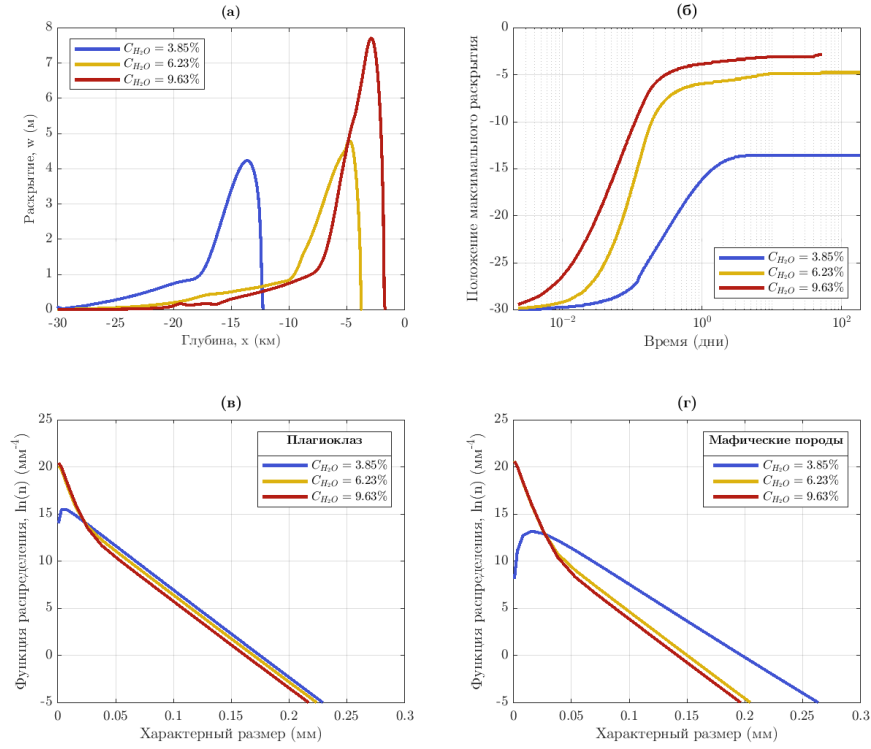


Рис. 3. Влияние начальной водонасыщенности расплава магмы на скорость подъёма и распределение кристаллов: (а) профиль раскрытия  $w(x)$ , (б) положение максимального раскрытия дайки от времени, распределение кристаллов по размеру (в) для плагиоклаза и (г) для мафических минералов в точке максимального раскрытия дайки. Синие линии — расчёт при  $C_{H_2O} = 3.85\%$  и зелёные — при  $C_{H_2O} = 6.23\%$  (момент времени  $t = 100$  дней), красные — при  $C_{H_2O} = 9.63\%$  (момент времени  $t = 50$  дней).

условиях процесс нуклеации начинает доминировать над ростом кристаллов, что отражено на функции распределения кристаллов по размеру (рис. 3в, г). При более плавном подъёме, соответствующем низкому содержанию воды, процесс кристаллизации протекает близко к равновесному режиму, как показано на рисунке 4. Здесь сплошные линии соответствуют рассчитанной объёмной доле кристаллов  $\beta$ , пунктирные — равновесному значению  $\beta_{eq}$ , вычисленному при тех же давлении и температуре. При большей водонасыщенности отклонение от равновесного состояния становится более заметным, и скорость образования кристаллов начинает отставать от термодинамического предела.

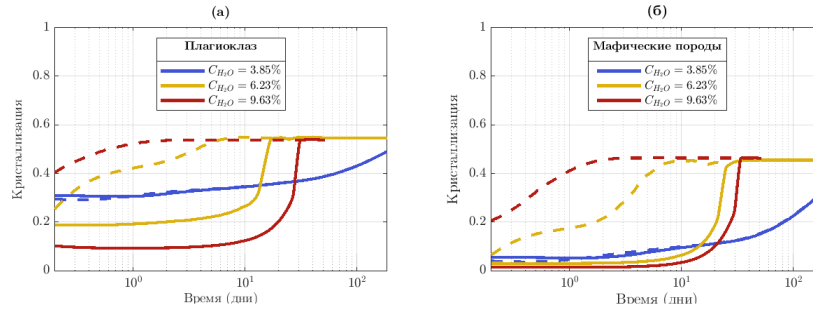


Рис. 4. Влияние начальной водонасыщенности расплава магмы на кристаллизацию во времени в точке максимального раскрытия дайки для плагноклаза (а) и для мафических минералов (б). Сплошными линиями показана объёмная концентрация кристаллов  $\beta$ , пунктирными — равновесное значение  $\beta_{eq}$ , вычисленное при рассчитанных давлении и температуре. Синие линии — расчёт при  $c_{H_2O} = 3.85\%$ , зелёные — при  $c_{H_2O} = 6.23\%$ , красные — при  $c_{H_2O} = 9.63\%$ .

На рисунке 5 представлены результаты расчётов для различных значений массы магмы, поступающей из очага. Характер изменения параметров аналогичен результатам, полученным при варьировании водонасыщенности расплава. При меньшей массе  $M$  подъём магмы происходит медленнее, что приводит к меньшим скоростям охлаждения и более равновесным условиям кристаллизации. В этих случаях доминирует процесс роста кристаллов, формируются более крупные зёрна и меньшая плотность центров нуклеации. Напротив, при большей массе потока скорость подъёма увеличивается, переохлаждение у фронта возрастает, и преобладает нуклеация с образованием множества мелких кристаллов.

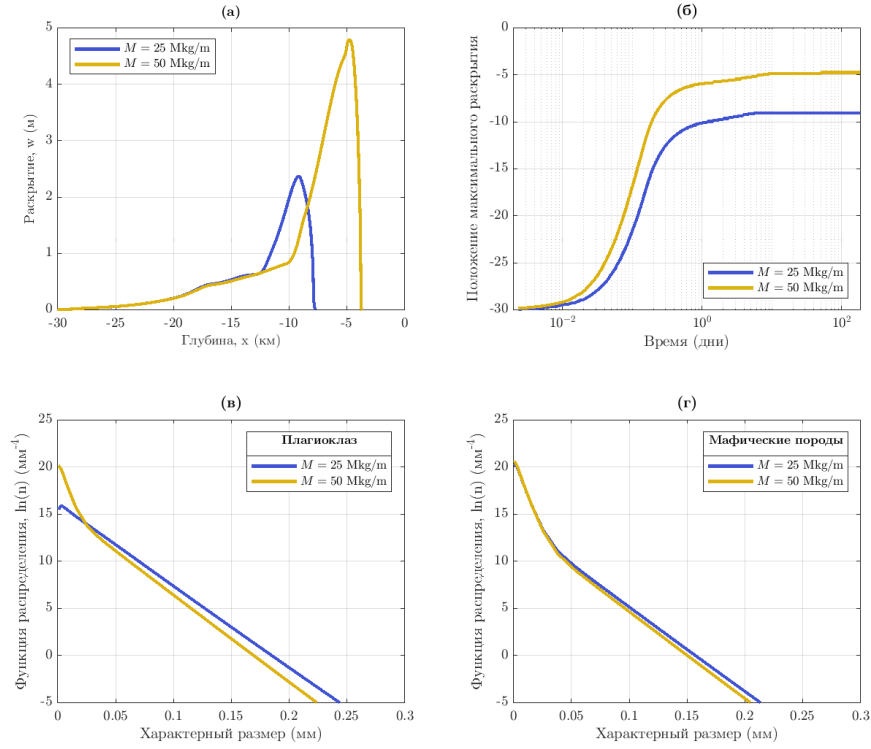


Рис. 5. Влияние общей массы магмы в дайке на скорость подъёма и распределение кристаллов: (а) профиль раскрытия  $w(x)$ , (б) положение максимального раскрытия дайки от времени, распределение кристаллов по размеру (в) для плагиоклаза и (г) для мафических минералов в точке максимального раскрытия дайки. Синие линии — расчёт при  $M = 25 \text{ Mg/m}$ , жёлтые — при  $M = 50 \text{ Mg/m}$ . Профили раскрытия и распределения кристаллов (а, в, г) показаны для момента времени  $t = 100$  дней.

## 4 Заключение

В работе представлена математическая модель подъёма магмы в дайке с учётом кинетики кристаллизации. В отличие от равновесных подходов, модель описывает процессы нуклеации и роста кристаллов в явном виде через зависимости от эффективного переохлаждения, что позволяет учитывать задержку кристаллизации при подъёме магмы. Такое описание обеспечивает согласованное рассмотрение тепловых, гидродинамических и кинетических эффектов, определяющих динамику магмы в дайке.

Численные расчёты показали, что увеличение начальной водонасыщенности или массы магмы приводит к ускорению её подъёма и росту

переохлаждения вблизи кончика дайки, где активнее развивается нуклеация. При меньших значениях этих параметров движение медленнее, кристаллизация протекает ближе к равновесному состоянию, и преобладает рост уже существующих кристаллов. Модель воспроизводит распределение кристаллов по размерам и позволяет количественно связать микроструктуру магматических продуктов с динамикой потока в дайке.

Полученные результаты могут быть использованы для анализа тектурных данных, оценки условий подъема магмы и совершенствования моделей магматических систем, в которых кристаллизация влияет на вязкость расплава.

### Благодарности

Автор выражает благодарность Мельнику О. Э. за обсуждение постановки задачи, идейную поддержку и критические замечания, оказавшие существенное влияние на содержание работы. Также автор благодарит научного руководителя Головина С. В. за общее руководство и внимание к выполнению исследования.

### References

- [1] O. Melnik, R.S.J. Sparks, *Dynamics of Magma Ascent and Lava Extrusion at Soufriere Hills Volcano, Montserrat*, in: The Eruption of Soufriere Hills Volcano, Montserrat from 1995 to 1999 (eds. T.H. Druitt, B.P. Kokelaar), Geological Society of London, Memoirs, **21** (2002), 153 – 172.
- [2] J.E. Hammer, M.J. Rutherford, *An Experimental Study of the Kinetics of Decompression-Induced Crystallization in Silicic Melt*, Journal of Geophysical Research: Solid Earth, **107**:B1 (2002), ECV 8-1–ECV 8-24.
- [3] S. Couch, R.S.J. Sparks, M.R. Carroll, *The Kinetics of Degassing-Induced Crystallization at Soufriere Hills Volcano, Montserrat*, Journal of Petrology, **44**:8 (2003), 1477–1502.
- [4] R. Abdullin, O. Melnik, A. Rust, J. Blundy, E. Lgotina, S. Golovin, *Ascent of volatile-rich felsic magma in dykes: a numerical model applied to deep-sourced porphyry intrusions*, Geophysical Journal International, **236**:3 (2024), 1863–1876.
- [5] N.I. Muskhelishvili, J.R.M. Radok, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity: Fundamental Equations, Plane Theory of Elasticity, Torsion, and Bending*, P. Noordhoff, 1963.
- [6] S.L. Crouch, A.M. Starfield, F.J. Rizzo, *Boundary element methods in solid mechanics*, Journal of Applied Mechanics, **50** (1983), 704.
- [7] J.R. Rice et al., *Mathematical analysis in the mechanics of fracture*, Fracture: an advanced treatise, **2** (1968), 191–311.
- [8] M.S. Ghiorso, G.A.R. Gualda, *An H<sub>2</sub>O–CO<sub>2</sub> mixed fluid saturation model compatible with rhyolite-MELTS*, Contributions to Mineralogy and Petrology, **169**:6 (2015), 53.
- [9] K. Iacovino, S. Matthews, P.E. Wieser, G.M. Moore, F. Bégué, *VESICAL Part I: An Open-Source Thermodynamic Model Engine for Mixed Volatile (H<sub>2</sub>O–CO<sub>2</sub>) Solubility in Silicate Melts*, Earth and Space Science, **8**:11 (2021), e2020EA001584.
- [10] D. Giordano, J.K. Russell, D.B. Dingwell, *Viscosity of magmatic liquids: A model*, Earth and Planetary Science Letters, **271**:1 (2008), 123–134.

- [11] A. Costa, *Viscosity of high crystal content melts: Dependence on solid fraction*, Geophysical Research Letters, **32**:22 (2005).
- [12] O. Dirksen, M.C.S. Humphreys, P. Pletchov, O. Melnik, Y. Demyanchuk, R.S.J. Sparks, S. Mahony, *The 2001–2004 dome-forming eruption of Shiveluch volcano, Kamchatka: Observation, petrological investigation and numerical modelling*, Journal of Volcanology and Geothermal Research, **155**:3 (2006), 201–226.
- [13] N. Riel, B.J.P. Kaus, E.C.R. Green, N. Berlie, *MAGEMin, an Efficient Gibbs Energy Minimizer: Application to Igneous Systems*, Geochemistry, Geophysics, Geosystems, **23**:7 (2022), e2022GC010427.
- [14] E.V. Dontsov, A.P. Peirce, *A multiscale implicit level set algorithm (ILSA) to model hydraulic fracture propagation incorporating combined viscous, toughness, and leak-off asymptotics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **313** (2017), 53–84.
- [15] R. Abdullin, O. Melnik, A. Rust, *A quasi-2-D model of dike propagation with non-equilibrium magma crystallization*, Geophysical Journal International, **244**:1 (2025), ggaf447.
- [16] A.Z. Szeri, *Fluid Film Lubrication*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2010.
- [17] A. Costa, G. Macedonio, *Viscous heating effects in fluids with temperature-dependent viscosity: triggering of secondary flows*, Journal of Fluid Mechanics, **540** (2005), 21–38.
- [18] E. Rivalta, B. Taisne, A.P. Bunger, R.F. Katz, *A review of mechanical models of dike propagation: Schools of thought, results and future directions*, Tectonophysics, **638** (2015), 1–42.
- [19] R.H. Sillitoe, *Porphyry copper systems*, Economic Geology, **105**:1 (2010), 3–41.
- [20] R.R. Loucks, *Deep entrapment of buoyant magmas by orogenic tectonic stress: Its role in producing continental crust, adakites, and porphyry copper deposits*, Earth-Science Reviews, **220** (2021), 103744.
- [21] J. Blundy, K. Cashman, *Petrologic Reconstruction of Magmatic System Variables and Processes*, Reviews in Mineralogy and Geochemistry, **69** (2008), 179–239.
- [22] C. Brugger, J. Hammer, *Crystallization Kinetics in Continuous Decompression Experiments: Implications for Interpreting Natural Magma Ascent Processes*, Journal of Petrology, **51** (2010), 1941–1965.
- [23] C.R. Brugger, J.E. Hammer, *Crystal size distribution analysis of plagioclase in experimentally decompressed hydrous rhyodacite magma*, Earth and Planetary Science Letters, **300**:3 (2010), 246–254.
- [24] O.E. Melnik, J.D. Blundy, A.C. Rust, D.D. Muir, *Subvolcanic Plumbing Systems Imaged through Crystal Size Distributions*, Geology, **39**:4 (2011), 403–406.
- [25] G. La Spina, M. Burton, M. de’ Michieli Vitturi, F. Arzilli, *Role of Syn-Eruptive Plagioclase Disequilibrium Crystallization in Basaltic Magma Ascent Dynamics*, Nature Communications, **7** (2016), 13402.
- [26] G. La Spina, M. Burton, M. de’ Michieli Vitturi, *Temperature Evolution during Magma Ascent in Basaltic Effusive Eruptions: A Numerical Application to Stromboli Volcano*, Earth and Planetary Science Letters, **426** (2015), 89–100.
- [27] Z.-F. Yang, *Combining Quantitative Textural and Geochemical Studies to Understand the Solidification Processes of a Granite Porphyry: Shanggusi, East Qinling, China*, Journal of Petrology, **53**:9 (2012), 1807–1835.



RUSTAM FARITOVICH ABDULLIN  
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,  
PIROGOVA STR., 1,  
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
LAVRENTYEV INSTITUTE OF HYDRODYNAMICS SB RAS,  
PR. LAVRENTYEVA, 15,  
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*Email address:* [r.abdullin@ng.nsu.ru](mailto:r.abdullin@ng.nsu.ru)