Отзыв на статью Zadorin A.I. "Analysis of formulas for numerical differentiation of functions with large gradients"

В работе исследуется вопрос численного дифференцирования функций с большими градиентами. Предполагается, что для функции $u(x)$ справедлива декомпозиция:

$$u(x) = p(x) + \gamma \Phi(x),\ x \in [0, 1], \tag{1}$$

где $p(x)$ – регулярная составляющая с ограниченными производными до некоторого порядка, $\Phi(x)$ – составляющая, отвечающая за большие градиеннты функции $u(x)$; $p(x)$ и γ в явном виде не заданы.

В частности, декомпозиция (1) известна для решения сингулярно-возмущенной краевой задачи. При наличии экспоненциального пограничного слоя в (1)

$$\Phi(x) = e^{-\alpha x/\varepsilon}, \quad \alpha > 0, \varepsilon \in (0, 1]. \tag{2}$$

Производные составляющей $\Phi(x)$ из (2) неограниченно растут с уменьшением ε.

В работе показано, что в случае функции с декомпозицией (1)-(2) при малых значениях ε погрешность классических полиномиальных формул численного дифференцирования порядка $O(1)$ в случае равномерной сетки, если параметр ε достаточно мал. Таким образом, задача построения формул численного дифференцирования для функций с декомпозицией (1) актуальна.

Чтобы погрешность формул численного дифференцирования не росла из-за больших градиентов функции $\Phi(x)$, в работе предложено два подхода:

1) Применение классических полиномиальных формул численного дифференцирования на сетках Шишкина и Бахвалова, сгущающихся в области пограничного слоя. Предполагается, что для функции $u(x)$ справедлива декомпозиция (1)-(2). Для формул численного дифференцирования с произвольно задаваемым числом узлов в шаблоне для производной получены оценки погрешности, равномерные по малому параметру ε. Оценка погрешности на сетке Шишкина обоснована в теореме 1, на сетке Бахвалова – в теореме 2. Полученные оценки погрешности являются новыми. Ранее сетки Шишкина и Бахвалова применялись для построения разностных схем, погрешность которых равномерна по параметру ε.

2) В случае равномерной сетки для функции с декомпозицией (1) разработаны формулы численного дифференцирования, точные на составляющей $\Phi(x)$, имеющей большие градиенты. Число узлов в сеточном шаблоне для производной является произвольно задаваемым. Такой подход является новым. Обоснована теорема 3, на основе которой можно оценить погрешность построенной формулы численного дифференцирования. Приведен пример применения этой теоремы. Отметим, что при таком подходе составляющая $\Phi(x)$, отвечающая за большие градиенты функции $u(x)$, рассматривается как функция общего вида.

По рассматриваемым подходам приведены результаты численных экспериментов, которые соответствуют полученным оценкам погрешности.

По представленному тексту имеется 2 замечания:

1) Во избежание недоразумений стоит написать, что возникновение множителя ε^n в левых частях оценок (10), (11), (22), (23), (48) связано с тем, что производная рассматриваемой погранслойной составляющей есть величина порядка $O(1/\varepsilon^n)$ при $\varepsilon \to 0$. В связи с этим, указанные оценки являются оценками относительной погрешности приближения производных функции с погранслойной составляющей.

2. Страница 7, строка 14 снизу, в выражении "$|u^{n)}(x)|$" следует исправить опечатку: $|u^{(n)}(x)|$.

Отмеченные замечания не портят хорошее впечатление от представленной работе. Результаты работы являются новыми. Они значимы для разработки формул численного дифференцирования функций с большими градиентами и решения дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Работа заслуживает опубликования в журнале "Siberian Electronic Mathematical Reports".