S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 144–144 (2015) УДК 517.95

DOI 10.17377/semi.2015.12.xxx MSC 35M10+35R30

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ПО НАХОЖДЕНИЮ СОМНОЖИТЕЛЕЙ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВРЕМЕНИ

С.Н. СИДОРОВ

Abstract. For an inhomogeneous three-dimensional equation of mixed parabolic-hyperbolic type in a rectangular parallelepiped, a direct initial-boundary problem is studied. A criterion for the uniqueness of a solution is established. The solution is constructed as the sum of an orthogonal series. In substantiating the convergence of the series, the problem of small denominators of two natural arguments arose. Estimates are established for the separation from zero of the small denominators with the corresponding asymptotics. These estimates made it possible to justify the convergence of the constructed series in the class of regular solutions of this equation. Based on the solution of the direct problem, three inverse problems were posed and studied to find the time-dependent factor of the right-hand side only from the parabolic or hyperbolic part of the equation, and when the factors from both sides of the equation are unknown at the same time. The solution of inverse problems is equivalently reduced to the solvability of loaded integral equations. Based on the theory of integral equations, the corresponding uniqueness and existence theorems are proved for solutions of the inverse problems posed. Moreover, the solutions of inverse problems are constructed in an explicit form - as the sum of orthogonal series.

Keywords: three-dimensional equation of mixed parabolic-hyperbolic type, initial-boundary value problem, inverse problems, uniqueness, series, small denominators, uniform convergence, existence

---

Sidorov, S.N., Inverse problems for a three-dimensional equation of parabolic-hyperbolic type in finding time-dependent factors of the right-hand sides.

Поступила 2 апреля 2020 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

1. Постановка задач

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = F(x, y, t), \tag{1}$$

здесь

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} - u_{yy} + bu, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + bu, & t < 0, \end{cases}$$

$$F(x, y, t) = \begin{cases} f_1(x, y)g_1(t), & t > 0, \\ f_2(x, y)g_2(t), & t < 0, \end{cases}$$

в области

$$Q = \{(x, y, t)|\, (x, y) \in D,\, t \in (-\alpha, \beta)\}, \quad D = \{(x, y)|\, 0 < x < p,\, 0 < y < q\},$$

α, β, p, q – заданные положительные действительные числа, b – заданное любое действительное число, и поставим следующие задачи.

Задача 1. *Найти функцию $u(x, y, t)$, определенной в области Q и удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x, y, t) \in C(\overline{Q}) \cap C_t^1(Q) \cap C_{x,y}^1(\overline{Q}) \cap C_{x,y}^2(Q_+) \cap C^2(Q_-); \tag{2}$$

$$Lu(x, y, t) \equiv F(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q_+ \cup Q_-; \tag{3}$$

$$u(x, y, t)\big|_{x=0} = u(x, y, t)\big|_{x=p} = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta; \tag{4}$$

$$u(x, y, t)\big|_{y=0} = u(x, y, t)\big|_{y=q} = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta; \tag{5}$$

$$u(x, y, t)\big|_{t=-\alpha} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}, \tag{6}$$

где $F(x, y, t)$ и $\psi(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции,

$$Q_- = Q \cap \{t < 0\}, \quad Q_+ = Q \cap \{t > 0\}.$$

Задача 2. *Найти функции $u(x, y, t)$ и $g_1(t)$, удовлетворяющие условиям* (2) – (6) *и*

$$g_1(t) \in C[0, \beta]; \tag{7}$$

$$u(x_0, y_0, t) = h_1(t), \quad (x_0, y_0) \in D, \quad 0 \le t \le \beta, \tag{8}$$

где $f_i(x, y)$, $i = 1, 2$, $g_2(t)$ и $h_1(t)$ – заданные функции.

Задача 3. *Найти функции $u(x, y, t)$ и $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям* (2) – (6) *и*

$$g_2(t) \in C[-\alpha, 0]; \tag{9}$$

$$u(x_0, y_0, t) = h_2(t), \quad (x_0, y_0) \in D, \quad -\alpha \le t \le 0, \tag{10}$$

где $f_i(x, y)$, $i = 1, 2$, $g_1(t)$ и $h_2(t)$ – заданные функции.

Задача 4. *Найти функции $u(x, y, t)$, $g_1(t)$ и $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям* (2) – (10).

К одним из первых исследований задач сопряжения, когда на одной части области задано параболическое уравнение, на другой – гиперболическое уравнение, можно отнести работу [1], где рассматривается пример, связанный с движением газа в канале, окруженном пористой средой, здесь в канале движение газа описывается волновым уравнением, вне его – уравнением диффузии, но при этом четкой постановки математической задачи не привел и не указал пути решения. В статьях [2, 3] задача о распространении электрических колебаний в составных линиях, когда на участке полубесконечной линии пренебрегается потерями, а остальная часть линии рассматривается как кабель без утечки, сведена к решению системы уравнений

$$\begin{cases} L\dfrac{\partial I_1}{\partial t} + \dfrac{\partial U_1}{\partial x} = 0,\ C_1\dfrac{\partial U_1}{\partial t} + \dfrac{\partial I_1}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < l, \\[2ex] RI_2 + \dfrac{\partial U_2}{\partial x} = 0, \quad C_2\dfrac{\partial U_2}{\partial t} + \dfrac{\partial I_2}{\partial x} = 0, \quad l < x < \infty, \end{cases}$$

при начальных $U_1|_{t=0} = 0$, $I_1|_{t=0} = 0$, $U_2|_{t=0} = 0$ и граничных $U_1|_{x=0} = E(t)$, $\lim_{x\to\infty} U_2 = 0$ условиях, а также при требованиях непрерывности напряжения и тока $U_1|_{x=l} = U_2|_{x=l}$, $I_1|_{x=l} = I_2|_{x=l}$, здесь L, C_1 – самоиндукция и емкость (на единицу длины) первого участка линии; R, C_2 – сопротивление и емкость второго участка.

Если теперь из системы уравнения исключить токи, то приходим к задаче:

$$0 = \begin{cases} a_1^2 u_{xx} - u_{tt}, & 0 < x < l, \\ a_2^2 u_{xx} - u_t, & l < x < \infty, \end{cases}$$

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad u(x,0) = 0, \quad l \leqslant x < \infty,$$

$$u(0,t) = E(t), \quad \lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0,$$

$$u(l-0,t) = u(l+0,t), \quad u_x(l+0,t) = \frac{R}{L}\int\limits_0^t u_x(l-0,\eta)\,d\eta,$$

здесь

$$u(x,t) = \begin{cases} U_1(x,t), & x < l, \\ U_2(x,t), & x > l, \end{cases} \quad a_1^2 = \frac{1}{LC_1}, \quad a_2^2 = \frac{1}{LC_2}.$$

Эта задача для более общего уравнения с общими условиями склеивания изучена в монографии [4].

В работах [5, 6] в многомерном пространстве исследованы начально-граничные краевые задачи на сопряжения для параболо-гиперболических уравнений, которые возникают при изучении задачи о движении проводящей жидкости в электромагнитном поле. Одна из этих задач следующая. Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ есть объединение двух областей Ω_1 и Ω_2 и разделяющей их $(n-1)$-мерной поверхности Γ, так что $\Omega = \Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega_2$. Обозначим через S границу Ω, а через S_1 и S_2 – границы Ω_1 и Ω_2, $Q_T^{(k)} = \Omega_k \times [0,T]$, $k = 1,2$. Ставится задача: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую в области $Q_T^{(1)}$ параболическому уравнению

$$u_t + L_1 u = f_1(x,t),$$

в области $Q_T^{(2)}$ гиперболическому уравнению

$$u_{tt} + L_2 u = f_2(x,t),$$

начальным условиям

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad x \in \Omega_1;$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_2(x), \quad u_t\Big|_{t=0} = \varphi_3(x), \quad x \in \Omega_2,$$

на границе S первому граничному условию

$$u\Big|_S = \psi(x,t), \quad t \in [0,T],$$

а на границе раздела Γ – условиям сопряжения:

$$u^{(1)}\Big|_\Gamma - u^{(2)}\Big|_\Gamma = \psi_1(x,t),$$

$$b^{(1)}(x,t)\frac{\partial u^{(1)}}{\partial N}\bigg|_\Gamma - b^{(2)}(x,t)\frac{\partial u^{(2)}}{\partial N}\bigg|_\Gamma = \psi_2(x,t), \quad t \in [0,T],$$

здесь $u(x,t) = u^{(1)}(x,t)$ для $x \in \Omega_1$, $t \geq 0$ и $u(x,t) = u^{(2)}(x,t)$ для $x \in \Omega_2$, $t \geq 0$, $b^{(k)}(x,t) \geq \beta > 0$, $k = 1,2$, – известные функции,

$$L_k u \equiv -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}^{(k)}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + a_i^{(k)}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a^{(k)}(x,t), \quad k = 1,2,$$

где $a_{ij}^{(k)}(x,t)$, $a_i^{(k)}(x,t)$, $a^{(k)}(x,t)$, $f_k(x,t)$, $\varphi_j(x)$, $j = 1,2,3$, $\psi(x,t)$, $\psi_k(x,t)$ – заданные известные функции.

В отличие от указанных выше статей в данной работе в задаче условия сопряжения заданы не по пространственным переменным, а по временной переменной, т.е. на прямой $t = 0$.

Начально-граничные задачи для двумерного однородного и неоднородного уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области впервые были изучены в работах [7], [8, с. 56–94], [9]. А в статьях [10 – 12] изучены нелокальные задачи для однородного параболо-гиперболического уравнения в прямоугольной области.

Отметим так же работы [13, 14], где для для трех классов двемерного параболо-гиперболического уравнения с правой частью $F(x,t)$: уравнения смешанного типа с вырождающейся гиперболической частью, для уравнения смешанного типа с вырождающейся параболической частью и для уравнения смешанного типа со степенным вырождением изучена начально-граничная задача в прямоугольной области $D = \{(x,t) |\, 0 < x < l,\ -\alpha < t < \beta\}$ с ненулевыми условиями на границе $u(0,t) = h_1(t)$, $u(l,t) = h_2(t)$, $u(x,-\alpha) = \varphi(x)$.

Необходимость исследования задачи (2) – (6) для неоднородного уравнения (1) возникает в связи с решением проблемы Гельфанда И.М. [1], т.е. построением в явном виде решения задачи, и изучением обратных задач для уравнения (1) по отысканию сомножителей правой части $F_i(x,y,t) = f_i(x,y)g_i(t)$, $i = 1,2$, либо зависящих от (x,y), либо зависящих от t.

Обратные задачи возникают во многих областях науки: электродинамике, акустике, квантовой теории рассеяния, геофизике (обратные задачи электроразведки, сейсмики, теории потенциала), астрономии и других областях естествознания. Это связано с тем, что значения параметров модели могут быть получены из наблюдаемых данных, а свойства среды на практике часто бывают неизвестны.

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных, т.е. для параболических, гиперболических и эллиптических уравнений, изучены достаточно полно (см. работы [15 – 21] и приведенную там обширную библиографию).

В работах [22 – 24] рассмотрены обратные задачи по поиску неизвестной правой части для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных.

В статьях [25, 26] для уравнения параболического типа рассмотрены обратные задачи определения правой части $F(x,t) = h(x,t)f(t) + g(x,t)$, где неизвестной является функция $f(t)$.

В работе [27] для параболического уравнения исследована обратная задача восстановления источника – правой части $F(x,t) = h(x,t)f(x)$, где неизвестной является функция $f(x)$.

Статьи [28, 29] посвящены изучению обратных задач нахождению вместе с решением параболического уравнения также неизвестного внешнего воздействия (правой части).

В работах [30 – 32] были изучены обратные задачи для одномерного уравнения (1) по отысканию функций $u(x,t)$ и $f_i(x)$, когда $g_i(t) \equiv 1$.

В статьях [33, 34] рассмотрены задачи 1 – 4 для двух классов неоднородных двумерных вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа: для уравнения смешанного типа с вырождающейся гиперболической частью и для уравнения смешанного типа с вырождающейся параболической частью.

В данной работе для неоднородного трехмерного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в области Q изучена прямая начально-граничная задача 1 и обратные задачи 2 – 4 по отысканию сомножителей сомножителей правых частей, зависящих от времени, т.е. $g_i(t)$, $i = 1, 2$. Решение прямой задачи построено в виде суммы ортогонального ряда. При обосновании сходимости ряда возникла проблема малых знаменателей от двух натуральных аргументов. Установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой. Эти оценки позволили обосновать сходимость построенного ряда в классе регулярных решений данного уравнения. На основе решения прямой задачи поставлены и изучены три обратные задачи по отысканию сомножителя правой части, зависящей от времени, только из параболической или гиперболической части уравнения, и когда неизвестными одновременно являются сомножители из обеих частей уравнения. Используя формулу решения прямой начально-граничной задачи, решение обратных задач эквивалентно редуцировано к разрешимости нагруженных интегральных уравнений. На основании теории интегральных уравнений доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений поставленных обратных задач.

2. Исследование прямой начально-граничной задачи

Пусть $u(x,y,t)$ – решение задачи (2) – (6). По аналогии с работами [7, 11] Рассмотрим функции

$$u_{mn}(t) = \iint\limits_D u(x,y,t) v_{mn}(x,y)\, dxdy, \quad m,\, n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где

$$v_{mn}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{pq}} \sin\frac{m\pi x}{p} \sin\frac{n\pi y}{q} \tag{2}$$

– полная ортонормированная система собственных функций оператора Лапласа в прямоугольнике D с нулевыми граничными условиями Дирихле. Отметим также, что система функций (2) образует базис в пространстве $L_2(D)$.

Рассмотри вспомогательные функции

$$u_{mn\varepsilon}(t) = \iint\limits_{D_\varepsilon} u(x,y,t)v_{mn}(x,y)\,dxdy, \quad m,\, n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

где $D_\varepsilon = \{(x,y)|\, \varepsilon < x < p-\varepsilon,\, \varepsilon < y < q-\varepsilon\}$. Дифференцируя равенство (3) по t при $t>0$ один раз, а при $t<0$ два раза, учитывая уравнение (1), получим

$$u'_{mn\varepsilon}(t) = \iint\limits_{D_\varepsilon} u_t(x,y,t)v_{mn}(x,y)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_\varepsilon} \left[u_{xx} + u_{yy} - bu + f_1(x,y)g_1(t)\right] v_{mn}(x,y)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_\varepsilon} u_{xx}v_{mn}(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_\varepsilon} u_{yy}v_{mn}(x,y)\,dxdy - bu_{mn\varepsilon}(t) +$$

$$+ g_1(t)\iint\limits_{D_\varepsilon} f_1(x,y)v_{mn}(x,y)\,dxdy,$$

$$u''_{mn\varepsilon}(t) = \iint\limits_{D_\varepsilon} u_{tt}(x,y,t)v_{mn}(x,y)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_\varepsilon} \left[u_{xx} + u_{yy} - bu + f_2(x,y)g_2(t)\right] v_{mn}(x,y)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_\varepsilon} u_{xx}v_{mn}(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_\varepsilon} u_{yy}v_{mn}(x,y)\,dxdy - bu_{mn\varepsilon}(t) +$$

$$+ g_2(t)\iint\limits_{D_\varepsilon} f_2(x,y)v_{mn}(x,y)\,dxdy.$$

В интегралах, содержащих производные u_{xx} и u_{yy}, интегрируя по частям два раза и переходя затем к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом граничных условий (4) и (5), получим дифференциальные уравнения

$$u'_{mn}(t) + \lambda^2_{mn}u_{mn}(t) = g_1(t)f_{1mn}, \quad t>0, \tag{4}$$

$$u''_{mn}(t) + \lambda^2_{mn}u_{mn}(t) = g_2(t)f_{2mn}, \quad t<0, \tag{5}$$

здесь

$$\lambda^2_{mn} = b + \pi^2\left[\left(\frac{m}{p}\right)^2 + \left(\frac{n}{q}\right)^2\right]. \tag{6}$$

(7) $$f_{imn} = \iint\limits_{D} f_i(x,y) v_{mn}(x,y)\,dxdy, \quad i = 1,2.$$

Отметим, что в дальнейшем в (6) будем считать, что $b = \mu^2 \geq 0$ ($\mu \geq 0$), так как если $b < 0$, то начиная с некоторых номеров $n > n_0$ или $m > m_0$ правая часть (6) принимает только положительные значения, т.е. знак коэффициента b по существу не влияет на полученные результаты.

Общие решения уравнений (4) и (5) соответственно определяются по формулам [8, с. 75]

(8) $$u_{mn}(t) = a_{mn} e^{-\lambda_{mn}^2 t} + f_{1mn} \int\limits_0^t g_1(s) e^{-\lambda_{mn}^2 (t-s)}\,ds, \quad t > 0,$$

(9)
$$u_{mn}(t) = c_{mn}\cos\lambda_{mn}t + d_{mn}\sin\lambda_{mn}t - \frac{f_{2mn}}{\lambda_{mn}} \int\limits_t^0 g_2(s)\sin\left[\lambda_{mn}(t-s)\right]\,ds, \quad t < 0,$$

здесь a_{mn}, c_{mn} и d_{mn} – произвольные постоянные.

Функции (8) и (9) в силу (2) удовлетворяют условиям склеивания

$$u_{mn}(0+0) = u_{mn}(0-0), \quad u'_{mn}(0+0) = u'_{mn}(0-0), \quad m,\, n \in \mathbb{N},$$

только тогда, когда

$$c_{mn} = a_{mn}, \quad d_k = -\lambda_{mn} a_{mn} + \frac{f_{1mn}}{\lambda_{mn}} g_1(0).$$

В силу последних равенств функции (8) и (9) принимают вид

(10) $$u_{mn}(t) = \begin{cases} a_{mn} e^{-\lambda_{mn}^2 t} + f_{1mn} \int\limits_0^t g_1(s) e^{-\lambda_{mn}^2 (t-s)}\,ds, & t > 0, \\ a_{mn}\left(\cos\lambda_{mn}t - \lambda_{mn}\sin\lambda_{mn}t\right) + \dfrac{f_{1mn} g_1(0)}{\lambda_{mn}} \sin\lambda_{mn}t - & \\ \qquad - \dfrac{f_{2mn}}{\lambda_{mn}} \int\limits_t^0 g_2(s)\sin\left[\lambda_{mn}(t-s)\right]\,ds, & t < 0. \end{cases}$$

Для нахождения постоянных a_{mn} воспользуемся граничным условием (6) и формулой (1):
(11)
$$u_{mn}(-\alpha) = \iint\limits_{D} u(x,y,-\alpha) v_{mn}(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D} \psi(x,y) v_{mn}(x,y)\,dxdy = \psi_{mn}.$$

Тогда из (10) и (11) имеем

$$a_{mn}\left(\cos\lambda_{mn}\alpha + \lambda_{mn}\sin\lambda_{mn}\alpha\right) - \frac{f_{1mn} g_1(0)}{\lambda_{mn}} \sin\lambda_{mn}\alpha +$$
$$+ \frac{f_{2mn}}{\lambda_{mn}} \int\limits_{-\alpha}^0 g_2(s)\sin\left[\lambda_{mn}(s+\alpha)\right]\,ds = \psi_{mn}.$$

Отсюда, при условии, что при всех $m,\, n \in \mathbb{N}$

(12) $$\delta_{mn}(\alpha) = \cos\lambda_{mn}\alpha + \lambda_{mn}\sin\lambda_{mn}\alpha \neq 0,$$

найдем

$$a_{mn} = \frac{\psi_{mn} + \omega_{mn}}{\delta_{mn}(\alpha)},$$

где

$$\omega_{mn} = \frac{f_{1mn} g_1(0)}{\lambda_{mn}} \sin \lambda_{mn}\alpha - \frac{f_{2mn}}{\lambda_{mn}} \int\limits_{-\alpha}^{0} g_2(s) \sin\left[\lambda_{mn}(s+\alpha)\right] ds. \tag{13}$$

Тогда для функций $u_{mn}(t)$ получаем окончательный вид
(14)

$$u_{mn}(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi_{mn} + \omega_{mn}}{\delta_{mn}(\alpha)} e^{-\lambda_{mn}^2 t} + \int\limits_0^t \Phi_{1mn}(s) e^{-\lambda_{mn}^2 (t-s)}\, ds, & t \geq 0, \\ \dfrac{\psi_{mn} + \omega_{mn}}{\delta_{mn}(\alpha)} (\cos \lambda_{mn} t - \lambda_{mn} \sin \lambda_{mn} t) + \dfrac{\Phi_{1mn}(0+0)}{\lambda_{mn}} \sin \lambda_{mn} t - \\ \qquad - \dfrac{1}{\lambda_{mn}} \int\limits_t^0 \Phi_{2mn}(s) \sin\left[\lambda_{mn}(t-s)\right] ds, & t \leq 0. \end{cases}$$

Пусть $F(x,y,t) \equiv 0$, $\psi(x,y) \equiv 0$ и выполнены условия (12) при всех m, $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (7), (11), (14) и (1) следует, что при всех m, $n \in \mathbb{N}$ и любом $t \in [-\alpha, \beta]$

$$\iint\limits_D u(x,y,t) v_{mn}(x,y)\, dxdy = 0.$$

Отсюда в силу полноты системы функций (2) в $L_2(D)$ следует, что $u(x,y,t) = 0$ почти всюду в $\overline{D}$ при любом $t \in [-\alpha, \beta]$. По условию (2) функция $u(x,y,t)$ непрерывна на $\overline{D}$, поэтому $u(x,y,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некотором $m = m_0$ или $n = n_0$ выражение $\delta_{m_0 n}(\alpha) = 0$ или $\delta_{m n_0}(\alpha) = 0$. Допустим, что $\delta_{m n_0}(\alpha) = 0$. Тогда однородная задача (2) – (6) (где $\psi(x,y) \equiv 0$, $F(x,y,t) \equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$u_{mn_0}(x,y,t) = \begin{cases} C_{mn_0} e^{-\lambda_{mn_0}^2 t} v_{mn_0}(x,y), & t \geq 0, \\ C_{mn_0} \Big(\cos \lambda_{mn_0} t - \lambda_{mn_0} \sin \lambda_{mn_0} t \Big) v_{mn_0}(x,y), & t \leq 0, \end{cases} \tag{15}$$

где $C_{mn_0} \neq 0$ – произвольная постоянная.

В самом деле, построенная функция (15) в силу равенства $\delta_{mn_0}(\alpha) = 0$ удовлетворяет условиям (2) – (6). Принадлежность классу (2) следует из того, что

$$\lim_{t \to 0+0} u_{mn_0}(x,y,t) = v_{mn_0}(x,y) = \lim_{t \to 0-0} u_{mn_0}(x,y,t) =$$

$$= v_{mn_0}(x,y) \lim_{t \to 0-0} \Big(\cos \lambda_{mn_0} t - \lambda_{mn_0} \sin \lambda_{mn_0} t \Big) = v_{mn_0}(x,y);$$

$$\lim_{t \to 0+0} \frac{\partial u_{mn_0}(x,y,t)}{\partial t} = -\lambda_{mn_0}^2 v_{mn_0}(x,y) = \lim_{t \to 0-0} \frac{\partial u_{mn_0}(x,y,t)}{\partial t} =$$

$$= \Big(-\lambda_{mn_0} \sin \lambda_{mn_0} t - \lambda_{mn_0}^2 \cos \lambda_{mn_0} t \Big) v_{mn_0}(x,y) = -\lambda_{mn_0}^2 v_{mn_0}(x,y).$$

Равенство (3) при $F(x,y,t) \equiv 0$ в силу (6) выполняется:

$$u_t - u_{xx} - u_{yy} + bu =$$

$$= e^{-\lambda_{mn_0}^2 t} v_{mn_0}(x,y) \left[-\lambda_{mn_0}^2 + \left(\frac{m\pi}{p} \right)^2 + \left(\frac{n_0 \pi}{q} \right)^2 + b \right] = 0, \quad t > 0,$$

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + bu =$$

$$= \Big(\cos\lambda_{mn_0}t - \lambda_{mn_0}\sin\lambda_{mn_0}t\Big)v_{mn_0}(x,y)\times$$
$$\times\left[-\lambda^2_{mn_0} + \left(\frac{m\pi}{p}\right)^2 + \left(\frac{n_0\pi}{q}\right)^2 + b\right] = 0, \quad t<0.$$

Условия (4) и (5) выполняются в силу равенства синусов нулю из формулы (2). Условие (6) при $\psi(x,y)\equiv 0$ также имеет место, так как

$$u_{mn_0}(x,y,-\alpha) = \Big(\cos\lambda_{mn_0}\alpha + \lambda_{mn_0}\sin\lambda_{mn_0}\alpha\Big)v_{mn_0}(x,y) =$$
$$= \delta_{mn_0}(\alpha)v_{mn_0}(x,y) = 0.$$

Из построения функции (15) следует, что $u_{mn_0}(x,y,t)$ на множестве $Q_-\cup Q_+$ является решением уравнения (1) при $F(x,y,t)\equiv 0$.

Теперь возникает вопрос о существовании нулей выражения $\delta_{mn}(\alpha)$. Для этого его представим в виде

$$\delta_{mn}(\alpha) = \sqrt{1+\lambda^2_{mn}}\,\sin(\lambda_{mn}\alpha + \gamma_{mn}), \tag{16}$$

где

$$\gamma_{mn} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2_{mn}}}.$$

Из представления (16) видно, что $\delta_{mn}(\alpha) = 0$ относительно α только в том случае, когда

$$\alpha = \frac{\pi\,k}{\lambda_{mn}} - \frac{\gamma_{mn}}{\lambda_{mn}}, \quad k,\,m,\,n\in\mathbb{N}. \tag{17}$$

Равенство (17) на основании выражения (6) принимает вид

$$\left(\frac{k-\gamma_{mn}/\pi}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{m}{p}\right)^2 - \left(\frac{n}{q}\right)^2 = \left(\frac{\mu}{\pi}\right)^2. \tag{18}$$

Таким образом, $\delta_{mn}(\alpha)$ обращается в нуль, когда α задается по формуле (17) или похожее на неоднородное диофантовое уравнение (18) имеет решение на множестве натуральных чисел. Придавая формуле (17) за k, m и n натуральные числа, получаем счетное множество нулей выражения $\delta_{mn}(\alpha)$.

Таким образом, установлен следующий критерий единственности решения задачи (2) – (6).

Теорема 2.1. *Если существует решение задачи* (2) – (6)*, то оно единственно только тогда, когда при всех m и n выполнены условия* (12).

При соблюдении условий (12) решение задачи (2) – (6) формально определяется рядом Фурье по системе функций (2):

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t)v_{mn}(x,y), \tag{19}$$

где коэффициенты находятся по формуле (14). Поскольку $\delta_{mn}(\alpha)$ является знаменателем коэффициентов ряда (19) и как показано выше, что уравнение $\delta_{mn}(\alpha) = 0$ имеет счетное множество нулей (14), то возникает проблема малых знаменателей более сложной структуры, чем в плоском случае [7], [8, с. 61–66]. В связи с чем для обоснования сходимости ряда (19) в классе функций (2) необходимо установить оценку об отделенности от нуля $\delta_{mn}(\alpha)$.

Выражение $\delta_{mn}(\alpha)$ представим в виде

$$\delta_{mn}(\nu) = \sqrt{1+\lambda^2_{mn}}\,\sin(\pi N\nu\widetilde{\lambda}_{mn} + \gamma_{mn}), \quad N = \max\{n,m\}, \tag{20}$$

где

$$\nu = \widetilde{\alpha}\sqrt{\left(\frac{q\,m}{N}\right)^2 + \left(\frac{p\,n}{N}\right)^2}, \quad \widetilde{\alpha} = \frac{\alpha}{pq}, \quad \widetilde{\lambda}_{mn} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu\,p\,q}{\pi\,N\,\sqrt{\left(\frac{q\,m}{N}\right)^2 + \left(\frac{p\,n}{N}\right)^2}}\right)^2}.$$

Лемма 2.1. *Пусть $b \neq 0$. Если ν принимает только рациональные значения, то существуют положительные постоянные C_0 и N_0 ($N_0 \in \mathbb{N}$), такие, что при всех $N > N_0$ справедлива оценка*

$$|\delta_{mn}(\nu)| \geq C_0. \tag{21}$$

Замечание 2.1. Если в условиях леммы 1 коэффициент $b = 0$, то $\widetilde{\lambda}_{mn} \equiv 1$, то заключение данной леммы остается в силе.

Лемма 2.2. *Если ν принимает только иррациональные алгебраические числа степени 2 и выполнено неравенство*

$$T(\alpha\,\mu^2 + \pi)\sqrt{(\alpha p)^2 + (\alpha q)^2 + (pq)^2} < \pi^2\,p\,q, \quad T = \max\{p, q\}, \tag{22}$$

то существуют положительные постоянные C_0 и N_0 ($N_0 \in \mathbb{N}$), такие, что при всех $N > N_0$ справедлива оценка

$$|\delta_{mn}(\nu)| \geq C_0. \tag{23}$$

Доказательство лемм 2.1 и 2.2 приведено в статье [35].

Замечание 2.2. Поскольку ν – зависит от n и m, то каковы должны быть данные задачи α, p и q, чтобы ν принимала только рациональные или только иррациональные алгебраические значения. Пусть отношение q/p является рациональным. В этом случае не теряя общности можно считать, что p и q – целые числа и они взаимно простые. Тогда ν можно переписать в виде

$$\nu = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{q}\sqrt{1 + \left(\dfrac{q\,m}{p\,n}\right)^2} = \dfrac{\alpha}{q}\nu_+ & \text{при} \quad n > m, \\ \dfrac{\alpha}{q}\sqrt{1 + \left(\dfrac{q}{p}\right)^2} = \dfrac{\alpha}{q}\nu_0 & \text{при} \quad n = m, \\ \dfrac{\alpha}{q}\sqrt{\left(\dfrac{q}{p}\right)^2 + \left(\dfrac{n}{m}\right)^2} = \dfrac{\alpha}{q}\nu_- & \text{при} \quad n < m. \end{cases}$$

В силу теоремы 310 [36, с. 308] квадратные корни ν_+ и ν_- принимают рациональные значения только тогда, когда

$$m = (a^2 - b^2)p, \quad n = 2abq \quad \text{для} \quad \nu_+, \tag{24}$$

$$n = (a^2 - b^2)q, \quad m = 2abp \quad \text{для} \quad \nu_-, \tag{25}$$

где $a > b > 0$, $(a, b) = 1$, а из натуральных чисел a и b одно из них четно, а другое нечетно. Корень ν_0 принимает рациональные значения только тогда, когда

$$q = (a^2 - b^2), \quad p = 2ab. \tag{26}$$

Из этих утверждений следует, что существуют счетные множества значений n, m, p и q, при которых корни ν_+, ν_- и ν_0 принимают только рациональные значения. Если указанные условия (24) – (26) нарушены, то корни ν_+, ν_- и ν_0 являются алгебраическими числами степени 2. Следовательно, если отношение α/q является рациональным числом, то ν принимает рациональные значения при условиях (24) – (26), а при нарушении этих условий – иррациональные алгебраические значения.

Теорема 2.2. *Пусть постоянные α, p, q и b удовлетворяют условиям лемм* 2.1 *или* 2.2, $\psi(x,y) \in C^{5+h_1,5+h_1}_{x,y}(\overline{D})$, $0<h_1<1$,

$$\psi(0,y)=\psi_{xx}(0,y)=\psi_{xxxx}(0,y)=\psi(p,y)=\psi_{xx}(p,y)=\psi_{xxxx}(p,y)=0,\quad 0\le y\le q,$$

$$\psi(x,0)=\psi_{yy}(x,0)=\psi_{yyyy}(x,0)=\psi(x,q)=\psi_{yy}(x,q)=\psi_{yyyy}(x,q)=0\quad 0\le x\le p,$$

$f_1(x,y)\in C^{4+h_2,4+h_2}_{x,y}(\overline{D}_+)$, $0<h_2<1$,

$$f_1(0,y)=f_{1xx}(0,y)=f_1(p,y)=f_{1xx}(p,y)=0,\quad 0\le y\le q,$$

$$f_1(x,0)=f_{1yy}(x,0)=f_1(x,q)=f_{1yy}(x,q)=0,\quad 0\le x\le q,$$

$f_2(x,y)\in C^{4+h_3,4+h_3}_{x,y}(\overline{D}_-)$, $0<h_3<1$,

$$f_2(0,y)=f_{2xx}(0,y)=f_2(p,y)=f_{2xx}(p,y)=0,\quad 0\le y\le q,$$

$$f_2(x,0)=f_{2yy}(x,0)=f_2(x,q)=f_{2yy}(x,q)=0,\quad 0\le x\le q.$$

Тогда, если $\delta_{mn}(\nu)\neq 0$ при $N=\overline{1,N_0}$, то существует единственное решение задачи (2) – (6) *и оно определяется рядом* (19).

3. Исследование обратной задачи 2

Потребуем, чтобы функция (19) при $t\ge 0$ удовлетворяла условию (8). Тогда имеем

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\left[\frac{\psi_{mn}+\omega_{mn}}{\delta_{mn}(\alpha)}e^{-\lambda^2_{mn}t}+f_{1mn}\int\limits_0^t g_1(s)e^{-\lambda^2_{mn}(t-s)}\,ds\right]v_{mn}(x_0,y_0)=h(t).$$

Отсюда с учетом (13), получим

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\psi_{mn}}{\delta_{mn}(\alpha)}e^{-\lambda^2_{mn}t}v_{mn}(x_0,y_0)+g_1(0)\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{f_{1mn}}{\lambda_{mn}\delta_{mn}(\alpha)}\sin\lambda_{mn}\alpha e^{-\lambda^2_{mn}t}v_{mn}(x_0,y_0)-$$

$$-\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{f_{2mn}}{\lambda_{mn}\delta_{mn}(\alpha)}e^{-\lambda^2_{mn}t}\int\limits_{-\alpha}^{0}g_2(s)\sin\left[\lambda_{mn}(s+\alpha)\right]\,ds\,v_{mn}(x_0,y_0)+$$

$$+\sum_{m,n=1}^{\infty}f_{1mn}\int\limits_0^t g_1(s)e^{-\lambda^2_{mn}(t-s)}\,ds\,v_{mn}(x_0,y_0)=h(t).$$

В силу равномерной сходимости ряда (19) на $\overline{Q}_+$ поменяем местами операции интегрирования и суммирования. Тогда получим для искомой функции $g_1(t)$ нагруженное интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int\limits_0^t g_1(s)K_1(s,t)\,ds=\widetilde{h}_1(t),\quad 0\le t\le\beta, \tag{1}$$

с ядром

$$K_1(s,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}f_{1mn}e^{-\lambda^2_{mn}(t-s)}v_{mn}(x_0,y_0), \tag{2}$$

и правой частью

$$\widetilde{h}_1(t)=h_1(t)-g_1(0)H_1(t)-H_2(t)+H_3(t), \tag{3}$$

здесь

$$H_1(t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{f_{1mn}}{\lambda_{mn}\delta_{mn}(\alpha)} \sin \lambda_{mn}\alpha e^{-\lambda_{mn}^2 t} v_{mn}(x_0, y_0), \tag{4}$$

$$H_2(t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\psi_{mn}}{\delta_{mn}(\alpha)} e^{-\lambda_{mn}^2 t} v_{mn}(x_0, y_0), \tag{5}$$

$$H_3(t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{f_{2mn}}{\lambda_{mn}\delta_{mn}(\alpha)} e^{-\lambda_{mn}^2 t} \int\limits_{-\alpha}^{0} g_2(s) \sin\left[\lambda_{mn}(s+\alpha)\right] ds\, v_{mn}(x_0, y_0). \tag{6}$$

Лемма 3.1. *Если выполнены условия теоремы* 2.2, *то ряды* (2), (4) – (6) *и их производные по* t *на замкнутом множестве* $0 \le s \le t \le \beta$ *сходятся равномерно.*

Доказательство. Ряд (2) и его производная по t при $0 \le s \le t \le \beta$ мажорируются соответственно рядом

$$M_1 \sum_{m,n=1}^{\infty} \lambda_{mn}^2 |f_{1mn}|, \tag{7}$$

где M_i – здесь и далее положительные постоянные. Для коэффициентов f_{1mn} при выполнении условий теоремы 2.2 справедливо следующее представление:

$$|f_{1mn}| = \pi^{-4}\left(\frac{m}{p} + \frac{n}{q}\right)^{-4} \left(|f_{1mn}^{(4,0)}| + 4|f_{1mn}^{(3,1)}| + 6|f_{1mn}^{(2,2)}| + 4|f_{1mn}^{(1,3)}| + |f_{1mn}^{(0,4)}|\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{\pi}\right)^4 \left(\frac{dm}{p} + \frac{dn}{q}\right)^{-4} \sum_{i+j=4} |f_{1mn}^{(i,j)}| \le \left(\frac{d}{\pi}\right)^4 (m+n)^{-4} \sum_{i+j=4} |f_{1mn}^{(i,j)}|,$$

где $d = \max\{p, q\}$, $0 \le i, j \le 4$,

$$f_{1mn}^{(4,0)} = \iint\limits_D f_{1x}^{IV} v_{mn}(x,y)\, dxdy, \quad f_{1mn}^{(3,1)} = \iint\limits_D f_{1xxxy}^{IV} v_{mn}(x,y)\, dxdy,$$

$$f_{1mn}^{(2,2)} = \iint\limits_D f_{1xxyy}^{IV} v_{mn}(x,y)\, dxdy, \quad f_{1mn}^{(1,3)} = \iint\limits_D f_{1xyyy}^{IV} v_{mn}(x,y)\, dxdy,$$

$$f_{1mn}^{(0,4)} = \iint\limits_D f_{1y}^{IV} v_{mn}(x,y)\, dxdy.$$

Тогда общий член ряда (7) оценивается так:

$$\lambda_{mn}^2 |f_{1mn}| \le M_2 (m+n)^{-2} \sum_{i+j=4} |f_{1mn}^{(i,j)}| \le \frac{M_2}{2} \left(\frac{1}{(mn)^2} + 4 \sum_{i+j=4} |f_{1mn}^{(i,j)}|^2 \right).$$

Тогда ряд (7) мажорируется сходящимся рядом

$$M_3 \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(mn)^2} + 4 \sum_{m,n=1}^{\infty} |f_{1mn}^{(i,j)}|^2 \right), \quad i + j = 4.$$

Отсюда следует, что ряд (2) и его производная по t сходится равномерно на замкнутом множестве $0 \le s \le t \le \beta$.

Аналогично можно показать равномерную сходимость рядов (4) – (6) и их производные по t на замкнутом множестве $0 \leq s \leq t \leq \beta$. ■

Дифференцируя уравнение (1) по t, имеем

$$K_1(t,t)g_1(t) + \int\limits_0^t g_1(s)\frac{\partial K_1(s,t)}{\partial t}\,ds = \widetilde{h}_1'(t). \tag{8}$$

Положив в (2) $s = t$, будем иметь

$$K_1(t,t) = \sum_{m,n=1}^{+\infty} f_{1mn}v_{mn}(x_1,y_1) = f_1(x_0,y_0). \tag{9}$$

Правая часть равенства (9) представляет собой разложение в ряд функции $f_{1mn}(x,y)$ по системе(2) в точке $x = x_0$, $y = y_0$. Если $f_1(x_0,y_0) \neq 0$, то уравнение (8) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью. Как известно [38, с. 437], такое уравнение имеет единственное решение в классе функций $C[0,\beta]$, если предварительно найдем значение $g_1(0)$, которое входит в правую часть уравнения (8). Из уравнения (8) имеем

$$f_1(x_0,y_0)g_1(0) = h_1'(0) - g_1(0)H_1'(0) - H_2'(0) + H_3'(0).$$

Отсюда найдем

$$g_1(0) = \frac{h_1'(0) - H_2'(0) + H_3'(0)}{f_1(x_0,y_0) + H_1'(0)} \tag{10}$$

при условии

$$f_1(x_0,y_0)+H_1'(0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{1mn}v_{mn}(x_0,y_0) - \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{mn}f_{1mn}\sin\lambda_{mn}\alpha}{\delta_{mn}(\alpha)}v_{mn}(x_0,y_0) =$$

$$= \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{1mn}\left[1 - \frac{\lambda_{mn}\sin\lambda_{mn}\alpha}{\delta_{mn}(\alpha)}\right]v_{mn}(x_0,y_0) =$$

$$= \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{f_{1mn}\cos\lambda_{mn}\alpha}{\delta_{mn}(\alpha)}v_{mn}(x_0,y_0) \neq 0. \tag{11}$$

Проверим, когда условие (11) выполняется. Представим его, с учетом представления (20), в виде

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{f_{1mn}\cos\pi N\nu\widetilde{\lambda}_{mn}}{\sqrt{1+\lambda_{mn}^2}\sin(\pi N\nu\widetilde{\lambda}_{mn} + \gamma_{mn})}v_{mn}(x_0,y_0).$$

Если, например, положить $b = 0$ (в этом случае $\widetilde{\lambda}_{mn} \equiv 1$) и $\nu \in \mathbb{N}$, то условие (11) выполняется.

После нахождения значения $g_1(0)$ по формуле (10) уравнение (8) является классическим уравнением Вольтерра второго рода, решение которого легко строится методом последовательных приближений.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2, $g_2(t) \in C[-\alpha, 0]$, $h(t) \in C^1[0, \beta]$, $f_1(x_0, y_0) \neq 0$. *Тогда, если выполнено условие* (11), *то интегральное уравнение* (8) *имеет единственное решение* $g_1(t) \in C[0, \beta]$, *следовательно, задача* 2 *имеет единственное решение; если условие* (11) *нарушается, то интегральное уравнение* (8), *следовательно задача* 2, *имеют решения с точностью слагаемого, множителем которого является неизвестное число* $g_1(0)$.

Теперь покажем, что условие $f_1(x_0, y_0) \neq 0$ является существенным для однозначной разрешимости задачи 2. В противном случае, существует функция $f_1(x, y) = \widetilde{v}_{mn}(x, y) = \sin \pi m \widetilde{x} \sin \pi n \widetilde{y}$, где m и n – некоторые фиксированные натуральные числа, $\widetilde{x} = x/p$, $\widetilde{y} = y/q$, такие, что $f_1(x_0, y_0) = \sin \pi m \widetilde{x}_0 \sin \pi n \widetilde{y}_0 = 0$. Для такой функции при любой функции $g_1(t) \in C[0, \beta]$ и $\psi(x, y) \equiv 0$, $h_1(t) \equiv 0$ существует ненулевое решение задачи 2

$$u_{mn}(x, y, t) = u_{1mn}(t) \widetilde{v}_{mn}(x, y), \tag{12}$$

где

$$u_{1mn}(t) = \begin{cases} \dfrac{\omega_{1mn}}{\delta_{mn}(\alpha)} e^{-\lambda_{mn}^2 t} + \int\limits_0^t g_1(s) e^{-\lambda_{mn}^2 (t-s)}\, ds, & t \geq 0, \\ \dfrac{\omega_{1mn}}{\delta_{mn}(\alpha)} (\cos \lambda_{mn} t - \lambda_{mn} \sin \lambda_{mn} t) + \dfrac{g_1(0)}{\lambda_{mn}} \sin \lambda_{mn} t - & \\ \qquad - \dfrac{f_{2mn}}{\lambda_{mn}} \int\limits_t^0 g_2(s) \sin\left[\lambda_{mn}(t - s)\right]\, ds, & t \leq 0, \end{cases}$$

$$\omega_{1mn} = \frac{g_1(0)}{\lambda_{mn}} \sin \lambda_{mn} \alpha - \frac{f_{2mn}}{\lambda_{mn}} \int\limits_{-\alpha}^0 g_2(s) \sin\left[\lambda_{mn}(s + \alpha)\right]\, ds.$$

В самом деле, построенная функция (12) удовлетворяет условиям (2) – (8) (где $h_1(t) \equiv 0$). Данная функция удовлетворяет классу (2) так как

$$\lim_{t \to 0+0} u_{mn}(x, y, t) = \frac{\omega_{1mn}}{\delta_{mn}(\alpha)} v_{mn}(x, y) = \lim_{t \to 0-0} u_{mn}(x, y, t);$$

$$\lim_{t \to 0+0} \frac{\partial u_{mn}(x, y, t)}{\partial t} = \left[-\lambda_{mn}^2 \frac{\omega_{1mn}}{\delta_{mn}(\alpha)} + g_1(0)\right] v_{mn}(x, y) = \lim_{t \to 0-0} \frac{\partial u_{mn}(x, y, t)}{\partial t}.$$

Условия (4) и (5) выполняются в силу (2). Условия (6) и (8) также выполняются, так как

$$u_{mn}(x, y, -\alpha) = \frac{\omega_{1mn}}{\delta_{mn}(\alpha)} (\cos \lambda_{mn} \alpha + \lambda_{mn} \sin \lambda_{mn} \alpha) -$$

$$- \frac{g_1(0)}{\lambda_{mn}} \sin \lambda_{mn} \alpha + \frac{f_{2mn}}{\lambda_{mn}} \int\limits_t^0 g_2(s) \sin\left[\lambda_{mn}(s + \alpha)\right]\, ds = 0;$$

$$u_{mn}(x_0, y_0, t) = u_{1mn}(t) v_{mn}(x_0, y_0) = 0.$$

Из построения функции (12) следует, что $u_{mn}(x, y, t)$ на множестве $Q_- \cup Q_+$ является решением уравнения (1).

Теперь выясним для каких точек $\widetilde{x}_0$, $\widetilde{y}_0 \in (0, 1)$ имеет место равенство

$$\sin \pi m \widetilde{x}_0 \sin \pi n \widetilde{y}_0 = 0 \iff \widetilde{x}_0 = \frac{k}{m} \text{ или } \widetilde{y}_0 = \frac{k}{n}, \ \ k, m, n \in \mathbb{N}, \ \ k < m, \ \ k < n.$$

Следовательно, когда $\widetilde{x}_0$ или $\widetilde{y}_0$ принимают рациональные значения, условие $f_1(x_0, y_0) \neq 0$ будет нарушено.

4. Исследование обратной задачи 3

Аналогично п. 3, полагая в формуле (19) при $t \leq 0$ с учетом условия (10), получим интегральное уравнение типа первого рода

$$(1) \qquad -\int\limits_t^0 g_2(s) K_2(s,t)\,ds - \int\limits_{-\alpha}^0 g_2(s) K_3(s,t)\,ds = \widetilde{h}_2(t), \quad -\alpha \leq t \leq 0,$$

здесь

$$(2) \qquad K_2(s,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{f_{2mn}}{\lambda_{mn}} \sin\left[\lambda_{mn}(t-s)\right] v_{mn}(x_0,y_0), \quad -\alpha \leq t \leq s \leq 0,$$

(3)

$$K_3(s,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{f_{2mn}}{\lambda_{mn}\delta_{mn}(\alpha)} \Big(\cos\lambda_{mn}t - \lambda_{mn}\sin\lambda_{mn}t\Big) \sin\lambda_{mn}(s+\alpha)\, v_{mn}(x_0,y_0),$$

$$(4) \qquad \widetilde{h}_2(t) = h_2(t) - g_1(0) H_4(t) - H_5(t), \quad -\alpha \leq t \leq 0,$$

(5)

$$H_4(t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{f_{1mn}}{\lambda_{mn}} \left[\frac{(\cos\lambda_{mn}t - \lambda_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\lambda_{mn}\alpha}{\delta_{mn}(\alpha)} \sin\lambda_{mn}t \right] v_{mn}(x_0,y_0),$$

$$(6) \qquad H_5(t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\psi_{mn}}{\delta_{mn}(\alpha)} \Big(\cos\lambda_{mn}t - \lambda_{mn}\sin\lambda_{mn}t\Big) v_{mn}(x_0,y_0).$$

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2, *то ряды* (2), (3), (5), (6) *и их производные первого и второго порядков по* t *на замкнутом множестве* $-\alpha \leq t \leq s \leq 0$ *сходятся равномерно.*

Доказательство проводится аналогично лемме 3.1.

Обе части уравнения (1) продифференцируем по t два раза. Тогда получим

$$(7) \quad g_2(t) \frac{\partial K_2(s,t)}{\partial t}\Big|_{s=t} - \int\limits_t^0 g_2(s) \frac{\partial^2 K_2(s,t)}{\partial t^2}\,ds - \int_{-\alpha}^0 g_2(s) \frac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2}\,ds = \widetilde{h}_2''(t).$$

На основании (2) вычислим

$$(8) \qquad \frac{\partial K_2(s,t)}{\partial t}\Big|_{s=t} = \sum_{m,n=1}^{+\infty} f_{2mn} v_{mn}(x_0,y_0) = f_2(x_0,y_0).$$

Если теперь потребуем, что $f_2(x_0,y_0) \neq 0$, то из (7) и (8) получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$(9) \qquad g_2(t) - \lambda \int\limits_{-\alpha}^0 g_2(s) H(s,t)\,dt = \lambda(t),$$

где

$$H(s,t) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2}, & -\alpha \le s \le t, \\ \dfrac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 K_2(s,t)}{\partial t^2}, & t \le s \le 0, \end{cases} \tag{10}$$

$$\lambda = \frac{1}{f_2(x_0, y_0)}, \quad \lambda(t) = \frac{\widetilde{h}_2''(t)}{f_2(x_0, y_0)}.$$

Ядро $H(s,t)$ интегрального уравнения (9), определенное формулой (10), непрерывно на замкнутом квадрате $-\alpha \le s,\, t \le 0$. Если $h_2(t) \in C^2[-\alpha, 0]$, то правая часть $\lambda(t)$ также непрерывна на $[-\alpha, 0]$. Следовательно, уравнение (9) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью, к которому применима известная теория Фредгольма [38, с. 434]. Выделим случаи, когда уравнение (9) имеет единственное решение. Методом последовательных приближений можно доказать однозначную разрешимость данного уравнения в классе непрерывных на $[-\alpha, 0]$ функций при

$$|\lambda| < \frac{1}{M\alpha}, \quad M = \max_{-\alpha \le s,\, t \le 0} |H(s,t)|.$$

Из теории Фредгольма также следует, что, если λ не является характеристическим числом ядра $H(s,t)$, то интегральное уравнение (9) имеет единственное непрерывное на $[-\alpha, 0]$ решение.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2, $g_1(t) \in C[-\alpha, 0]$, $h_2(t) \in C^2[-\alpha, 0]$, $f_2(x_0, y_0) \ne 0$. *Тогда при выполнении одного из следующих условий: а)* $|f_2(x_0, y_0)| > M\alpha$, *где* $M = \max\limits_{-\alpha \le s, t \le 0} |H(s,t)|$; *б) число* $f_2^{-1}(x_2, y_2)$ *не является характеристическим числом ядра* $H(s,t)$ *существует единственное решение задачи* 3. *При этом функция* $g_2(t)$ *определяется как решение интегрального уравнения* (9), *после чего функция* $u(x, y, t)$ *определяется по формуле* (19).

Отметим, что условие $f_2(x_0, y_0) \ne 0$ является существенным для однозначной разрешимости задачи 2. Действительно, если это условие нарушено, то существует функция $f_2(x, y) = \widetilde{v}_{mn}(x, y) = \sin \pi m \widetilde{x} \sin \pi n \widetilde{y}$, где m и n – некоторые фиксированные натуральные числа, $\widetilde{x} = x/p$, $\widetilde{y} = y/q$, такие, что $f_2(x_0, y_0) = \sin \pi m \widetilde{x}_0 \sin \pi n \widetilde{y}_0 = 0$. Для такой функции при любой функции $g_1(t) \in C[0, \beta]$ и $\psi(x, y) \equiv 0$, $h_2(t) \equiv 0$ существует ненулевое решение задачи 3

$$u_{mn}(x, y, t) = u_{2mn}(t) \widetilde{v}_{mn}(x, y), \tag{11}$$

где

$$u_{mn}(t) = \begin{cases} \dfrac{\omega_{2mn}}{\delta_{mn}(\alpha)} e^{-\lambda_{mn}^2 t} + f_{1mn} \int\limits_0^t g_1(s) e^{-\lambda_{mn}^2 (t-s)}\, ds, & t \ge 0, \\ \dfrac{\omega_{2mn}}{\delta_{mn}(\alpha)} (\cos \lambda_{mn} t - \lambda_{mn} \sin \lambda_{mn} t) + \dfrac{f_{1mn} g_1(0)}{\lambda_{mn}} \sin \lambda_{mn} t - & \\ \qquad - \dfrac{1}{\lambda_{mn}} \int\limits_t^0 g_2(s) \sin\left[\lambda_{mn}(t-s)\right] ds, & t \le 0, \end{cases}$$

$$\omega_{2mn} = \frac{f_{1mn} g_1(0)}{\lambda_{mn}} \sin \lambda_{mn}\alpha - \frac{1}{\lambda_{mn}} \int\limits_{-\alpha}^{0} g_2(s) \sin\left[\lambda_{mn}(s+\alpha)\right]\, ds.$$

Аналогично функции (12) доказывается, что построенная функция (11) удовлетворяет условиям задачи 3 при $h_2(t) = 0$ и любой функции $g_2(t) \in C[-\alpha, 0]$.

5. Исследование обратной задачи 4

Требуя, чтобы функция (19) при $-\alpha \le t \le \beta$ удовлетворяла условиям (8) и (10), получим систему интегральных уравнений с нагруженными слагаемыми

$$(1)\quad \int\limits_{0}^{t} g_1(s) K_1(s,t)\, ds - \int\limits_{-\alpha}^{0} g_2(s) \widetilde{K}_1(s,t)\, ds = h_1(t) - g_1(0) H_1(t) - H_2(t) = \widetilde{\widetilde{h}}_1(t),$$

$$(2)\quad -\int\limits_{t}^{0} g_2(s) K_2(s,t)\, dt - \int\limits_{-\alpha}^{0} g_2(s) K_3(s,t)\, ds = h_2(t) - g_1(0) H_4(t) - H_5(t) = \widetilde{h}_2(t),$$

где $K_1(s,t)$, $H_1(t)$, $H_2(t)$, $K_2(s,t)$, $K_3(s,t)$, $H_4(t)$ и $H_5(t)$ определяются соответственно формулами (2), (4), (5), (2), (3), (5) и (6),

$$(3)\qquad \widetilde{K}_1(s,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{f_{2mn}}{\lambda_{mn}\delta_{mn}(\alpha)} e^{-\lambda^2 t} \sin\left[\lambda_{mn}(s+\alpha)\right] v_{mn}(x_0,y_0).$$

Следуя пп. 3 и 4 продифференцируем уравнение (1) один раз, а уравнение (2) два раза. В результате имеем

$$(4)\qquad g_1(t) f_1(x_0,y_0) + \int\limits_{0}^{t} g_1(s) \frac{\partial K_1(s,t)}{\partial t}\, ds - \int\limits_{-\alpha}^{0} g_2(s) \frac{\partial \widetilde{K}_1(s,t)}{\partial t}\, ds = \widetilde{\widetilde{h}}{}_1'(t),$$

$$(5)\qquad g_2(t) f_2(x_0,y_0) - \int\limits_{t}^{0} g_2(s) \frac{\partial^2 K_2(s,t)}{\partial t^2}\, ds - \int\limits_{-\alpha}^{0} g_2(s) \frac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2}\, ds = \widetilde{h}_2''(t).$$

Полагая в равенствах (4) и (5) $t = 0$, получим

$$(6)\qquad g_1(0) f_1(x_0,y_0) - \int\limits_{-\alpha}^{0} g_2(s) \frac{\partial \widetilde{K}_1(s,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} ds = h_1'(0) - g_1(0) H_1'(0) - H_2'(0),$$

$$(7)\qquad g_2(0) f_2(x_0,y_0) - \int\limits_{-\alpha}^{0} g_2(s) \frac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2}\Big|_{t=0} ds = h_2''(0) - g_1(0) H_4''(0) - H_5''(0).$$

Предварительно из формул (3), (3), (4), (5), (5) и (6) вычислим

$$\frac{\partial \widetilde{K}_1(s,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{mn} f_{2mn}}{\delta_{mn}(\alpha)} \sin\left[\lambda_{mn}(s+\alpha)\right] v_{mn}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2}\Big|_{t=0},$$

$$H_1'(0) = -\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{mn} f_{1mn}}{\delta_{mn}(\alpha)} \sin \lambda_{mn}\alpha\, v_{mn}(x_0,y_0) = H_4''(0),$$

$$H_2'(0) = -\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{mn}^2 \psi_{mn}}{\delta_{mn}(\alpha)} v_{mn}(x_0, y_0) = H_5''(0).$$

Из условий (8) и (10) задачи 4 и уравнения (1) следует, что $h_1'(0) = h_2''(0)$. Тогда из (6) и (7) найдем равенство

$$g_1(0) f_1(x_0, y_0) = g_2(0) f_2(x_0, y_0), \tag{8}$$

которое связывает значения $g_1(0)$ и $g_2(0)$ между собой. Из равенства (8) найдем значение $g_1(0)$ и подставим в правую часть уравнения (5). Тогда получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью, которая содержит значение $g_2(0)$. При выполнении условий теоремы 4.1 уравнение (5) имеет единственное решение $g_2(t)$, которое можно определить через резольвенту ядра $H(s,t)$ и правую часть $\lambda(t)$. Отсюда получаем линейное уравнение относительно $g_2(0)$, которое при определенных условиях на функции $f_i(x,y)$ и $h_i(t)$, $i = 1, 2$, в нуле однозначно разрешимо. После чего найденную таким образом функцию $g_2(t)$ подставляем в уравнение (4) и в силу теоремы 3.1 полученное интегральное уравнение относительно $g_1(t)$ однозначно разрешимо в классе $C[0, \beta]$.

Отметим, что если $g_1(0) = 0$, то из равенства (8) следует и $g_2(0) = 0$. Тогда интегральные уравнения (4) и (5) не содержат нагруженные слагаемые.

Таким образом, в силу приведенных выше рассуждений приходим к следующему утверждению по задаче 4.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2, $h_1(t) \in C^1[0, \beta]$, $h_2(t) \in C^2[-\alpha, 0]$, $f_1(x_0, y_0) \neq 0$, $f_2(x_0, y_0) \neq 0$ *и выполнении одного из условий а) или б) теоремы* 4.1. *Тогда система интегральных уравнений* (4) *и* (5) *имеет единственное решение* $g_2(t) \in C[-\alpha, 0]$ *и* $g_1(t) \in C[0, \beta]$, *после этого функция* $u(x,t)$ *находится по формуле* (19).

Отметим, что условия $f_1(x_0, y_0) \neq 0$ и $f_2(x_0, y_0) \neq 0$ являются существенными для однозначной разрешимости задачи 4. В противном случае, существуют функции $f_1(x,y) = f_2(x,y) = \widetilde{v}_{mn}(x,y) = \sin \pi m \widetilde{x} \sin \pi n \widetilde{y}$, где m – некоторое фиксированное натуральное число, такая, что $f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0) = \sin \pi m \widetilde{x}_0 \sin \pi n \widetilde{y}_0 = 0$. Тогда для любых $g_1(t) \in C[0, \beta]$, $g_2(t) \in C[-\alpha, 0]$ существует ненулевое решение задачи 4 при $\psi(x,y) \equiv 0$, $h_1(t) \equiv 0$, $h_2(t) \equiv 0$

$$u_{mn}(x, y, t) = u_{3mn}(t) \widetilde{v}_{mn}(x, y), \tag{9}$$

где

$$u_{3mn}(t) = \begin{cases} \dfrac{\omega_{3mn}}{\delta_{mn}(\alpha)} e^{-\lambda_{mn}^2 t} + \int\limits_0^t g_1(s) e^{-\lambda_{mn}^2 (t-s)}\, ds, & t \geq 0, \\ \dfrac{\omega_{3mn}}{\delta_{mn}(\alpha)} (\cos \lambda_{mn} t - \lambda_{mn} \sin \lambda_{mn} t) + \dfrac{g_1(0)}{\lambda_{mn}} \sin \lambda_{mn} t - \\ \qquad - \dfrac{1}{\lambda_{mn}} \int\limits_t^0 g_2(s) \sin\left[\lambda_{mn}(t-s)\right] ds, & t \leq 0, \end{cases}$$

$$\omega_{3mn} = \frac{g_1(0)}{\lambda_{mn}} \sin \lambda_{mn} \alpha - \frac{1}{\lambda_{mn}} \int_{-\alpha}^{0} g_2(s) \sin\left[\lambda_{mn}(s + \alpha)\right] ds.$$

Аналогично п. 3 можно показать, что построенная функция (9) удовлетворяет условиям (2) – (10).

References

[1] I.M. Gelfand, *Some questions of analysis and differential equations*, Uspehi Mat. Nauk, **14**:3(87) (1959), 3–19. MR0121557

[2] Ya.S. Uflyand, *On the question of the propagation of oscillations in compound electric lines*, Engineering and Physics Journal, **7**:1 (1964), 89–92.

[3] Ya.S. Uflyand, I.T. Lozanovskaya, *On a Class of Problems of Mathematical Physics with a Mixed Spectrum of Eigenvalues*, Dokl. Academy of Sciences of the USSR, **164**:5 (1965), 1005–1007. Zbl 0137.18601

[4] T.D. Dzhuraev, A. Sopuev, M. Mamazhanov, *Boundary value problems for parabolic-hyperbolic equations*, Tashkent: Fan, 1986. MR1357670

[5] O.A. Ladyzhenskaya, L. Stupyalis, *On mixed-type equations*, Bulletin of Leningrad State University, A series of mathematics, mechanics and astronomy, **19**:4 (1965), 38–46. MR0212403

[6] L. Stupyalis, *Initial-boundary value problems for equations of mixed type*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **127** (1975), 135–170.

[7] K.B. Sabitov, *The Tricomi problem for a mixed parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain*, Math. Notes, **86**:2 (2009), 249–254. MR2584560

[8] K.B. Sabitov, *Direct and inverse problems for equations of mixed parabolic-hyperbolic type*, Moscow: Nauka, 2016.

[9] K.B. Sabitov, *Initial boundary and inverse problems for the inhomogeneous equation of a mixed parabolic-hyperbolic equation*, Math. Notes, **102**:3 (2017), 378–395. MR3691706

[10] S.N. Sidorov, *Nonlocal problem for a degenerate parabolic-hyperbolic equation*, Reports of the Adyghe International Academy of Sciences, **14**:3 (2012), 34–44.

[11] K.B. Sabitov, S.N. Sidorov, *On a nonlocal problem for a degenerating parabolic-hyperbolic equation*, Differential Equations, **50**:3 (2014), 352–361. MR3300044

[12] S.N. Sidorov, *Nonlocal problems for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with power degeneration*, Russian Math. (Iz. VUZ), **59**:12 (2015), 46–55.

[13] K.B. Sabitov, S.N. Sidorov, *Initial-Boundary-Value Problem for Inhomogeneous Degenerate Equations of Mixed Parabolic-Hyperbolic Type*, Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i yeye pril. Temat. obz., **137** (2017), 26–60.

[14] K.B. Sabitov, S.N. Sidorov, *Initial-Boundary-Value Problem for Inhomogeneous Degenerate Equations of Mixed Parabolic-Hyperbolic Type*, Journal of Mathematical Sciences, 236:6 (2019), 603–640.

[15] M.M. Lavrentyev, K.G. Reznitskaya, V.G. Yakhno, *One-dimensional inverse problems of mathematical physics*, Novosibirsk: Nauka, 1982. MR0701852

[16] V.G. Romanov, *Inverse problems of mathematical physics*, Moscow: Nauka, 1984. MR0759893

[17] V.G. Romanov, S.I. Kabanikhin, *Inverse geo-electrical problems*, Moscow: Nauka, 1991. MR1190273

[18] A.M. Denisov, *Introduction to the theory of inverse problems*, MSU, Moskow, 1994.

[19] A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin, *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*, New York, Basel: Marcel Dekker Inc., 1999.

[20] V. Isakov, *Inverse problems for partial differential equations*, New-York: Springer, 2006. MR2193218

[21] S.I. Kabanikhin, *Inverse and incorrect tasks*, Novosibirsk: Siberian Scientific Publishing, 2009

[22] A.I. Prilepko, V.V. Soloviev, *Solvability theorems and the Rote method in inverse problems for a parabolic equation, I, II*, Differential Equations, **23**:10 (1987), 1791–1799; **23**:11 (1987), 1971–1980. MR0928863; MR0928246

[23] A.I. Prilepko, I.A. Vasin, *Study of uniqueness problems in some nonlinear inverse problems of hydrodynamics*, Differential Equations, **26**:1 (1990), 109–120. MR1050366

[24] A.I. Prilepko, A.B. Kostin, *Estimation of the spectral radius of an operator and the solvability of inverse problems for evolution equations*, Math. Notes, **53**:1 (1993), 63–66. MR1215162

[25] V.V. Soloviev, *Determination of the source and coefficients in a parabolic equation in the multidimensional case*, Differential Equations, **31**:6 (1995), 1060–1069.

[26] V.V. Soloviev, *The existence of a solution in the "whole" inverse problem of determining the source in a quasilinear parabolic equation*, Differential Equations, **32**:4 (1996), 536–544.

[27] A.B. Kostin, *The inverse problem of recovering the source in a parabolic equation under a condition of nonlocal observation*, Sbornik: Mathematics, **204**:10 (2013), 1391–1434. MR3137159

[28] A.I. Kozhanov, *A nonlinear loaded parabolic equation and a related inverse problem*, Math. Notes, **76**:6 (2004), 784–795. MR2127495

[29] A.I. Kozhanov, R.R. Safiullova, *Linear inverse problems for parabolic and hyperbolic equations*, J. Inverse Ill-Posed Probl., **18**:1 (2010), 1–18. MR2629677

[30] K.B. Sabitov, E.M. Safin, *The inverse problem for a mixed-type parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain*, Russian Math. (Iz. VUZ), **54**:4 (2010), 48–54. MR2779412

[31] K.B. Sabitov, E.M. Safin, *The inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type*, Math. Notes, **87**:6 (2010), 880–889. MR2840385

[32] K.B. Sabitov, S.N. Sidorov, *Inverse problem for degenerate parabolic-hyperbolic equation with nonlocal boundary condition*, Russian Math. (Iz. VUZ), **59**:1 (2015), 39–50. MR3372221

[33] S.N. Sidorov, *Inverse problems for a mixed parabolic-hyperbolic equation with adegenerate parabolic part*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 144–157.

[34] S.N. Sidorov, *Inverse problems for a degenerate mixedparabolic-hyperbolic equation on findingtime-depending factors in right hand sides*, Ufa Mathematical Journal, **11**:1 (2019), 75–89.

[35] K.B. Sabitov, S.N. Sidorov, *Initial boundary value problem for a three-dimensional equation of parabolic-hyperbolic type*, Differential Equations (accepted in print).

[36] A.A. Bukhshtab, *Number theory*, St. Petersburg: Lan', 2008.

[37] A. Zigmund, *Trigonometric Rows*, Vol. 1. Moscow: Mir, 1965.

[38] K.B. Sabitov, *Functional, differential and integral equations*, Moscow: Vysshaya shkola, 2005.

Stanislav Nikolaevich Sidorov
Sterlitamak branch of Bashkir State University,
Lenin Ave., 37,
453103, Sterlitamak, Russia
Sterlitamak branch of the Institute of Strategic Studies of the Republic of Bashkortostan,
st. Odesskaya, 68,
453103, Sterlitamak, Russia
E-mail address: stsid@mail.ru