S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 531.091
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 01A55

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ И СВЯЗЬ МЕЖДУ ПОТЕНЦИАЛОМ И ВЕКТОРОМ В РАБОТАХ О.И. СОМОВА.

А. О. Юлина

Представлено П.П. Петровым

Abstract: The article presents the chronology of the development of the main mathematical elements of the electromagnetic picture of the world.

The work analyzes the main structural units of the mathematical representation of the electromagnetic picture of the world, which either only appeared in the first half of the 19th century (1796 - 1873), or received a final formulation.

The St. Petersburg mathematician and mechanic O. I. Somov was the first in Russia to use the apparatus of vector calculus in the course of theoretical mechanics.

In 1863, O. I. Somov expanded the concept of a differential parameter, giving it a vector meaning.

The author of the article examines in detail the analogies between the first-order differential parameter and the gradient, the second-order differential parameter and divergences in the works of O. I. Somov.

The article shows that Somov's important introduction to the application of analysis to kinematics is a direct method for determining first-order differential parameters from a point function. Laplace gave an expression for the second-order differential parameter in spherical or polar coordinates, Lame found expressions for both parameters in some rectangular coordinates. Somov presented the

Yulina, A.O., Problems of mathematical physics.

Поступила 1 января 2025 г., опубликована 31 декабря 2025 г.

differential parameter as a segment laid off on the normal to the level surface (tangent).

Keywords: Differential parameter, gradient, divergence, potential field.

1 Введение

В статье представлена хронология развития основных математических элементов электромагнитной картины мира.

В работе проанализированы основные структурные единицы математического представления электромагнитной картины мира, которые или только появились в первой половине 19 века (1796 – 1873), или получили окончательную формулировку.

Петербургский математик и механик О.И. Сомов первый в России использовал аппарат векторного исчисления в курсе теоретической механики. В 1863 году О.И. Сомов расширил понятие дифференциального параметра, придав ему векторный смысл.

Автор статьи подробно рассматривает аналогии между дифференциальным параметром первого порядка и градиентом, дифференциальным параметром второго порядка и дивергенций в работах О.И. Сомова.

В статье показано, что важным введением Сомова в приложении анализа к кинематике является прямой способ для определения дифференциальных параметров первого порядка от функции точки. Лаплас дал выражение дифференциального параметра второго порядка в сферических или полярных координатах, Ламе нашел выражения обоих параметров в каких-либо прямоугольных координатах. Сомов представил дифференциальный параметр как отрезок, отложенный на нормали к поверхности уровня (касательной).

В электрических и магнитных исследованиях потенциал определяется так, что результирующая сила в любом направлении измеряется уменьшением потенциала в этом направлении. Этот метод использования выражения делает его соответствующим по знаку потенциальной энергии, которая всегда уменьшается, когда тела перемещаются в направлении сил, действующих на них. Геометрическая природа связи между потенциалом и вектором, полученным из него, проясняется благодаря открытию Гамильтоном формы оператора, с помощью которого вектор выводится из потенциала.

Петербургский математик и механик О.И. Сомов первый в России использовал аппарат векторного исчисления в курсе теоретической механики. Сомов глубоко проработал труды Гамильтона и взял из них самое необходимое и полезное для изложения механики на принципиально новом уровне.

Сомов расширил понятие дифференциального параметра, придав ему векторный смысл. Выделил дифференциальный параметр первого порядка (градиент) и второго порядка (дивергенция).

Ему принадлежит введение математического понятия градиента, годографа, векторного произведения, линии и поверхности уровня, потенциала и их геометрического и векторного смысла. Однако же работы академика Сомова незаслуженно забыты. Постараемся восполнить этот пробел в данной работе.

2 Хронология исследования

Хронологию развития основных математических элементов электромагнитной картины мира, первой половины 19 века (1796 – 1873) представим в следующей таблице.

Pierre-Simon Laplace	дифференциальный оператор второго порядка	**1796**
George Green	потенциальная функция	**1828**
William Hamilton	вектор, векторные операторы	**1853**
Gabriel Lamé	дифференциальный оператор первого порядка	1859
Осип Иванович Сомов	геометрическая функция, векторное произведение, дифференциальные операторы первого и второго порядка	1860
Peter Guthrie Tait	векторные операторы, оператор набла	**1862**
James Clerk Maxwell	силовое поле, градиент, дивергенция, ротор	**1873**

Одним из главных элементов которой является электромагнитное поле, соответствующее математическое обеспечение – векторное исчисление, теория поля.

Перечислим основные конструкты (понятия, определения, структурные элементы), которые или только появились в указанный период, или получили окончательную (до сегодняшнего дня) формулировку. Одним из главных элементов которой является электромагнитное поле, соответствующее математическое обеспечение – векторное исчисление, теория поля.

1. Сила

- мера движения и взаимодействия

- величина и направление

Сила, как мера движения и взаимодействия, определяется двумя основными параметрами: величина и направление. Математическое представление такой меры – вектор.

Первое применение понятия вектора в механике - это изображения силы в виде отрезка (линии, как тогда говорили). Около 1600 г. механик и инженер Симон Стевин строил параллелограмм сил с помощью таких отрезков. Формализовал правило сложения сил П. Вариньон. Направленные отрезки использовали также Галилей и Ньютон. Собственно, они пользовались векторами в неявной форме, говоря, что сила и ускорение одинаково направлены.

Аналитическая механика Эйлера и Лагранжа во многом основывалась на векторных величинах, оперируя с ними как с алгебраическими величинами.

Операции сложения и вычитания векторов в механике применялись сначала для векторов сил, а затем для кинематических параметров: скоростей и ускорений точек.

Механика Лагранжа - это геометрия четырех измерений, в которой к трем измерениям пространства присоединяется четвертое – время. Согласно этому взгляду, силы и массы не определяются в анализе, как величины особого рода, так как силы выражаются линиями, а массы - отношениями сил. Однако, анализируя реальные движения, приходится принимать во внимание конкретное значение силы, как причину движения, поэтому вопросы механики распадаются на два рода: кинематические и динамические.

Ампер первый раскрыл важность и ясность учения о геометрических свойствах движения и об отношениях между скоростями различных частей машины, независимо от понятий силы и массы. Понселе первым продвинул мысли Ампера, читая лекции в Парижском факультете в 1838, 1839 годах. После этого разработка кинематических вопросов стала активно распространяться. Сомов, так же, как и Ж. Э. Бур, разделил рациональную механику на кинематику, статику и динамику. К кинематике он отнес только общие геометрические вопросы о движении точки и неизменяемой системы, другие же специальные кинематические вопросы, относящиеся к частным теориям, такие как вопросы деформации твердого тела и движение жидкости не отделяет от динамики. Решение вопросов о скоростях и ускорениях в движении точки он основывает на обобщенных методах дифференциального исчисления, которые он назвал методами геометрического дифференцирования [8].

В математике термин «вектор» был введен У. Гамильтоном. В механике Гамильтон для задания траектории движения точки определяет годограф радиус-вектора точки. Пространственную интерпретацию вращательного движения твердого тела относительно неподвижной точки Гамильтон описывает векторами, представляющие собой особый вид гиперкомплексных чисел, которые он называет кватернионами. В своих фундаментальных трудах, посвященных теории кватернионов, Гамильтон излагает основы векторной алгебры и векторного анализа, формулирует законы геометрического сложения, вычитания, умножения, рассматривает два вида произведений векторов – скалярное и векторное. Также ему принадлежат операции дифференцирования и интегрирования векторов.

Однако, гениальные идеи Гамильтона не скоро нашли признание во Франции, Германии и России. Центральной заслугой Сомова было ведение в механику векторного исчисления. Сомов глубоко проработал труды Гамильтона и взял из них самое необходимое и полезное для изложения механики на принципиально новом уровне. Он проделал огромную работу по систематизации теоретической механики, как в методическом, так и в научном плане. Сомов обобщил работы Г. Ламе по координатам, Резаля по геометрическим производным, Кориолиса по ускорениям высших порядков, включив их в свою логически обоснованную, аналитически полностью завершенную и снабженную новейшим математическим аппаратом «Рациональную механику» [9].

2. Потенциал

• Потенциальная функция

• Потенциальная сила

Рассматривается особый класс сил, действующих на частицы – позиционные, которые зависят только от положения точки в пространстве - потенциальные. Работа таких сил не зависит ни от траектории, по которой перемещается точка, ни от характера движения, а определяется лишь начальным и конечным положением точки. В 1828 году Джордж Грин определил потенциальную функцию в работе «An Essay on the Application of mathematical Analysis in the theories of Electricity and Magnetism».

«Поскольку эта функция, дающая в столь простой форме значения сил, которыми частица p электричества, как бы она ни располагалась, приводится в движение, будет очень часто встречаться в дальнейшем, мы рискнули назвать ее потенциальной функцией, принадлежащей системе, и она, очевидно, будет функцией координат рассматриваемой частицы p.»

3. Силовое поле

• Дифференциальный параметр

• Градиент

К 1873 году общая теория электромагнитного поля завершилась в фундаментальных работах Джеймса Кларка Максвелла. Вводятся следующие определения силового поля и потенциального поля. Силовым полем называется область пространства, в каждой точке которого на помещенную туда материальную точку действует сила, однозначно определенная по величине и направлению в любой момент времени (функция точки). Примеры силовых полей: поле силы тяжести вблизи земной поверхности, гравитационное поле, поле силы упругости, электростатическое поле.

Таким образом, если функция точки – скалярная величина, то соответствующие поле скалярное, если же векторная, поле векторное. Потенциальная энергия и потенциальная функция в математической физике отличаются только знаком.

Силовое поле называется потенциальным, если для него существует функция точки (функция координат), такая, что проекции действующей силы могут быть вычислены через ее частные производные по соответствующим координатам.

Потенциальная сила всегда направлена по нормали к эквипотенциальной поверхности (понятие уровня, поверхность точек с равной потенциальной энергией) в сторону уменьшения значений потенциальной энергии. Такой вектор назвали градиентом (дифференциальный параметр).

$$grad\Pi(x,y,z) = \frac{\partial\Pi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Pi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Pi}{\partial z}\vec{k}$$

Важная характеристика векторного поля – расходимость (дивергенция). Расходимость поля представляет собой предел отношения потока поля через малую замкнутую поверхность к объему, ограниченному этой поверхностью.

$$div\ gradU = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Дифференциальный оператор $\nabla U = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа, $U(x,y,z)$ – скалярная функция.

В 1862 году Питер Гёсри Тэт представил дифференциальный оператор, не зависящий от аналитического выражения функции – оператор набла.

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k},$$
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Лаплас дал выражение дифференциального параметра второго порядка в сферических или полярных координатах, Ламе нашел выражения обоих параметров в каких-либо прямоугольных координатах.

Сомов представил дифференциальный параметр как отрезок, отложенный на нормали к поверхности уровня (касательной). Приняв такой геометрический образ параметра и, определив его независимо от системы координат как производную функции точки относительно перемещения нормального к поверхности уровня, Сомов показал прямой способ для выражения дифференциальных параметров первого и второго порядка и кривизны поверхности в каких либо координатных системах ортогональных или косоугольных. Этот способ составления дифференциальных параметров первого порядка охватывает все графические и аналитические способы для построения нормалей к поверхностям и кривым линиям.

Таким образом, Сомов придал дифференциальному параметру векторный смысл, что стало революционным поворотом в изложении механики.

3 Элементы теории поля в работах О.И. Сомова

Изложение кинематики с помощью векторного анализа является заслугой О.И. Сомова. Большая часть его статей в этом направлении научной работы вошла в его учебник «Рациональная механика» («Прямой способ для выражения дифференциальных параметров первого или второго порядка в криволинейных координатах»; «Об ускорении различных порядков в относительном движении»; «Construct. des axes d'un ellipse», «Преобразование прямолинейных координат в эллиптические»; «Attract. d'un couche mince sur un point de sa surface»; «О решении одного вопроса механики, предложенного Абелем»; «Доказательство Коши для уравнения равновесия»; «Спрямление кривых линий»; «Алгебраическое доказательство Гамильтонова начала».) Поэтому далее подробно мы проанализируем его фундаментальный труд «Рациональная механика» [2].

Первая часть «Рациональной механики» (кинематика) Сомова была издана в 1872 году, в 1874 году была выпущена и неоконченная вторая часть (статика, динамика). После смерти автора эти два тома были переведены на немецкий язык в 1878 году. После Курса Сомова в механике прочно закрепился векторный анализ, впоследствии это привело к созданию теории поля. Приведем основные элементы теории поля в работах Сомова.

Сомов определяет величину и направления хорды, стягивающей пространство, пройденное точкой в данное время, геометрическое дифференцирование по разным переменным. Вводит следующие понятия: геометрическая вариация, функция точки, уровень, общий способ координат, дифференциальные параметры первого порядка. Также приводит наиболее замечательные системы координат [4].

В задачах геометрии, механики и математической физики часто приходится рассматривать два выражения, составленных из из частных производных функции координат точки. Если это декартовы координаты, то дифференциальный параметр первого порядка представляет собой квадратный корень из суммы квадратов частных производных первого порядка, а его величина и направление могут быть представлены длиною, для которой проекции на осях и служат эти производные. В этом случае, дифференциальный параметр второго порядка есть сумма частных производных второго порядка [5].

Успех решения геометрической задачи очень часто зависит от выбора системы координат. *Во многих вопросах геометрии и механики употребление прямолинейных координат представляет неудобство, состоящее в длинных выкладках, маскирующих весьма часто прямой путь к достижению желаемого результата.*

Лаплас дал выражение дифференциального параметра второго порядка в криволинейных координатах, Ламе нашел выражения обоих параметров в декартовых координатах.

О.И. Сомов представил способ прямого выражения дифференциальных параметров в координатах *каго-либого рода.*

Дифференциальный параметр первого порядка функции, которая должна сохранять постоянное значение для точек некоторой поверхности, направлен по нормали к этой поверхности и может служить для определения этой прямой, а равно и касательной плоскости и различных, зависящих от нее величин. Равнодействующая притягательных или отталкивающих сил представляется дифференциальным параметром первого порядка функции, называемой потенциалом [3].

3.1. Функция точки.. Если величина V зависит от точки m, взятой в некотором пространстве , таким образом, что для каждого положения m в этом пространстве она имеет одно или несколько определенных значений, которые могут измениться только от движения точки m, то она называется функцией точки m, которую будем обозначать $V = f(m)$.

Теорема. Если V для каждого положения точки m в пространстве трех измерений имеет только одно значение, вещественное, не обращающиеся в бесконечность и не представляющее, ни максимум, ни минимум относительно всех значений, соответствующих точкам смежным с m, то через всякую точку пространства проходит поверхность, имеющая свойство, что для всех ее точек V имеет одно и тоже значение [8]. Такую поверхность Сомов называет поверхностью уровня или уровнем.

Примерами функции точки могут служить:
1) прямая mA параллельная данной прямой l, проведенная от точки m до пересечения A с данной плоскостью P,
2) расстояние точки m от данной точки O,
3) угол mOx, составленный прямой Om с данной Ox,
4) двугранный угол, составленный плоскостью mOx с данной плоскостью P, проходящей через прямую Ox.

В первом случае уровень есть плоскость, параллельная плоскости P; во втором- поверхность шара центра O и радиуса Om; в третьем – поверхность конуса, полученным вращением угла mOx около оси Ox; в четвертом – плоскость mOx.

Переменная величина V может быть функцией точки m, обусловленной тем, что она должна находиться на данной поверхности S. Если при этом V имеет одно конечное значение для всякого положения точки m на всем протяжении поверхности S или только в некоторой его части, то через всякую точку в этом протяжении можно провести линию, имеющую свойство, что V для всех ее точек имеет одно и тоже значение. Такую линию будем называть линей уровня на поверхности. Примерами функции точки m на плоскости могут служить: 1) прямолинейные координаты точки m на плоскости относительно декартовых осей, 2) полярные координаты. В первом случае линии уровня есть прямые, параллельные осям координат; а во втором: для радиуса-вектора линия уровня есть окружность круга, описанная этим радиусом r из полюса как центра, а линия уровня угла φ есть прямая, по которой отложен радиус-вектор.

Долгота и широта точки на поверхности земного шара - функции этой точки. Уровень первой функции – меридиан, а уровень второй – параллель [9].

Функция $f(V, V^{'}, V^{''})$ нескольких функций $V, V^{'}, V^{''} \dots$ одной точки m есть также функция этой точки. Если $V = f(V)$ есть функция только одной функции V, то уровень последней есть также уровень $f(V)$; потому что при постоянном V и $f(V)$ будет постоянна.

Когда точка m движется, оставаясь на одном и том же уровне, тогда функция V остается постоянной; но она изменится, если точка m сойдет с уровня. Тогда V получает некоторое приращение ΔV: положительное, при движении точки в одну сторону, и отрицательное при движении в противоположную; так что неравенства $\Delta V > 0$ и $\Delta V < 0$ принадлежат двум пространствам, разделенным уровнем, и могут служить для отличия точки одного пространства от точки другого пространства. При движении точки m по какой-либо траектории, пересекающий уровень этой точки, V становится функцией времени движения t, и также функцией пространства S, пройденного точкой за это время.

На основании этих понятий о функциях точки, можно получить самое **общее понятие о координатах точки m.**

Пусть будут три вещественные однозначные функции q_1, q_2, q_3 точки m пространства трех измерений. Каждая из них будет иметь уровень, проходящий через m. Если эти три уровня не проходят через одну линию, или не совмещаются, то они своим пересечением определяют место точки m. Поэтому можно принять q_1, q_2, q_3 за координаты точки m. Уровни $(q_1), (q_2), (q_3)$ будем называть координатными поверхностями, а их пересечения координатными линиями: через (q_2, q_3) пересечение поверхностей (q_2) и (q_3), через (q_3, q_1) пересечение поверхностей (q_3) и (q_1), через q_1, q_2 пересечение поверхностей (q_1) и (q_2).

Если при каждом положении точки m касательные к координатным линиям взаимно-перпендикулярны, то координаты называются ортогональными или прямоугольными; сюда относятся: прямолинейные прямоугольная и полярная. Касательные к координатным линиям в точке m назовем осями координат.

Если q_1, q_2 есть функции точки m некоторой поверхности (S) и линии уровня этих функций пересекаются, то можно взять q_1, q_2 за координаты точки m. Линии уровня $(q_1), (q_2)$ будем называть координатными линиями. Координаты будут ортогональными, если касательные к координатным линиям в точке m взаимно-перпендикулярны при всяком положении точки.

Когда движущаяся точка m определятся тремя координатами: q_1, q_2, q_3, тогда, по крайней мере, одна из координат становится функцией времени t. Если только координата q_1 есть функция t, то координатная линия (q_2, q_3) есть траектория движущейся точки. В том случае, когда две координаты q_1, q_2 функции времени, а третья q_3 постоянна, точка m описывает линию на неподвижной координатной поверхности (q_3). Пусть $q_1 = f_1(t), q_2 = f_2(t)$. Исключив из этих уравнений время t, получим уравнение $F(q_1, q_2) = 0$, которое вместе с уравнением $q_3 = const$ принадлежит траектории точки m. Наконец в том случае, когда все три координаты функции времени, траектория пересекает все три координатные поверхности, и если
$q_1 = f_1(t), q_2 = f_2(t), q_3 = f_3(t)$, то исключая время t, будем иметь три уравнения вида:
$\varphi_1(q_2, q_3) = 0, \varphi_2(q_3, q_1) = 0, \varphi_3(q_1, q_2) = 0.$

Эти уравнения принадлежат трем поверхностям, пересекающимся по траектории точки m. Два из этих уравнений достаточны для определения этой линии. И легко видеть, что уравнение всякой поверхности, проходящей через эту линию, будет вида

$$F(\varphi_1, \varphi_2) = F(0, 0),$$

где φ_1, φ_2 функции координат q_1, q_2, а $F(\varphi_1, \varphi_2)$ функция от φ_1, φ_2, которая явно не содержит эти координаты.

3.2. Производная по направлению, градиент. Рассмотрение функции точки ведет к рассмотрению особенного рода производных от этой функции, зависящих от положения точки m и от перемещения, ей сообщаемого. Пусть будет V вещественная, однозначная и непрерывная функция точки m, получающая положительное приращение ΔV, когда точка m переходит из M в M'. Если перемещение MM', т.е. прямолинейное или криволинейное пространство, пройденное точкой, то и ΔV , в следствии непрерывности V, бесконечно-мало и вообще одного порядка с MM', а потому отношение $\dfrac{\Delta V}{MM'}$ будет конечно. Если изобразить это отношение длиною , отложенной по направлению хорды MM', и станем уменьшать $MM^{'}$, приближая к нулю, то длина $MM^{'}$ будет приближаться к некоторому пределу MQ, направленному по касательной к $MM^{'}$ в точке M. Можно рассматривать перемещение $MM^{'}$ как приращение Δs дуги $OM = s$ какой-нибудь линии, прямой или кривой, а V, соответствующее точкам этой , как функцию длины s; поэтому $MQ = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta V}{\Delta s}$. Направление же MQ есть касательная в точке M к линии $OM^{'}$, проведенная в сторону, где $\Delta V > 0$.

Величина MQ не зависит от вида линии $OM^{'}$; потому что, если заменить эту линию на другую, касательную к той же прямой $OM^{'}$, и оканчивающуюся также на уровне $V + \Delta V$, то ΔV остается без перемены, а перемещение $MM^{'}$' изменится на бесконечно-малую величину высшего порядка; от этого отношение $\dfrac{\Delta V}{MM'}$ изменится на бесконечно-малую величину и тогда предел его отношение $\dfrac{\Delta V}{MM'}$ не изменится. Этот предел, как и производная $\dfrac{dV}{ds}$, не зависят и от того будут ли приращения ΔV и Δs оба положительны, или оба отрицательны. Будем называть $MQ = \dfrac{dV}{ds}$ производную от функции $V = f(m)$ относительно дифференциального перемещения dS, принимая за направление этого перемещения касательную в точке к линии S.

Поворотным моментом в истории изложения механики явилось введение понятия градиента, или, как его сначала называли, дифференциального параметра. Впервые его рассмотрел Г. Ламе в своем Курсе [1] как

$$p = \sqrt{(\frac{dF}{dx'})^2 + (\frac{dF}{dy'})^2 + (\frac{dF}{dz'})^2} = \sqrt{(\frac{dF}{dx})^2 + (\frac{dF}{dy})^2 + (\frac{dF}{dz})^2}$$

«. . . общие выражения дифференциальных параметров. Стоит отметить, что эти параметры сохраняют тот же характер и ту же независимость, когда функции точки выражаются в криволинейных координатах.» («. . . Expressions générales des paramétres différentiels. Il s'agit de constater que ces paramétres conservent le même caractére et la même indépendance, quand les fonctions-de-point sont exprimées en coordonnées curvilignes»)

Производная от функции точки $V = f(m)$ относительно перемещения нормального к поверхности уровня, проходящего через точку m, называется дифференциальным параметром первого порядка функции V. (Это название дал Ламе.[1]).

Пусть $O^{'}MN$ будет линия, перпендикулярная в точке M к поверхности уровня , и n длина этой линии, начинающейся в точке $O^{'}$, и оканчивающейся в точке M, тогда дифференциальный параметр (далее для краткости просто параметр) функции V в этой точке изобразится длиною $MP = \dfrac{dV}{dn}$, отложенною на нормали к поверхности в ту сторону, где $\Delta V > 0$.

Теорема. Производная $MQ = \dfrac{dV}{ds}$ функции V относительно какого-нибудь перемещения dS равна проекции дифференциального параметра на направление этого перемещения.

Обозначая через P величину и направление параметра, будем иметь

$$\frac{dV}{ds} = P\cos(P, ds)$$

На основании этой теоремы, все производные относительно различных перемещений точки m могут быть изображены прямыми, проведенными из точки по направлению этих перемещений до поверхности сферы, имеющей диаметром параметр MP. Такую сферу можно рассматривать как годограф производных $\dfrac{dV}{ds}$.

Рассмотрим теперь, как определяются дифференциальные параметры сложных функций точки. Пусть $V = f(q)$, где q есть функция точки m. Такие две функции V и q имеют общую поверхность уровня, поэтому их дифференциальные параметры P и h направлены по одной прямой, перпендикулярной в точке к общей поверхности уровня; направлены в одну сторону, когда V и q вместе увеличиваются с перемещением точки m, т.е. когда $f^{'}(q) > 0$, и в противоположные стороны, когда с увеличением одной функции другая уменьшается, т.е. когда $f^{'}(q) < 0$.

Если обозначим через dn перемещение по направлению P, то будем иметь

$$P = \frac{dV}{dn} = f^{'}(q)\cdot\frac{dq}{dn},$$

а так как $\pm\dfrac{dq}{dn}$ есть h, то

$$P = \pm f^{'}(q)\cdot h.$$

Допустим теперь, что $V = f(q_1, q_2, q_3\ldots)$ есть функция нескольких функций $q_1, q_2, q_3\ldots$ одной точки m. Обозначим через P дифференциальный параметр функции V, а через $h_1, h_2, h_3\ldots$ соответственно дифференциальные параметры функций q_1, q_2, q_3. Для производной от функции V относительно какого-либо перемещения dS получим

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dq_1}\cdot\frac{dq_1}{ds} + \frac{dV}{dq_2}\cdot\frac{dq_2}{ds} + \frac{dV}{dq_3}\cdot\frac{dq_3}{ds} + \ldots,$$

тогда на основании формулы

$$\frac{dV}{ds} = P\cos(P, ds)$$

придем к следующему выражению

$$P\cos(P, ds) = \frac{dV}{dq_1}h_1\cdot\cos(h_1, ds) + \frac{dV}{dq_2}h_2\cdot\cos(h_2, ds) + \frac{dV}{dq_3}h_3\cdot\cos(h_3, ds) + \ldots$$

Здесь величина $\frac{dV}{dq_i} \cdot h_i$, взятая со знаком плюс или минус, есть дифференциальный параметр переменной V, рассматриваемой как функция одной независимой переменной q_i. Этот параметр назовем частным дифференциальным параметром функции V относительно q_i. Обозначив его через P_i и приняв во внимание, что P_i и h_i направлены в одну сторону или противоположно, в зависимости от будет ли $\frac{dV}{dq_i} > 0$ или < 0, будем иметь

$$\frac{dV_i}{dq_i} \cdot h_i \cos(h_i, ds) = P_i \cos(P_i, ds);$$

следовательно

$$P \cos(P, ds) = P_1 \cdot \cos(P_1, ds) + P_2 \cdot \cos(P_2, ds) + \ldots P_i \cdot \cos(P_i, ds) + \ldots$$

Эта формула справедлива при всяком направлении перемещения dS, а потому P есть геометрическая сумма величин $P_1, P_2, \ldots$, т.е.

$$\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \ldots$$

Окончательно **дифференциальный параметр функции V нескольких функций точки: $q_1, q_2, q_3 \ldots$ есть геометрическая сумма частных дифференциальных параметров этой функции относительно каждой из переменных $q_1, q_2, q_3 \ldots$ отдельно.**

Отсюда вытекает правило для определения дифференциального параметра всякой данной функции нескольких других функций, параметры которых уже известны. Зная параметры $h_1, h_2, h_3 \ldots$ функций $q_1, q_2, q_3 \ldots$ и частные производные функции V относительно каждой из переменных $q_1, q_2, q_3 \ldots$, определим величины частных дифференциальных параметров:

$$P_1 = \pm\frac{dV}{dq_1} h_1, P_2 = \pm\frac{dV}{dq_2} h_2, P_3 = \pm\frac{dV}{dq_3} h_3, \ldots$$

и отложим их соответственно на параметрах: $h_1, h_2, h_3 \ldots$, таким образом, чтобы P_i и h_i имели одно направление, если $\frac{dV}{dq_i} > 0$, и противоположные направления, если $\frac{dV}{dq_i} < 0$. После этого по известному правилу найдем геометрическую сумму

$$\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \ldots$$

которая и будет полным параметром P функции V.

Для функции $V = f(x, y, z)$ трех прямолинейных координат, частные параметры:

$$P_1 = \pm\frac{\partial f}{\partial x}, P_2 = \pm\frac{\partial f}{\partial y}, P_3 = \pm\frac{\partial f}{\partial z};$$

величина полного параметра P этой функции

$$P = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2}.$$

Или

$$\Delta_1 f = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2}$$

Ламе это выражение принимает в качестве определения дифференциального параметра. Проекции P на координатные оси имеют вид:

$$P\cos(P,x) = \frac{\partial f}{\partial x}, P\cos(P,y) = \frac{\partial f}{\partial y}, P\cos(P,z) = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

3.3. Дифференциальный параметр второго порядка, дивергенция. Уравнение теплопроводности.. Дифференциальный параметр второго порядка имеет большое значение во многих отраслях математической физики. Сомов излагает простой способ вывода уравнения теплопроводности с помощью дифференциальных параметров первого и второго порядка. Подробно находит выражения дифференциального параметра второго порядка в общих координатах. Для понимания дальнейшего изложения приведем определение этого параметра, которое дает Сомов.

Дифференциальный параметр второго порядка функции φ, величина которой зависит от положения точки A и которая изменяется непрерывно, когда эта точка получает какое-либо перемещение, есть отношение кубического расширения дифференциала объема к соответствующему времени, при чем каждая точка этого объема перемещается со скоростью, которая по величине и по направлению равна дифференциальному параметру первого порядка функции φ. [3]

« *В математической теории теплоты, дифференциальным параметром первого порядка температуры определяется количество теплоты, проходящего через поверхность тела; температура же внутри тела, когда оно однородно, должна удовлетворять уравнению, которое получается через приравнивание производной температуры относительно времени параметру второго порядка температуры, помноженному на некоторое постоянное количество. По сему, состояние постоянной температуры в однородном теле определяется условием, что дифференциальный параметр второго порядка равен нулю.*» [3]

$$\iiint \Delta_2\varphi \cdot dV = \int \frac{d\varphi}{dn} \cdot ds$$

$P\cos(Pn) = \dfrac{d\varphi}{dn}$ - дифференциальный параметр первого порядка функции φ, dn - толщина слоя, заключающегося между поверхностями уровней φ и $\varphi + d\varphi$.

Если φ - температура тела в точке (q_1, q_2, q_3) в момент времени t, то вторая часть уравнения, помноженная на коэффициент проводимости (q), и который предполагает постоянным, будет выражать количество теплоты, проходящей за время dt через поверхность тела, как входящей в тело, так и выходящей из него, разделенное на dt. Если первая часть последнего уравнения приведется к одному элементу $\Delta_2\varphi \cdot dV$, то количество теплоты будет равняться

$$c\rho\frac{d\varphi}{dt}dV,$$

c - удельный теплород (удельная теплоемкость), ρ - плотность тела. Таким образом

$$c\rho\frac{d\varphi}{dt}dV = q\Delta_2\varphi \cdot dV,$$

или

$$k\frac{d\varphi}{dt} = \Delta_2\varphi,$$

где $k = \dfrac{c\rho}{q}$.

Теперь, для сравнения приведем современное изложение уравнения теплопроводности [10] **.**

Количество тепла, проходящее за время dt через элемент поверхности ds

$$dQ = kdtds\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right| = kdtds\left|grad_n U(M)\right|$$

k - коэффициент внутренней теплопроводности, U - температура и dn - направление, нормальное к ds.

Полное количество тепла, проходящее через замкнутую поверхность S

$dQ = -dt \iint\limits_S kgrad_n U ds$

Если в направлении внешней нормали температура убывает, то $\dfrac{\partial U}{\partial n} < 0$, соответствующий элемент интеграла будет отрицательным, при возрастании температуры картина будет обратная.

Q - количество тепла, отдаваемого объемом v за промежуток времени dt. Втекающее тепло будет подсчитываться той же формулой со знаком $(-)$.

То же количество отдаваемого тепла можно подсчитать иначе, следя за изменением температуры внутри объема.

Рассмотрим элемент объема dv. На увеличение температуры этого элемента на dU за промежуток времени dt нужно затратить количество тепла, пропорциональное повышению температуры и массе элемента, т.е. количество тепла:

$\gamma dU \cdot \rho dv = \gamma\rho\dfrac{\partial U}{\partial t}dtdv,$

где ρ - плотность вещества, γ - коэффициент пропорциональности, который называется теплоемкостью вещества.

Таким образом отдаваемое всем объемом тепло выразится по формуле:

$dQ = -dt \iiint\limits_{(v)} \gamma\rho\dfrac{\partial U}{\partial t}dv,$

знак $(-)$ ставим потому, что подсчитывается отдаваемое, а не получаемое тепло.
Приравнивая полученные выражения для dQ и применяя формулу :
$\iiint\limits_{(v)} div\mathbf{A}dv = \iint\limits_{(s)} A_n ds$, будем иметь

$$\iiint\limits_{(v)} \gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}dv = \iiint\limits_{(v)} div(kgradU)dv$$

т.е. при произвольном объеме должно иметь место соотношение

$$\iiint\limits_{(v)} \left[\gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t} - div(kgradU)\right]dv = 0,$$

откуда получим дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t} = div(kgradU)$$

Заключение

Сомов гениально обобщил понятие дифференциального параметра Ламе, придав ему роль универсальной характеристики.

Исключительно Сомову принадлежат формирование и изложение в анализе (теория поля) и механике таких понятий как линия уровня, поверхность уровня, потенциал.

Важным введением Сомова в приложении анализа к кинематике является прямой способ для определения дифференциальных параметров первого порядка от функции точки. Сомов представил дифференциальный параметр как отрезок, отложенный на нормали к поверхности уровня (касательной). Приняв такой геометрический образ параметра и, определив его независимо от системы координат как производную функции точки относительно перемещения нормального к поверхности уровня, Сомов показал прямой способ для выражения дифференциальных параметров первого и второго порядка и кривизны поверхности в каких либо координатных системах ортогональных или косоугольных. Этот способ составления дифференциальных параметров первого порядка охватывает все графические и аналитические способы для построения нормалей к поверхностям и кривым линиям. Сомов изложил его в 7-й главе своей Кинематики с новым развитием (после Ламе) и с приложением к определению координатных параметров наиболее типичных систем координат. Таким образом, Сомов придал дифференциальному параметру векторный смысл, что стало революционным поворотом в изложении механики.

References

[1] Lame G. Lecons sur les coordonnees curvilignes. Paris. 1859.-410 P.
[2] Somov O.I. Rational mechanics. Kinematics. St. Petersburg. Printing house of the Imperial Academy of Sciences. 1872 - 491 p.

[3] Somov O.I. Direct method for expressing differential parameters of the first or second order in curvilinear coordinates // Notes of the Imperial Academy of Sciences. St. Petersburg: Printing House of the Imperial Academy of Sciences. Vol. 8, book 1. v. 1865. Separate pagination.

[4] Somov O.I. On the acceleration of different orders in relative motion // Notes of the Imperial Academy of Sciences. St. Petersburg: Printing House of the Imperial Academy of Sciences. Vol. 9, book 1. v. 1865. Separate pagination.

[5] Somov O.I. Transformation of rectilinear coordinates into elliptical ones // Notes of the Imperial Academy of Sciences. St. Petersburg: Printing House of the Imperial Academy of Sciences. Vol.10, book 2. v. 1860. Separate pagination.

[6] Somov O.I. Straightening of curved lines // Notes of the Imperial Academy of Sciences. St. Petersburg: Printing House of the Imperial Academy of Sciences. Vol. 15, book 1. vol. 1869. Separate pagination.

[7] Somov O.I. Algebraic proof of the Hamiltonian principle//Notes of the Imperial Academy of Sciences. St. Petersburg: Printing House of the Imperial Academy of Sciences. Vol.17, book 1. vol. 1870. Separate pagination.

[8] A. O. Yulina. Mechanics O.I. Somova. // History of science and technology. 2023. No. 2. 3-7.

[9] A. O. Yulina. Vector calculus in Somov's mechanics. // History of science and technology. 2023. No. 3. p. 26-33

[10] V.I. Smirnov. Course of Higher Mathematics. V. II. Moscow: "Nauka". 1967. – p. 373-375.

A.O. Yulina
Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering,
2-ya Krasnoarmeyskaya St., Bldg. 4,
190005, St. Petersburg, Russia
Email address: parfenova19761976@mail.ru