S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 510.64
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 03B44,
03B42, 03A05, 03B45, 03B70,03H05

КОРТЕЖНАЯ СЕМАНТИКА ЛИНЕЙНОЙ ЛОГИКИ СТУПЕНЧАТОГО ВРЕМЕНИ

С.И. Башмаков, А.А. Поляков, Т.Ю. Зверева

COMMUNICATED BY S.V. SUDOPLATOV

Abstract: In this article, we continue the investigation of deductive systems within the class of linear step-like temporal logics. Building on the results of P. Balbiani and T. Tinchev, we formally define the tuple and relational semantics for the logic Alt_1 and prove their equivalence. For the case of the temporal logic $\mathcal{LTL}.sl$, which is related to Alt_1, the correctness of all the obtained results is shown, and the projective unification is also proven.

Keywords: modal logic, temporal logic, linear time, finite model property, Kripke relational semantics, tuple semantics, unification.

1 Введение

Модальные логики активно исследуются с середины прошлого века. Обогащение языка классической логики модальными операторами *необходимости* ($\Box$) и *возможности* ($\Diamond$) позволило заметно обогатить выразительные способности логического языка, а возможность различных

Bashmakov, S.I., Polyakov, A.A., Zvereva, T.Yu., Tuple semantics of linear modal logic.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2025-1790).

Поступила 1 января 2025 г., опубликована 31 декабря 2025 г.

интерпретаций этих операторов позволяет применять модальные логики в широком классе информационных систем и задач, [1, 2].

В частности, временные логики зачастую рассматриваются в качестве логик, в которых модальные операторы необходимости и возможности интерпретируются как «всегда» и «возможно», соответственно. С помощью таких логик может моделироваться работа компьютерных программ или информационных систем, в которых за такт работы из текущего состояния система может перейти в одно из фиксированных новых состояний, а может быть в единственно возможное, в зависимости от природы моделируемого времени. Тогда, в зависимости от количества возможных состояний в любой момент времени, могут применяться как линейные, так и ветвящиеся временные логики. Например, линейная временная логика знаний $\mathcal{LTK}.sl$ моделирует линейную систему со строго разграниченными моментами времени, каждому из которых соответствуют свои распределения знаний между разными агентами-участниками моделируемого процесса, [3, 4].

Наиболее актуальными для исследования задачами, вне зависимости от выбранной логики, являются свойства финитной аппроксимируемости, разрешимости, аксиоматизируемости, а также унификации в ней. Если логика обладает свойством финитной аппроксимируемости (или, что в нашем случае равносильно, *свойством конечной модели*), в её характеризации достаточно ограничиться только конечными структурами. Проверка истинности любой наперёд заданной формулы в этой логике на конечных структурах открывает возможность конструктивного доказательства разрешимости логики — описания алгоритма, позволяющего совершить эту проверку за конечное число шагов. Возможность же аксиоматизировать логику (или же описать конечный, либо бесконечный набор её аксиом), позволяет не только открыть возможности для синтаксического подхода исследования дедуктивной системы, но и оценить место данной логики в классификации наиболее изученных расширений других систем.

Теория унификации занимает важное место в современных исследованиях в области неклассических и, в частности, модальных логик. Задача унификации состоит в поиске такой подстановки, применение которой к формуле делает её теоремой в логике. Наибольший интерес в теории унификации представляют следующие задачи: определение типа унификации в логике, исследование унифицируемости её формул, поиск эффективных алгоритмов построения унификаторов и сопутствующие вопросы, [6, 5].

Для их решения часто используют семантические методы характеризации логик. Широко применяется уже устоявшаяся реляционная семантика Крипке — подход к представлению логических систем в виде специальных графических моделей, [7]. Применима семантика Крипке и при решении задачи унификации в модальных логиках, однако, в некоторых исследованиях работа ведётся с другими семантиками, зачастую, лучше отвечающими требованиям конкретной задачи. Так, в работе Ф. Балбиани и Т. Тинчева [8] для исследования унификации в модальной логике Alt_1, помимо реляционной семантики, также введена *кортежная семантика*, которая представляет логическую систему Alt_1 в виде упорядоченных наборов множеств переменных. Опираясь на этот подход, ими был получен алгоритм проверки унифицируемости любой заданной формулы, а также приведён пример формулы с нулярным типом унификации.

В данной работе исследуется взаимосвязь подходов реляционной и кортежной семантики, применительно к логике Alt_1, а также линейной нерефлексивной нетранзитивной временной логике $\mathcal{LTL}.sl$. Доказаны свойства конечной модели и эквивалентности двух представленных семантик. Кроме того, показана проективность унификации в логике $\mathcal{LTL}.sl$.

2 Нормальная модальная логика $\mathbf{Alt_1}$

В настоящем разделе мы определим интересующую нас модальную логику Alt_1, как замкнутую дедуктивную систему, расширяющую классическую логику CL. Сделаем это на языке реляционной и кортежной семантик, руководствуясь терминологией и обоснованиями из [7] и [8].

2.1. Определение логики $\mathbf{Alt_1}$. Язык модальных логик включает в себя множество пропозициональных переменных $Prop$, стандартные булевы связки, скобки, операторы необходимости $\Box$ и возможности $\Diamond$. Оператор $\Diamond$ определяется обычным образом: $\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$.

Под минимальной нормальной модальной логикой $\mathbf{K}$ будем стандартно понимать:

$$\mathbf{K} := CL + \{\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)\} + (RN)\frac{p}{\Box p}.$$

Запись $L + X$, где L — логика, X — множество формул в языке логики L, означает наименьшую логику, содержащую в себе L и X. $L + X$ называется *расширением* логики L добавлением множества формул X. Под записью $L + (R)$, где (R) — правило вывода, понимаем замыкание логики L относительно правила вывода (R).

Любая нормальная модальная логика есть расширение $\mathbf{K}$ добавлением некоторого множества формул. В работе Ф. Балбиани и Т. Тинчева [8] рассматривается нормальная модальная логика Alt_1, которую, с точки зрения такой классификации, можно описать как минимальную нормальную модальную логику, содержащую обращение деонтического принципа:

$$Alt_1 := \mathbf{K} + \{\Diamond p \to \Box p\}.$$

2.2. Реляционная семантика в $\mathbf{Alt_1}$. *Alt_1-шкалой Крипке* назовём пару $F = \langle W, R\rangle$, где W — множество состояний с бинарным отношением R достижимости, обладающим следующим свойством: для любых

$x, y, z \in W$ если xRy и xRz, то $y = z$, [8]. Примером Alt_1-шкалы, отвечающей данному свойству отношения достижимости, будет изображённая на рисунке 1 Alt_1-шкала F.

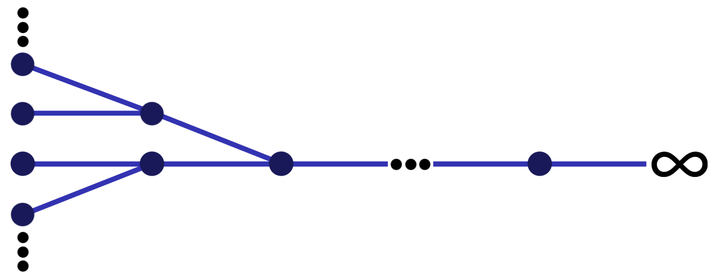

Рис. 1. Произвольная Alt_1-шкала F.

Alt_1-моделью назовём пару $M = \langle F, V \rangle$, где F — Alt_1-шкала с введённым на ней означиванием $V\colon Prop \mapsto 2^W$. Выполнимость формул на модели M, $\forall x \in W$ определяется следующим образом:

- $\langle M, x \rangle \vDash p \Leftrightarrow x \in V(p)$;
- $\langle M, x \rangle \nvDash \bot$;
- $\langle M, x \rangle \vDash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \langle M, x \rangle \vDash \varphi$ или $\langle M, x \rangle \vDash \psi$;
- $\langle M, x \rangle \vDash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \langle M, x \rangle \vDash \varphi$ и $\langle M, x \rangle \vDash \psi$;
- $\langle M, x \rangle \vDash \neg\varphi \Leftrightarrow \langle M, x \rangle \nvDash \varphi$;
- $\langle M, x \rangle \vDash \Box\varphi \Leftrightarrow \langle M, y \rangle \vDash \varphi$ для любых $y \in W : xRy$.

Рис. 2. Линейная Alt_1-шкала F.

Согласно утверждениям о порождённых подмоделях, [7], стр. 66, и определению Alt_1-шкал получаем, что порождённые Alt_1-подмодели будут иметь линейным вид, а значит логику Alt_1 можно характеризовать моделями на основе линейных Alt_1-шкал F (см. рисунок 2), поскольку выполнимость любой формулы на таких подмоделях будет совпадать с выполнимостью на исходной модели. Далее мы будем работать только с линейными Alt_1-шкалами. В них множество W не более, чем счётно, а отношение R является линейным порядком.

2.3. Кортежная семантика в $\mathbf{Alt_1}$. Введём кортежную семантику для логики Alt_1 согласно принципу, описанному в [8].

Кортеж $(U_0, \ldots, U_n)$, где $U_0, \ldots, U_n \subset Prop$, $n \in \mathbb{N}$, назовём *n-оценкой*. Произвольная n-оценка имеет вид, показанный на рисунке 3.

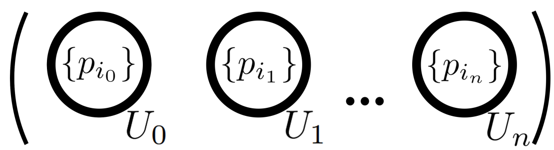

Рис. 3. Произвольная n-оценка.

Выполнимость формул на n-оценке определяется следующим образом:

- $(U_0, \ldots, U_n) \vDash p \Leftrightarrow p \in U_n$;
- $(U_0, \ldots, U_n) \nvDash \bot$;
- $(U_0, \ldots, U_n) \vDash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow (U_0, \ldots, U_n) \vDash \varphi$ или $(U_0, \ldots, U_n) \vDash \psi$;
- $(U_0, \ldots, U_n) \vDash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow (U_0, \ldots, U_n) \vDash \varphi$ и $(U_0, \ldots, U_n) \vDash \psi$;
- $(U_0, \ldots, U_n) \vDash \neg\varphi \Leftrightarrow (U_0, \ldots, U_n) \nvDash \varphi$;
- $(U_0, \ldots, U_n) \vDash \Box\varphi \Leftrightarrow (U_0, \ldots, U_{n-1}) \vDash \varphi$.

Пример 1. *Рассмотрим формулу $\varphi = (\Box p \vee p) \wedge \neg q$ в языке логики Alt_1. Возьмём 1-оценку (U_0, U_1), где $U_0 = \{p, q\}$, $U_1 = \{p\}$. Тогда $(U_0, U_1) \vDash \varphi$, т.к. $(U_0, U_1) \vDash p$, $(U_0, U_1) \nvDash q$, $(U_0) \vDash p$.*

Поскольку кортежи и линейные Alt_1-шкалы являются упорядоченными структурами, каждому элементу которых ставятся в соответствие наборы переменных, логично предположить, что кортежная и реляционная семантики эквивалентны в логике Alt_1. Однако, в то время как n-оценки определяются только конечными наборами множеств переменных, Alt_1-шкалы могут быть как конечными, так и бесконечными. Далее мы покажем, что для характеризации модальной логики Alt_1 достаточно использовать конечные Alt_1-шкалы.

3 Финитная аппроксимируемость в $\mathbf{Alt_1}$

Логика называется *финитно аппроксимируемой*, если она полна относительно класса конечных шкал. Чтобы показать финитную аппроксимируемость логики Alt_1 относительно реляционной семантики, мы хотим определить конечные Alt_1-шкалы, на которых выполнимость формул совпадает с выполнимостью на бесконечной Alt_1-шкале.

Пусть $F = \langle W, R \rangle$ — бесконечная Alt_1-шкала. На её основе определим конечную Alt_1-шкалу $F_n = \langle W_n, R_n \rangle$, где $W_n = \{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$, $R_n = \{(x_i, x_{i+1}) \,|\, 1 \leq i \leq n\} \cup \{(x_{n+1}, x_{n+1})\}$ — суть, ограничение отношения R на первые n элементов в объединении с рефлексивным $(n+1)$-м состоянием.

Отображение f шкалы $F = \langle W, R \rangle$ на шкалу $F' = \langle W', R' \rangle$ называется *p-морфизмом*, если для любых $x, y \in W$ выполняется:

(1) $xRy \Rightarrow f(x)R'f(y)$;
(2) $f(x)R'f(y) \Rightarrow \exists z \in W : x\,R\,z$ и $f(z) = f(y)$.

Согласно введённым определениям, сформулируем и докажем следующие утверждения:

Лемма 1. *Любая конечная Alt_1-шкала F_n является p-морфным образом бесконечной Alt_1-шкалы F.*

Доказательство. Покажем выполнение условий (1) и (2) определения p-морфизма. Определим отображение $f(x_i) = \begin{cases} x_i, & i \leq n; \\ x_{n+1}, & i > n. \end{cases}$

(1) $f(x_i) = x_i$ и $f(x_{i+1}) = x_{i+1}$ при $i \leq n$. По определению, $x_i \, R \, x_{i+1}$ и $x_i \, R_n \, x_{i+1}$. При $i > n$, $f(x_i) = f(x_{i+1}) = x_{n+1}$. Тогда имеет место $f(x_i) \, R_n \, f(x_{i+1})$, поскольку $x_{n+1} \, R_n \, x_{n+1}$.

(2) $x_i \, R_n \, x_{i+1}$ при $i \leq n$,. Возьмём $x_{i+1} \in W$. По определению, имеем $x_i \, R \, x_{i+1}$ и $f(x_{i+1}) = x_{i+1}$. При $i > n$, $f(x_i) \, R_n \, f(x_{i+1})$, ведь $x_{n+1} \, R_n \, x_{n+1}$. Возьмём $x_{i+1} \in W$. По определению, $x_i \, R \, x_{i+1}$ и $f(x_i) = x_{n+1}$, $f(x_{i+1}) = x_{n+1}$.

$\square$

При оценке глубины конечной модели, в дальнейшем, будем использовать понятие *модальной степени* формулы. Под *модальной степенью* $md(\alpha)$ формулы α в логике Alt_1 будем понимать число вложенных в α модальных операторов $\Box$: $md(p) = md(\neg p) = 0$; $md(\alpha \odot \beta) = max(md(\alpha); md(\beta))$, где $\odot \in \{\vee, \wedge\}$; наконец $md(\Box\alpha) = md(\alpha) + 1$.

Теорема 1. *Пусть φ — такая формула, что $md(\varphi) = m$, $m \leq n$, $M = \langle F, V \rangle$ — бесконечная $Alt1$-модель, $M_n = \langle F_n, V_n \rangle$ — конечная Alt_1-модель, где $\forall p \in Prop$, $V_n(p) = V(p) \cap W_n$. Тогда для любого состояния $x_i \in W$ такого, что $i \leq n - m + 1$, справедливо:*

$$\langle M, x_i \rangle \nvDash \varphi \Leftrightarrow \langle M_n, x_i \rangle \nvDash \varphi.$$

Доказательство. Докажем индукцией по модальной степени формулы φ. При $md(\varphi) = 0$ утверждение теоремы выполняется для любого состояния $x_i \in W_n$. Пусть теорема верна для формулы ψ, т.ч. $md(\psi) = k$. Тогда рассмотрим $\varphi = \Box\psi$ и исследуем её выполнимость при $x_i \in W$ таком, что $i \leq n - k$:

$$\langle M, x_i \rangle \nvDash \varphi \Leftrightarrow \langle M, x_i \rangle \nvDash \Box\psi \Leftrightarrow \langle M, x_{i+1} \rangle \nvDash \psi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \langle M_n, x_{i+1} \rangle \nvDash \psi \Leftrightarrow \langle M_n, x_i \rangle \nvDash \Box\psi \Leftrightarrow \langle M_n, x_i \rangle \nvDash \varphi.$$

$\square$

Таким образом, при проверке выполнимости любой формулы φ в языке нашей логики достаточно использовать Alt_1-модели, определенные на конечных Alt_1-шкалах. Это значит, что логика Alt_1 финитно аппроксимируема относительно реляционной семантики.

Финитная аппроксимируемость Alt_1 относительно кортежной семантики напрямую следует из того, что n-оценки — это всегда конечные наборы. Так как теперь в обеих семантиках используются только конечные структуры, мы можем показать их эквивалентность для логики Alt_1.

4 Эквивалентность реляционной и кортежной семантик в $\mathbf{Alt_1}$

В данном разделе мы покажем, что для проверки истинности произвольной наперёд заданной формулы в логике Alt_1 можно пользоваться средствами одной из представленных семантик — для любой Alt_1-модели найдётся единственная соответствующая ей n-оценка, на которой выполнимость заданной формулы будет совпадать с выполнимостью на Alt_1-модели. Тогда набор формул, выполнимых при любой n-оценке будет совпадать с набором формул, выполнимых на любой Alt_1-модели.

Будем говорить, что формула φ *выполняется на* Alt_1*-модели* $M = \langle W, R, V\rangle$, если она выполняется на любом элементе $x \in W$, обозначим как $M \vDash \varphi$. Формула φ *выполняется на* Alt_1*-шкале* $F = \langle W, R\rangle$, если она выполняется на любой Alt_1-модели $M = \langle F, V\rangle$, обозначим как $F \vDash \varphi$. Будем говорить, что формула φ n*-выполнима*, если она выполнима при любой n-оценке $(U_0, \ldots, U_n)$, обозначим как $\vDash_n \varphi$.

Теорема 2. *Пусть φ — такая формула, что $md(\varphi) = n$, $F_n = \langle W_n, R_n\rangle$ — конечная Alt_1-шкала. Тогда:*

$$\langle F_n, x_1\rangle \vDash \varphi \Leftrightarrow\ \vDash_n \varphi.$$

Доказательство. Пусть $M_n = \langle F_n, V_n\rangle$ — произвольная конечная Alt_1-модель. Определим u как отображение Alt_1-модели M_n на n-оценку:

$$u(M_n) = (U_0, \ldots, U_n),$$

где $U_i = \{p \in Prop \mid x_{n-i+1} \in V_n(p)\}$, $0 \le i \le n$. Пользуясь тем, что Alt_1-модели, построенные на основе фиксированной Alt_1-шкалы, однозначно определяются своим означиванием, а n-оценки однозначно определяются своими компонентами U_i, получаем, что отображение u инъективно. Также, u сюръективно, т.к. данное отображение позволяет получить любой набор $(U_0, \ldots, U_n)$. Значит, u — биекция между множеством всех конечных Alt_1-моделей M_n и множеством всех n-оценок.

По определению u, для любых $x_i \in W_n$, $p \in Prop$ верно

$$\langle M_n, x_i\rangle \vDash p \ \Leftrightarrow\ (U_0, \ldots, U_{n-i+1}) \vDash p,$$

где $u(M_n) = (U_0, \ldots, U_n)$, поскольку $p \in U_{n-i+1} \Leftrightarrow x_i \in V_n(p)$. Отсюда, $\langle M_n, x_1\rangle \vDash \varphi \Leftrightarrow u(M_n) \vDash \varphi$ для любой формулы φ такой, что $md(\varphi) = n$. □

Теоремы 1 и 2 показывают, что реляционная и кортежная семантики действительно эквивалентны в логике Alt_1.

Вернёмся к примеру 1. Напомним, формула $\varphi = (\Box p \vee p) \wedge \neg q$ выполнима на 1-оценке $U = (U_0, U_1)$, где $U_0 = \{p, q\}$, $U_1 = \{p\}$. Применим к этой 1-оценке отображение u^{-1}, которое существует, поскольку u — биекция: получаем $u^{-1}(U) = M_1 = \langle F_1, V_1\rangle$, где $V_1(p) = \{x, y\}$, $V_1(q) = \{y\}$. В силу теоремы 3.1, $\langle M_1, x\rangle \vDash \varphi$, что также верно по определению выполнимости на Alt_1-модели.

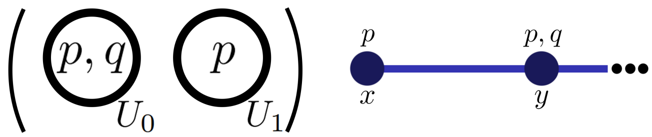

Рис. 4. 1-оценка (U_0, U_1) и Alt_1-модель M_1

5 Линейная логика ступенчатого времени LTL.sl

В статье Т.Ю. Зверевой и С.И. Башмакова [4] была введена и исследовалась линейная логика знания ступенчатого времени $\mathcal{LTK}.sl$. Для этой логической системы было предложено семантическое описание, показана финитная аппроксимируемость и проективность унификации.

Интерес представляет рассмотрение версии логики класса ступенчатых по времени (с нерефлексивным и нетранзитивным временным оператором в семантике) с обеднённой семантикой, исключающую рассуждения о знаниях агентов, так как, в нашем случае, такая логика оказывается родственной исследуемой невременной логике Alt_1.

Определим семантически логику $\mathcal{LTL}.sl$. Алфавит языка $L^{\mathcal{LTL}.sl}$ включает $Prop := \{p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$, временной оператор N, (,) и стандартные булевы операции.

$\mathcal{LTL}.sl$-шкала — это набор $F = \langle W_{\mathbb{N}}, \mathbf{Next} \rangle$, где $W_{\mathbb{N}} = \bigcup\limits_{t \in \mathbb{N}} C_t$: $C_{t_1} \cap C_{t_2} = \varnothing$ при $t_1 \neq t_2$, каждый сгусток C_t — одноэлементный, а **Next** – отношение «следующее натуральное число».

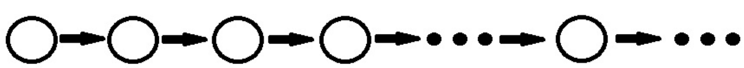

Рис. 5. $\mathcal{LTL}.sl$-шкала

На шкале стандартно определим *$\mathcal{LTL}.sl$-модель* как пару $M = \langle F, V \rangle$, где F – $\mathcal{LTL}.sl$-шкала, V — означивание: $P \mapsto 2^{W_{\mathbb{N}}}$. Выполнимость формул на моделях также определяется стандартным образом.

Логикой $\mathcal{LTL}.sl$ будем называть множество всех формул, выполнимых на любой $\mathcal{LTL}.sl$-модели.

Задачей исследования этой логической системы стало показать, что для случая с исключёнными знаниями агентов сохраняется свойство финитной аппроксимируемости, а также применим аналог подхода кортежной семантики для логики Alt_1, описанный выше.

6 Финитная аппроксимируемость в LTL.sl

Для доказательства свойства финитной аппроксимируемости нами используется стандартная техника p-морфизма, поскольку склеивание сгустков происходит только по временному отношению $Next$ и ограничивает длину шкал.

Чтобы доказать, что логика $\mathcal{LTL}.sl$ финитно аппроксимируема, определим p-морфное отображение конечной $\mathcal{LTL}.sl$-модели M на конечную по времени, аналогичное таковому для Alt_1-моделей.

Для произвольной $\mathcal{LTK}.sl$-модели $M = \langle W, \mathbf{Next}, V\rangle$ определим конечную по времени (количеству сгустков) модель M_k следующим образом:

$$M_k := \left\langle \bigcup_{j=1}^{k+1} C_j, \mathbf{Next}', V' \right\rangle,$$

при этом C_j есть одноэлементные сгустки и выполняются следующие условия:

- $\bigcup\limits_{j=1}^{k+1} C_j \subset W$ конечное число сгустков;
- $\mathbf{Next}'$ определяется следующим образом:
  $\forall a \in \{C_1, \ldots, C_k\}$ если $a\,\mathbf{Next}\,b$, тогда $b \in \{C_2, \ldots, C_{k+1}\}$;
  $\forall a \in W \setminus \{C_1, \ldots, C_k\}$, $\forall b \in W$ если $a\,\mathbf{Next}\,b$, тогда $a, b \in C_{k+1}$ и $a\,\mathbf{Next}'\,b$;
- $V'(p) = V(p) \cap \bigcup\limits_{j=1}^{k+1} C_j$ для $p \in Prop$.

Естественным образом отсюда определяется конечная шкала

$$F_k := \left\langle \bigcup_{j=1}^{k+1} C_j, \mathbf{Next}' \right\rangle.$$

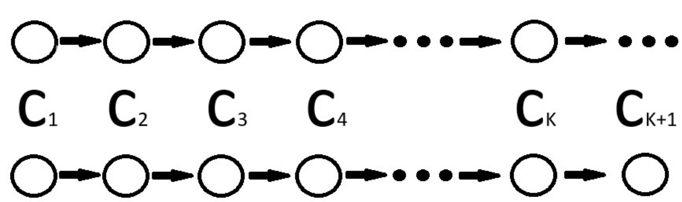

Рис. 6. Бесконечная $\mathcal{LTL}.sl$-шкала F и конечная шкала F_k

Докажем утверждение о p-морфности шкал логики $\mathcal{LTL}.sl$.

Теорема 3. *Любая ограниченная по времени $\mathcal{LTL}.sl$-шкала является p-морфным образом бесконечной $\mathcal{LTL}.sl$-шкалы.*

Доказательство. Пусть f — отображение бесконечной $\mathcal{LTL}.sl$-шкалы $F = \langle W, \mathbf{Next} \rangle$ на шкалу конечной длины $F_k = \left\langle \bigcup_{j=1}^{k+1} C_j, \mathbf{Next}' \right\rangle$, заданное следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x \in \bigcup\limits_{j=1}^{k+1} C_j; \\ y, \text{ если } x \in W \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k+1} C_j, \text{где } y \in C_{k+1}. \end{cases}$$

Докажем, что отображение f является p-морфизмом. Для этого необходимо показать корректность этого отображения относительно определения p-морфизма.

(1) $\forall a, b \in W$ если $a\,\mathbf{Next}\,b$, следовательно, по определению $\mathbf{Next}$, $a \in C_i$ и $b \in C_{i+1}$.
   - если $C_i \in \{C_2, \dots, C_k\}$, тогда $f(a) = a$, $f(b) = b$ и $f(a)\,\mathbf{Next}'\,f(b)$;
   - если $C_i = C_{k+1}$, тогда $f(a), f(b) \in C_{k+1}$ и $f(a)\,\mathbf{Next}'\,f(b)$;
   - если $C_i \in W \setminus \{C_1, \dots, C_{k+1}\}$, тогда $f(a) = f(b) = y \in C_{k+1}$.

(2) $\forall a, b \in W$ если $f(a)\mathbf{Next}'f(b)$, тогда, по определению, $f(a) \in C_i$, $f(b) \in C_{i+1}$, и возможны следующие случаи:
   - i не превосходит k. В этом случае $f(a) = a$, а для $f(b)$ возможны 2 варианта:
     - $C_i \in \{C_1, \dots, C_{k-1}\}$, в качестве c мы возьмём b, и тогда $a\,\mathbf{Next}\,c$;
     - $C_i = C_k$, в качестве c мы возьмём произвольный элемент C_{k+1}, и тогда $a\,\mathbf{Next}\,c$.
   - если $f(a), f(b) \in C_{k+1}$, то $a \in C_j, b \in C_{j+1}$ (где $j > k$) и тогда в качестве c мы возьмём произвольный элемент C_{j+1}.

Следовательно, конечная шкала F_k является p-морфным образом F для любого натурального k. □

Таким образом, в логике $\mathcal{LTL}.sl$ мы можем рассматривать вместо бесконечных шкал их версии конечной длины. Теперь докажем утверждение о финитной аппроксимируемости, показав, что любая формула, опровержимая на бесконечной $\mathcal{LTL}.sl$-модели M, опровергается также и на конечной $\mathcal{LTL}.sl$-модели M_k.

Теорема 4. *Пусть $M = \langle F, V \rangle$ — неограниченная по времени $\mathcal{LTL}.sl$-модель, α — произвольная формула модальной степени $m \geq 0$. Тогда для любого $x \in \bigcup\limits_{j=1}^{k-m} C_j \subset F$ при $k > m$ справедливо:*

$$\langle M, x \rangle \nvDash \alpha \Leftrightarrow \langle M_k, x \rangle \nvDash \alpha,$$

где $M_k = \langle F_k, V' \rangle = \left\langle \bigcup\limits_{j=1}^{k+1} C_j, \mathbf{Next}', V' \right\rangle$.

Доказательство. Докажем, что утверждение справедливо для формул логики $\mathcal{LTL}.sl$. Доказательство будем вести индукцией по длине формулы α.

База индукции $l(\alpha) = 0$ соответствует случаю $\alpha = p$. Очевидно, что модальная степень формулы в этом случае также равна 0 и утверждение верно $\forall x \in \bigcup\limits_{j=1}^{k+1} C_j$. Предположим, что утверждение теоремы верно $\forall \beta \colon l(\beta) < t$, т.е.

$$\langle M, x\rangle \nvDash \beta \Leftrightarrow \langle M_k, x\rangle \nvDash \beta.$$

Докажем для $l(\alpha) = t$.

Пусть $\alpha = N\varphi$, $l(\varphi) = l(\alpha) - 1$ и $md(\alpha) = md(\varphi) + 1$.

По индуктивной гипотезе, $\langle M, x\rangle \nvDash \varphi \Leftrightarrow \langle M_k, x\rangle \nvDash \varphi$, где $x \in \bigcup\limits_{j=2}^{k-m+1} C_j$.

По определению N, $\forall x \in C_i$ верно $\langle M, x\rangle \vDash N\varphi \Leftrightarrow \forall y \in C_{i+1}$ (а значит, $x\,\mathbf{Next}\,y$) верно $\langle M, y\rangle \vDash \varphi$, следовательно, $\exists x \in C_i \colon \langle M, x\rangle \nvDash N\varphi$ в том и только в том случае, когда $\exists y \in C_{i+1} \colon \langle M, y\rangle \nvDash \varphi$.

Тогда $\forall \hat{x} \in \bigcup\limits_{j=1}^{k-m} C_j$

$$\langle M, \hat{x}\rangle \nvDash N\varphi \Leftrightarrow \langle M_k, \hat{x}\rangle \nvDash N\varphi.$$

$\square$

Введём кортежную семантику для $\mathcal{LTL}.sl$ аналогичным с Alt_1 способом, описанным выше. Выполнимость формулы φ на k-оценке определяется следующим образом:

- $(U_0, \ldots, U_k) \vDash p \Leftrightarrow p \in U_k$;
- $(U_0, \ldots, U_k) \vDash \top$;
- $(U_0, \ldots, U_k) \nvDash \bot$;
- $(U_0, \ldots, U_k) \vDash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow (U_0, \ldots, U_k) \vDash \varphi$ или $(U_0, \ldots, U_k) \vDash \psi$;
- $(U_0, \ldots, U_k) \vDash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow (U_0, \ldots, U_k) \vDash \varphi$ и $(U_0, \ldots, U_k) \vDash \psi$;
- $(U_0, \ldots, U_k) \vDash \neg\varphi \Leftrightarrow (U_0, \ldots, U_k) \nvDash \varphi$;
- $(U_0, \ldots, U_k) \vDash \Box\varphi \Leftrightarrow (U_0, \ldots, U_{k-1}) \vDash \varphi$.

Обе семантики позволяют характеризовать логику $\mathcal{LTL}.sl$, используя только конечные структуры, что позволяет, опираясь на утверждение теоремы 2, сформулировать

Следствие 1. *Пусть φ — такая формула, что $md(\varphi) = k$, $F_n = \langle W_k, \mathbf{Next}'\rangle$ — конечная $\mathcal{LTL}.sl$-шкала. Тогда:*

$$\langle F_k, x_1\rangle \vDash \varphi \Leftrightarrow \vDash_n \varphi.$$

Доказательство проводится согласно приведённым в доказательстве теоремы 2 рассуждениям при условии, что биективное отображение u определяется как $u(M_k) = (U_0, \ldots, U_k)$, где $U_i = \{p \in Prop \mid C_{k-i+1} \subset V_n(p)\}$, $0 \le i \le k$.

Следствием 1 мы устанавливаем эквивалентность реляционной и кортежной семантик также в логике $\mathcal{LTL}.sl$.

7 Проективная унификация в LTL.sl

Приведём используемые далее определения и результаты из области унификации.

Формула $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ называется *унифицируемой* в логике $\mathcal{L}$, если $\exists \sigma\colon p_i \mapsto \sigma_i$ — подстановка для каждой переменной $p_i \in Var(\varphi)$ такая, что $\sigma(\varphi) = \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_s) \in \mathcal{L}$. Подстановка σ называется *унификатором* формулы φ.

Корневым называется унификатор, получаемый подстановкой констант вместо переменных формулы (т.е. $gu : p_i \mapsto \{\top, \bot\}, \forall p_i \in Var(\varphi)$).

На множестве унификаторов определено отношение предпорядка: унификатор σ формулы $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ называется *более общим*, чем σ^1 в логике $\mathcal{L}$, если существует унификатор γ, такой, что для любой переменной p_i: $\sigma^1(p_i) \equiv \gamma(\sigma(p_i)) \in \mathcal{L}$ (обозначаем как $\sigma_1 \preceq \sigma$).

Унификатор σ формулы $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ называется *максимальным*, если для любого другого унификатора σ^i выполняется $\sigma^i \preceq \sigma$ или же они несравнимы, т.е. $(\sigma^i \not\preceq \sigma)$ и $(\sigma \not\preceq \sigma^i)$. Если σ более общий, чем любой другой, то он называется *наиболее общим* (сокращённо *н.о.у.*).

Одним из ключевых в теории унификации является понятие *типа унификации* (а его установление — одной из ключевых задач). Фактически, установленный тип унификации отвечает на вопрос о существовании лучших унификаторов для каждой формулы в логике, а также позволяет получить оценку их числа. Логика имеет *нульарный* тип унификации, если в ней найдутся формулы, которые, относительно $\preceq$, обладают бесконечными цепочками унификаторов. Если же для каждой унифицируемой формулы каждая такая последовательность заканчивается максимальным элементом, логика имеет по крайней мере *инфинитарный* тип. В случае если максимальных унификаторов конечное число — *финитарный*. Говорят, что логика обладает *унитарным* типом, если для любой унифицируемой формулы в логике найдётся н.о.у.

Формула $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ называется *проективной*, если существует унификатор τ формулы φ, такой, что $\varphi \vdash_{\mathcal{LTL}.sl} [p_i \equiv \tau(p_i)]$ для всех переменных $p_i \in Var(\varphi)$. Унификатор τ называется *проективным унификатором*.

С. Гиларди доказано, что в случае если логика обладает проективной унификацией, сам проективный унификатор совпадает с н.о.у. формулы, [5], а значит гарантирует унитарный тип унификации логики. Покажем далее, что унификация в логике $\mathcal{LTL}.sl$ действительно проективна.

Подстановка констант в формулу превращает её саму в константу. Докажем этот факт:

Предложение 1. *Для любого набора $c_1, \dots, c_r \in \{\top, \bot\}$ и любой формулы $\varphi(p_1, \dots, p_r)$ существует $c \in \{\top, \bot\}$ такая, что*

$$\forall x \in W, \langle F, x\rangle \vDash \varphi(c_1, \dots, c_r) \equiv c,$$

где $F = \langle W, \mathbf{Next}\rangle$.

Доказательство. Будем вести доказательство индукцией по длине формулы φ. Пусть $\varphi = p$, тогда как результат подстановки получим $\varphi = \top$, поэтому $V(\top) = W$, или $\varphi = \bot$, что означает $V(\bot) = \varnothing$.

Если $\varphi = c_1 \vee c_2$, где $c_1, c_2 \in \{\top, \bot\}$, тогда $\varphi = max(c_1, c_2)$, если $\varphi = c_1 \wedge c_2$, тогда $\varphi = min(c_1, c_2)$ и, по индуктивному предположению, $V(\varphi) = W$ или $V(\varphi) = \varnothing$.

Если $\varphi = \neg p$, где $p \in \{\top, \bot\}$, тогда $\varphi = \top$ при $p = \bot$, или $\varphi = \bot$ при $p = \top$ и, согласно индуктивному предположению, $V(\varphi) = W$ или $V(\varphi) = \varnothing$.

Пусть $\varphi = Np$ и $p \in \{\top, \bot\}$. Если $p = \bot$ тогда, поскольку $V(\bot) = \varnothing$, мы получим $V(N\bot) = \varnothing$. Если $p = \top$ тогда, поскольку $V(\top) = W$, мы также получим $V(N\top) = W$. □

Докажем наличие корневого унификатора для унифицируемых $\mathcal{LTL}.sl$-формул.

Теорема 5. *Если формула φ унифицируема в $\mathcal{LTL}.sl$, то φ имеет корневой унификатор.*

Доказательство. Покажем, что для проверки унифицируемости любой данной формулы φ достаточно установить только существование корневого унификатора $gu := \{\top, \bot\}$, получаемого заменой переменных на константы. Пусть формула $\varphi(p_1, \dots, p_s)$ унифицируема в $\mathcal{LTL}.sl$ и δ — её унификатор, т.е.

$$\delta(\varphi) := \varphi(\delta_1(q_1, \dots, q_r), \dots, \delta_s(q_1, \dots, q_r)) \in \mathcal{LTL}.sl,$$

где $\delta_1(q_1, \dots, q_r), \dots, \delta_s(q_1, \dots, q_r)$ — формулы $\mathcal{LTL}.sl$.

Вместо переменных $q_1, \dots, q_r$ подставим произвольный набор констант $c_i \in \{\top, \bot\}$, $1 \le i \le r$. Поскольку $\delta(\varphi)$ истинна в логике, как результат подстановки мы снова получим истинную формулу:

$$\varphi(\delta_1(c_1, \dots, c_r), \dots, \delta_s(c_1, \dots, c_r)) \in \mathcal{LTL}.sl.$$

Обозначим $gu(p_i) := \delta_i(c_1, \dots, c_r)$, тогда

$$\varphi(gu(p_1), \dots, gu(p_s)) \in \mathcal{LTL}.sl,$$

где $gu(p_i) \in \{\top, \bot\}$, $1 \le i \le s$. Следовательно, $gu(\varphi)$ — это корневой унификатор для унифициремой в $\mathcal{LTL}.sl$ формулы φ.

В связи с тем, что $gu(p_1), \dots, gu(p_s)$ не более, чем набор констант длины S для каждой φ, то для произвольной (необязательно унифицируемой) формулы $\psi(p_1, \dots, p_s)$ достаточно проверить не более, чем 2^s подстановочных вариантов констант $\top, \bot$ заместо переменных.

Если среди них найдётся такой вариант, что $\psi(gu(p_1), \dots, gu(p_s))$ истинна $\mathcal{LTL}.sl$, это будет означать, что формула ψ унифицируема и gu — её корневой унификатор в $\mathcal{LTL}.sl$. В противном случае, если для всех 2^s вариантов подстановок $\psi(gu(p_1), \dots, gu(p_s)) \notin \mathcal{LTL}.sl$, такая формула ψ не имеет корневого унификатора, откуда следует факт её не унифицируемости в $\mathcal{LTL}.sl$. □

Теперь покажем проективность унификации в логике.

Теорема 6. *Любая унифицируемая формула в $\mathcal{LTL}.sl$ проективна.*

Доказательство. Пусть $\varphi(p_1, \dots, p_s)$ унифицируемая в $\mathcal{LTL}.sl$ формула. Тогда для любой переменной $p_i \in Var(\varphi)$ определим следующую подстановку $\sigma(p_i)$:

$$\sigma(p_i) := \left(\bigwedge_{i=0}^{k-m} \left(N^i\varphi \wedge p_i\right) \vee \left(\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} \left(N^i\varphi \wedge gu(p_i)\right)\right)\right)$$

где $gu(p_1), \dots, gu(p_s)$ – корневой унификатор формулы $\varphi(p_1, \dots, p_s)$, полученный по алгоритму из предыдущей теоремы.

Возьмём любую бесконечную $\mathcal{LTL}.sl$-модель $M = \langle W, \mathbf{Next}, V\rangle$. Если σ — унификатор для φ, тогда $\sigma(\varphi) \in \mathcal{LTL}.sl$ и $\forall x \in W\ \langle M, x\rangle \vDash \sigma(\varphi)$. Докажем, что подстановка σ является унификатором для φ в логике $\mathcal{LTL}.sl$.

(1) Если $\forall x \in W$ верно $\langle M, x\rangle \vDash \varphi$, тогда $\langle M, x\rangle \vDash \bigwedge\limits_{i=0}^{k-m} N^i\varphi$ и, следовательно, второй дизъюнктивный член будет опровергнут на x. Если $\langle M, x\rangle \vDash p_i$, тогда $\langle M, x\rangle \vDash \bigwedge\limits_{i=0}^{k-m} N^i\varphi \wedge p_i$, следовательно, $\langle M, x\rangle \vDash \sigma(p_i)$. Если $\langle M, x\rangle \vDash \neg p_i$, тогда $\langle M, x\rangle \nvDash \bigwedge\limits_{i=0}^{k-m} N^i\varphi \wedge p_i$ и следовательно $\langle M, x\rangle \vDash \neg\sigma(p_i)$. Как следствие, выполнимость $\varphi(p_1, \dots, p_s)$ на произвольном элементе x при означивании V совпадает с выполнимостью $\varphi(\sigma(p_1), \dots, \sigma(p_s))$ на том же элементе при том же означивании V и, в этом случае, $\langle M, x\rangle \vDash \sigma(\varphi)$.

(2) Если $\exists x \in W \colon \langle M, x\rangle \vDash \neg\varphi$, тогда $\langle M, x\rangle \nvDash \bigwedge\limits_{i=0}^{k-m} N^i\varphi$. В этом случае возможно выполнение второго дизъюнктивного члена, но первый при этом опровергается на x. Тогда выполнимость для всех $\sigma(p_i)$ на x совпадает с $gu(p_i)$ (т.е. $\sigma(\varphi) \equiv gu(\varphi)$), и поскольку $\langle M, x\rangle \vDash gu(\varphi)$ (в силу выбора корневого унификатора $gu(\varphi)$ в $\mathcal{LTL}.sl$), снова $\langle M, x\rangle \vDash \sigma(\varphi)$. Следовательно, $\sigma(\varphi) \in \mathcal{LTL}.sl$ для унифицируемой в $\mathcal{LTL}.sl$ формулы φ.

Докажем, что $\sigma(\varphi)$ – проективный унификатор. Если $\sigma(p_i)$ – проективный унификатор для φ, то по определению, мы получим следующее:

$\forall p_i \in Var(\varphi)$

$$\varphi \vdash_{\mathcal{LTL}_{sl}} \left(p_i \leftrightarrow \left(\bigwedge_{i=0}^{k-m} \left(N^i\varphi \wedge p_i\right) \vee \left(\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} \left(N^i\varphi \wedge gu(p_i)\right)\right)\right)\right).$$

Предположим обратное: пусть σ не является проективным унификатором. В таком случае $\exists x \in W$:

$$\langle M, x\rangle \vDash \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i\varphi, \tag{1}$$

но

$$\langle M, x\rangle \nvDash p_i \leftrightarrow \left(\bigwedge_{i=0}^{k-m} \left(N^i\varphi \wedge p_i\right) \vee \left(\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} \left(N^i\varphi \wedge gu(p_i)\right)\right)\right). \tag{2}$$

В этом случае

$$\langle M, x\rangle \nvDash p_i \rightarrow \left(\bigwedge_{i=0}^{k-m} \left(N^i\varphi \wedge p_i\right) \vee \left(\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} \left(N^i\varphi \wedge gu(p_i)\right)\right)\right) \tag{3}$$

или

$$\langle M, x\rangle \nvDash \left(\bigwedge_{i=0}^{k-m} \left(N^i\varphi \wedge p_i\right) \vee \left(\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} \left(N^i\varphi \wedge gu(p_i)\right)\right)\right) \rightarrow p_i. \tag{4}$$

Если (3), тогда $\langle M, x\rangle \vDash p_i$, но в этом случае $\langle M, x\rangle \vDash \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i\varphi \wedge p_i$ благодаря (1) и p_i на x, и поэтому $\langle M, x\rangle \vDash p_i \rightarrow \left(\bigwedge_{i=0}^{k-m} \left(N^i\varphi \wedge p_i\right) \vee \left(\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} \left(N^i\varphi \wedge gu(p_i)\right)\right)\right)$. Следовательно, выполнение (3) невозможно.

Если (4), то $\langle M, x\rangle \vDash \left(\bigwedge_{i=0}^{k-m} \left(N^i\varphi \wedge p_i\right) \vee \left(\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} \left(N^i\varphi \wedge gu(p_i)\right)\right)\right)$, но это возможно только при $\langle M, x\rangle \vDash p_i$, поскольку $\langle M, x\rangle \vDash \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i\varphi$ следует из (1). Как следствие, в дизъюнкции $\sigma(p_i)$ может выполняться только первый член. Поэтому $\langle M, x\rangle \vDash \left(\bigwedge_{i=0}^{k-m} \left(N^i\varphi \wedge p_i\right) \vee \left(\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} \left(N^i\varphi \wedge gu(p_i)\right)\right)\right) \rightarrow p_i$ справедливо, что противоречит (4). Следовательно, σ — проективный унификатор для φ в $\mathcal{LTL}.sl$, поэтому φ — проективная формула. $\square$

Следуя доказательству теоремы, для любой унифицируемой в $\mathcal{LTL}.sl$ формулы φ, подстановка вида

$$\sigma(p_i) := \left(\bigwedge_{i=0}^{k-m} \left(N^i\varphi \wedge p_i\right) \vee \left(\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} \left(N^i\varphi \wedge gu(p_i)\right)\right)\right)$$

представляет проективный унификатор, а значит и н.о.у., согласно результатам С. Гиларди, [5]. Следовательно, логика $\mathcal{LTL}.sl$ обладает унитарным типом унификации.

Установленное выше не только позволяет утверждать, что полученные ранее результаты по финитной аппроксимируемости и унификации для линейной многоагентной логики ступенчатого времени $\mathcal{LTK}.sl$ сохраняются и для случая обеднённого на знания языка, но и открывает определённые перспективы исследования данного класса логик с использованием кортежной семантики — потенциально даже для случая логик альтернативного времени и временных ветвлений.

References

[1] Шапировский, И. Б. *Современная модальная логика: между математикой и информатикой* / И. Б. Шапировский, В. Б. Шехтман. // Современная логика: основания, предмет и перспективы развития. – Москва: ИД «Форум», 2018. – С. 265–305.

[2] Goldblatt, R. *Logics of time and computation* / R. Goldblatt. // CSLI Lecture Notes. – Center for the Study of Language and Information, 1992. – no. 7. 2 edition. – 180 p.

[3] Bashmakov, S. I. *Unification and finite model property for linear step-like temporal multi-agent logic with the universal modality* / S. I. Bashmakov, T. Yu. Zvereva // Bulletin of the Section of Logic. – 2022. – Vol. 51, no. 3. – P. 345–361.

[4] Bashmakov, S. I. *Linear Step-like Logic of Knowledge LTK.sl* / S. I. Bashmakov, T. Yu. Zvereva // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2023. – Vol. 20, no. 2. – P. 1361–1373.

[5] Ghilardi, S. *Unification through projectivity* / S. Ghilardi // J. Logic Computation. – 1997. – Vol. 7. – P. 733–752.

[6] Baader, F. *Unification in modal and description logic* / F. Baader, S. Ghilardi. // Logic Journal of the IGPL. – 2011. – Vol. 19. – P. 705–730.

[7] Chagrov, A. *Modal Logic* / A. Chagrov, M. Zacharyaschev: Oxford University. – Oxford: Oxford University Press, 1997. – 605 p.

[8] Balbiani, P. *Unification in modal logic Alt1* / P. Balbiani, T. Tinchev // Advances in Modal Logic. – 2016. – Vol. 11. – P. 117–134.

Stepan Igorevich Bashmakov
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
600041, Krasnoyarsk, Russia
Email address: krauder@mail.ru

Alexandr Alexeyevich Polyakov
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
600041, Krasnoyarsk, Russia
Email address: sasha.polyakov.03@mail.ru

Tatyana Yurievna Zvereva
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
600041, Krasnoyarsk, Russia
Email address: 3336259@gmail.com