S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 22, № 2, стр. ?–? (2025) УДК 519.214
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.? MSC 60F05

ОБ ОДНОМ УСИЛЕНИИ ТЕОРЕМЫ ГАЕКА-ШИДАКА

И.С. Борисов, Ю.Ю. Линке

Представлено Н.С. Аркашовым

Abstract: An analogue of the Hajek-Sidak theorem on asymptotic normality of the distributions of sums of weighted independent identically distributed centered random variables with a finite second moment is proved in the case where the normalizing coefficients of these sums are not constants, but random variables.
Keywords: Hajek-Sidak central limit theorem, series diagram, random weighting coefficient.

1 Введение и основной результат

В книге Гаека и Шидака [1] имеется раздел «Специальный случай центральной предельной теоремы» (см. главу 5, раздел 1.2), в котором приводится утверждение о слабой сходимости к нормальному закону суммы взвешенных независимых одинаково распределенных случайных величин в случае, когда так называемый треугольный массив коэффициентов, участвующий в указанной сумме, состоит из постоянных. Цель данной заметки — доказать аналог указанного утверждения

Borisov, I.S., Linke, Y.Y., On a strengthening of the Hajek-Sidak theorem.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН (проект FWNF-2024-0001).

Поступила 25 сентября 2025 г., опубликована … декабря 2025 г.

в ситуации, когда треугольный массив составляют случайные величины, т.е. этот массив взвешивающих коэффициентов образует «схему серий». Утверждение такого типа нам потребовалось в задачах регрессии. В частности, при доказательстве асимптотической нормальности некоторых явных оценок в задачах нелинейной регрессии и универсальных локально–постоянных оценок в непараметрической регрессии (см. [3] и [4]). Данный результат может быть использован и в других задачах регрессионного анализа.

Перейдем к точным формулировкам. Приведем прежде всего обсуждаемую теорему Гаека–Шидака (см. приводимую далее теорему 1). Нам удобнее использовать специализированную формулировку этой теоремы, предложенную в [2]. Условимся, что всюду в дальнейшем все пределы, если не оговорено иное, берутся при $n \to \infty$. Символ $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ обозначает гауссовскую случайную величину с параметрами a и σ^2, а запись вида $\zeta_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ означает слабую сходимость распределений.

Теорема 1. *Пусть ξ_1, $\xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и конечным вторым моментом $\sigma^2 = \mathbb{E}\xi_1^2$. Кроме того, имеется такой треугольный массив коэффициентов c_{nk}, $k = 1, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$, что выполнены условия*

$$\max_{1 \le k \le n} |c_{nk}| \to 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} c_{nk}^2 = 1 \quad \textit{при всех} \quad n.$$

Тогда распределения последовательности сумм $\sum_{k=1}^{n} c_{nk}\xi_k$, $n = 1, 2, \ldots$ асимптотически нормальны:

$$\sum_{k=1}^{n} c_{nk}\xi_k \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Как отмечается в [2], случайные величины $c_{nk}\xi_k$, $k = 1, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$, образуют «схему серий» специального вида, в которой распределения участвующих в ней величин отличаются только параметрами масштаба.

Приведем теперь предлагаемый нами аналог теоремы 1 в ситуации случайных нормирующих коэффициентов. Справедлива

Теорема 2. *Пусть ε_1, $\varepsilon_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных центрированных случайных величин с конечным вторым моментом $\sigma^2 = \mathbb{E}\varepsilon_1^2$, а случайные величины a_{nk}, $k = 1, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$, не зависящие от $\{\varepsilon_i,\ i \ge 1\}$, удовлетворяют следующим двум условиям*:

$$\max_{1 \le k \le n} |a_{nk}| \xrightarrow{p} 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{nk}^2 = 1 \quad \textit{при} \quad \textit{всех} \quad n. \tag{1}$$

Тогда имеет место предельное соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} a_{nk}\varepsilon_k \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,\sigma^2). \tag{2}$$

Приведем один из примеров, относящийся к классической задаче оценивания регрессионной функции в непараметрической регрессии методом ядерного сглаживания, когда может возникнуть необходимость исследовать асимптотическое поведение рассматриваемых в теореме 2 сумм. Предположим, что наблюдения X_k, $k=1,\dots,n$, представимы в виде

$$X_k = f(z_k) + g(z_k)\varepsilon_k, \qquad k=1,\dots,n, \tag{3}$$

где неизвестная функция $f(t)$, $t\in[0,1]$, непрерывна и подлежит оцениванию, детерминированные или случайные величины $\{z_k\}$ (регрессоры) нам известны, погрешности $\{\varepsilon_k\}$ — ненаблюдаемые независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и конечной дисперсией, не зависящие от регрессоров $\{z_k\}$, известная функция $g(t)$, $t\in[0,1]$, непрерывна и положительна. В такой модели непараметрической регрессии весьма популярны методы ядерного сглаживания (см., например, [5], [6], [7]). Оценка Надарая – Ватсона для регрессионной функции f имеет следующую структуру

$$f^*_{n,h}(t) = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k K_h(t-z_k)}{\sum_{k=1}^{n} K_h(t-z_k)},$$

где $K_h(x) = h^{-1}K(h^{-1}x)$ и $K(x)$ — некоторая ядерная функция (например, плотность симметричного распределения с носителем $[-1,1]$), а $h = h_n \to 0$ — размер окна. Нетрудно видеть, что справедливо следующее представление

$$B^{-1}_{n,h}\big(f^*_{n,h}(t) - f(t) - r_{n,h}\big) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} K_h^2\,(t-z_i)\,g^2(z_i)\right)^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} K_h(t-z_k)g(z_k)\varepsilon_k,$$

где

$$r_{n,h}(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} K_h(t-z_i)\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (f(z_i)-f(t))K_h(t-z_i),$$
$$B^2_{n,h}(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} K_h(t-z_i)\right)^{-2} \sum_{i=1}^{n} K_h^2\,(t-z_i)\,g^2(z_k).$$

Таким образом, доказательство асимптотической нормальности оценки Надарая–Ватсона эквивалентно аналогичному соотношению для суммы

$$\sum_{k=1}^{n} a_{nk}\varepsilon_k \qquad \text{при} \quad a_{nk} = \frac{K_h(t-z_k)g(z_k)}{\left(\sum_{i=1}^{n} K_h^2\left(t-z_i\right)g^2(z_k)\right)^{1/2}}.$$

Отметим, что в силу теоремы 2 для асимптотической нормальности оценки Надарая–Ватсона в точке t нужно требовать следующее условие равномерной малости:

$$\frac{\max_{k\le n} K_h^2(t-z_k)g^2(z_k)}{\sum_{i=1}^{n} K_h^2\left(t-z_i\right)g^2(z_k)} \xrightarrow{p} 0. \tag{4}$$

Подчеркнем, что это условие выполнено при весьма широких ограничениях на регрессоры и не требует, например, выполнения тех или иных форм слабой зависимости или регулярности $\{z_i\}$. Отметим, что если это условие выполнено для любого фиксированного $t \in [0,1]$ (другими словами, оценка Надарая–Ватсона асимптотически нормальна для любой фиксированной точки из области определения f), то относительно регрессоров $\{z_i\}$ достаточно требовать лишь условие плотного заполнения ими области задания регрессионной функции. Это по существу необходимое ограничение на регрессоры, более слабое по сравнению с известными ранее в данной модели. В этой связи, не стремясь привести подробную библиографию, укажем, например, монографии [8]–[12] и работы [5]–[7], [13]–[16], в которых исследуются вопросы асимптотической нормальности тех или иных ядерных оценок, включая оценки Надарая–Ватсона и их модификации.

2 Доказательство теоремы 2

Пусть $\mathcal{F}_n$ — это σ-алгебра, порожденная случайными величинами

$$\{a_{nk};\ k=1,\ldots,n\}.$$

Обозначим символом $\mathbb{E}_{\mathcal{F}_n}$ условное математическое ожидание при фиксации этой σ-алгебры и рассмотрим характеристическую функцию случайной величины $\eta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\varepsilon_k$. Для любого фиксированного действительного s имеем

$$\mathbb{E}e^{is\eta_n} = \mathbb{E}\mathbb{E}_{\mathcal{F}_n}e^{is\eta_n} = \mathbb{E}\mathbb{E}_{\mathcal{F}_n}\exp\left\{is\sum_{k=1}^{n}a_{nk}\varepsilon_k\right\} = \mathbb{E}\mathbb{E}_{\mathcal{F}_n}\prod_{k=1}^{n}e^{isa_{nk}} =$$

$$= \mathbb{E}\mathbb{E}_{\mathcal{F}_n}\prod_{k=1}^{n}\left[1 + isa_{nk}\varepsilon_k - \frac{s^2a_{nk}^2\varepsilon_k^2}{2}\left(1 + 2\int_0^1(1-u)\big(e^{iusa_{nk}\varepsilon_k}-1\big)du\right)\right] =$$

$$= \mathbb{E}\prod_{k=1}^{n}\left[1 - \frac{s^2\sigma^2a_{nk}^2}{2}\left(1+\tau_s\left(a_{nk}\right)\right)\right], \tag{5}$$

где

$$\tau_s(x) = 2\sigma^{-2}\mathbb{E}\left(\varepsilon_1^2 \int_0^1 (1-u)(e^{isxu\varepsilon_1} - 1)du\right). \tag{6}$$

При выводе соотношения (5) мы использовали формулу Тейлора для функции e^{iz} при $z = sa_{nk}\varepsilon_k$ с остаточным членом в интегральном виде, а именно

$$e^{iz} = 1 + iz - z^2 \int_0^1 (1-u)e^{izu}du =$$
$$= 1 + iz - \frac{z^2}{2}\left(1 + 2\int_0^1 (1-u)\big(e^{izu} - 1\big)du\right).$$

Нам потребуется следующее неравенство для функции $\tau_s(x)$:

$$|\tau_s(x)| \le 2\sigma^{-2}\mathbb{E}\left\{\varepsilon_1^2 \int_0^1 (1-u)\min\{|sxu\varepsilon_1|, 2\}du\right\}. \tag{7}$$

Это соотношение очевидным образом следует из определения (6) и неравенства $\left|e^{ix} - 1\right| \le \min\{|x|,\ 2\}$ для любого $x \in \mathbb{R}$. В частности, $\tau_s(x) \to 0$ при $x \to 0$ в силу теоремы Лебега. Кроме того,

$$\sup_{x,s} |\tau_s(x)| \le 2. \tag{8}$$

Вернемся к изучению асимптотического поведения характеристической функции $\mathbb{E}e^{is\eta_n}$. Нам потребуется следующий хорошо известный вариант теоремы Лебега: если $X_n \xrightarrow{p} c_0$ и для любого $n \ge 1$ выполнено $|X_n| \le C$ для некоторой константы $C < \infty$, то $\mathbb{E}X_n \to c_0$. При этом случайные величины X_n и постоянная c_0 могут быть комплекснозначными. Обозначим через X_n произведение, стоящее под знаком математического ожидания в правой части (5), и воспользуемся следующим представлением

$$\prod_{k=1}^n (1 + b_{nk}) = \exp\left\{\sum_{k=1}^n \log(1 + b_{nk})\right\} = \exp\left\{\sum_{k=1}^n b_{nk} + O\left(\sum_{k=1}^n b_{nk}^2\right)\right\} \tag{9}$$

при $b_{nk} = ca_{nk}^2(1 + \tau_s(a_{nk}))$ и $c = -s^2\sigma^2/2$. Поскольку по условию (1) теоремы $\max_k |a_{nk}| \xrightarrow{p} 0$, то в силу свойств функции $\tau_s(\cdot)$ выполнено

$$\max_{1\le k\le n} |\tau_s(a_{nk})| \xrightarrow{p} 0 \quad \text{и} \quad \max_{1\le k\le n} |b_{nk}| \xrightarrow{p} 0.$$

Учитывая теперь условие $\sum_{k=1}^n a_{nk}^2 = 1$ из (1), заключаем, что

$$\sum_{k=1}^n b_{nk} = c + o_p(1), \qquad \sum_{k=1}^n b_{nk}^2 = o_p(1),$$

где символ $o_p(1)$ обозначает последовательность случайных величин, сходящихся по вероятности к нулю с ростом n. Таким образом, в силу (9)

$$X_n = \prod_{k=1}^{n} \left[1 + c a_{nk}^2 \big(1 + \tau_s(a_{nk})\big)\right] \equiv \prod_{k=1}^{n} (1 + b_{nk}) = \exp\left\{c + o_p(1)\right\}.$$

Легко видеть, что при всех n с учетом (1) и (8)

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{nk}^2 \tau_s(a_{nk})\right| \le 2. \tag{10}$$

Таким образом, с учетом (8), (10) и простого неравенства $|1+z| \le 1+|z| \le e^{|z|}$, справедливого при всех комплекснозначных z, при всех $n \ge 1$ мы имеем

$$|X_n| \le \exp\{3|c|\}.$$

Из полученных неравенств и предельных соотношений немедленно получаем, что $X_n \xrightarrow{p} c_0 \equiv e^{-s^2\sigma^2/2}$ и $|X_n| \le C$ при некотором $C < \infty$ и всех n. Таким образом, при любом фиксированном действительном s выполнено $\mathbb{E}e^{is\eta_n} \equiv \mathbb{E}X_n \to e^{-s^2\sigma^2/2}$. Теорема 2 доказана.

References

[1] Hajek J., Sidak Z. *Theory of rank tests*, Academic Press, New York-London; Academia, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1967.

[2] Chibisov D. M. *Lectures on the asymptotic theory of rank tests*, Lektsionnye Kursy NOC **14** (2009), 3–174.

[3] Linke Yu. Yu., Borisov I. S. *Constructing explicit estimators in nonlinear regression models*, Theory Probab. Appl. **63** (2018), 22–44.

[4] Borisov I.S., Linke Yu.Yu., Ruzankin P.S. *Universal weighted kernel-type estimators for some class of regression models*, Metrika, **84** (2021), 141–166.

[5] Gu J., Li Q., Yang J. C. *Multivariate local polynomial kernel estimators: leading bias and asymptotic distribution*, Econometric Reviews, **34** (2015), 979–1010.

[6] Xie Q., Sun Q., Liu J. *Local weighted composite quantile estimation and smoothing parameter selection for nonparametric derivative function*, Econometric Reviews, **39** (2020), 215–233.

[7] Kai B., Li R., Zou H. *Local composite quantile regression smoothing: an efficient and safe alternative to local polynomial regression*, J. R. Stat. Soc. Series B Stat. Methodol, **72** (2010), 49–69.

[8] Härdle W. *Applied nonparametric regression*, Cambridge University Press, 1990.

[9] Fan J., Gijbels I. *Local polynomial modelling and its applications*, London: Chapman and Hall, 1996.

[10] Fan J., Yao Q. *Nonlinear time series nonparametric and parametric methods*, Springer, 2003.

[11] Härdle W., Muller M., Sperlich S., Werwatz A. *Nonparametric and semiparametric models*, Berlin: Springer-Verlag, 2004.

[12] Horova I. Kolacek J., Zelinka J. *Kernel smoothing in MATLAB: theory and practice of kernel smoothing*, World Scientific, 2012.

[13] Linton O. B., Jacho-Chavez D. T. *On internally corrected and symmetrized kernel estimators for nonparametric regression*, TEST, **19** (2010), 166–186.

[14] Georgiev A. A. *Asymptotic properties of the multivariate Nadaraya-Watson regression function estimate: the fixed design case*, Stat. Probab. Lett., bf 7 (1989), 35–40.
[15] Zheng Q., Gallagher C., Kulasekera K. B. *Adaptively weighted kernel regression*, J. Nonparametr. Stat., **25** (2013), 855–872.
[16] Dhar S., Jha P., Rakshit P. *The trimmed mean in non-parametric regression function estimation*, Theory of Probability and Mathematical Statistics, **107** (2022), 133–158.

Igor Semenovich Borisov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: sibam@math.nsc.ru

Yuliana Yurievna Linke
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: linke@math.nsc.ru