

О ГРУППАХ, НОРМАЛЬНЫЕ ЗАМЫКАНИЯ
2-ПОРОЖДЕННЫХ ПОДГРУПП КОТОРЫХ
ЯВЛЯЮТСЯ 3-НИЛЬПОТЕНТНЫМИ

А.И. Будкин

Представлено И.Б. Горшковым

Abstract: In this paper, we continue to study groups whose normal closure of each 2-generated subgroup is a nilpotent group. It is proved that there exists a non-metabelian group without elements of order 2, the normal closure of each 2-generated subgroup of which is a nilpotent group of class no more than 3.

Keywords: nilpotent group, metabelian group, normal closure of a subgroup, Levy class, variety, quasivariety.

1 Введение

Покрытием группы G назовём всякую систему подгрупп этой группы, теоретико-множественное объединение которых совпадает с G . Исследование влияния свойств покрытия на строение самой группы — одна из интересных задач, в рамках которой выполнена данная работа.

Пусть \mathcal{M} — класс групп, тогда через $L_n(\mathcal{M})$ будем обозначать класс всех групп G , в которых нормальное замыкание $\langle g_1, \dots, g_n \rangle^G$ любой n -порождённой подгруппы $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$ группы G принадлежит \mathcal{M} .

Как обычно, \mathcal{N}_c — многообразие нильпотентных групп степени не выше c , \mathcal{A}^2 — многообразие метабелевых групп (т.е. групп с абелевым коммутантом), $q\mathcal{K}$ — квазимногообразие, порождённое классом групп

BUDKIN, A.I., ON GROUPS WHOSE NORMAL CLOSURE OF 2-GENERATED SUBGROUPS ARE 3-NILPOTENT.

© 2026 Будкин А.И.

Поступила 25 сентября 2026 г., опубликована 18 мая 2026 г.

\mathcal{K} . Квазимногообразию называется нильпотентным, если все группы в нём нильпотентные.

Класс $L_1(\mathcal{M})$ групп называется классом Леви, порождённым \mathcal{M} . Первые классы Леви были введены в [1] под влиянием работы Леви [2], в которой исследовались группы с абелевыми подгруппами вида $\langle x \rangle^G$. В [3] доказано, что если класс \mathcal{M} является многообразием, то $L_1(\mathcal{M})$ — также многообразие групп, а в [4] установлено, что если \mathcal{M} — квазимногообразие, то $L_1(\mathcal{M})$ — снова квазимногообразие групп. Это привело в дальнейшем к исследованию классов $L_1(\mathcal{M})$ для многообразий и квазимногообразий групп.

В настоящее время классы Леви активно изучаются. Особое внимание здесь уделяется нильпотентным квазимногообразиям \mathcal{M} групп [4]–[6]. Основным результатом работ [4] и [5] явилась теорема, в которой найдены условия на произвольное множество \mathcal{K} групп из \mathcal{N}_2 , при выполнении которых $L_1(q\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{N}_3$. В [7]–[10] описаны классы Леви почти абелевых квазимногообразий нильпотентных групп, т.е. неабелевых квазимногообразий групп, все собственные подквазимногообразия которых абелевы. Вопросы аксиоматизируемости классов Леви нильпотентных квазимногообразий групп изучались в [11]–[14].

Оператор L_n для каждого натурального числа n был введён в [15]. Оказалось [15], если \mathcal{M} — квазимногообразие (многообразие) групп, то $L_n(\mathcal{M})$ — снова квазимногообразие (многообразие) групп.

В [16] установлено, что для класса \mathcal{N} нильпотентных групп степени не выше трёх без элементов второго порядка справедливо включение: $L_2(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}_4$. Здесь же показано, что в последнем утверждении ограничение на элементы второго порядка убрать нельзя, в частности, класс $L_2(\mathcal{N}_3)$ не является нильпотентным.

В [16] доказано, что если \mathcal{N} — класс нильпотентных групп степени не выше трёх без элементов второго порядка, то $L_2(\mathcal{N}) \cap \mathcal{A}^2 = \mathcal{N}$. Возникает естественный вопрос: $L_2(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{A}^2$? В данной работе доказано, что квазимногообразию $L_2(\mathcal{N})$ содержит неметабелеву группу, в частности, $L_2(\mathcal{N}) \not\subseteq \mathcal{N}_3$.

2 Предварительные сведения

В работе используются следующие обозначения:

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y, [x, y, \dots, z, u] = [[x, y, \dots, z], u];$$

$\langle x, y, \dots \rangle$ — группа, порожденная элементами x, y, \dots ; $\langle x \rangle$ — циклическая группа, порожденная x ;

$\langle g_1, \dots, g_n \rangle^G = \langle g^{-1}g_1g, \dots, g^{-1}g_ng | g \in G \rangle$ — нормальное замыкание подгруппы $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$ в G ;

$$\gamma_1(G) = G, \gamma_2(G) = [G, G], \dots, \gamma_n(G) = [\gamma_{n-1}(G), G];$$

\mathbb{Z} — множество целых чисел.

Если H — подгруппа группы G , то $IsH = \{g \in G | (\exists n)(n \in \mathbb{Z} \ \& \ n \neq 0 \ \& \ g^n \in H)\}$ — изолятор подгруппы H в G .

Стандартным образом определяем вес $w(a)$ коммутатора, считая, что

1) $w(x) = 1$, если x — предметная переменная,

2) $w(a) = w(u) + w(v)$, если $a = [u, v]$.

$[x_3, x_2, x_2, x_2], [x_3, x_2, x_2, x_3], [x_3, x_2, x_3, x_3],$

$[x_3, x_1, x_1, x_1], [x_3, x_1, x_1, x_2], [x_3, x_1, x_1, x_3]$

$[x_3, x_1, x_2, x_2], [x_3, x_1, x_2, x_3]$

$[x_3, x_1, x_3, x_3], [x_2, x_1, x_1, x_1], [x_2, x_1, x_1, x_2], [x_2, x_1, x_1, x_3],$

$[x_2, x_1, x_2, x_2], [x_2, x_1, x_2, x_3], [x_2, x_1, x_3, x_3],$

$[x_3, x_2, [x_3, x_1]], [x_3, x_2, [x_2, x_1]], [x_3, x_1, [x_2, x_1]]$

— это все базисные коммутаторы веса 4 в переменных x_1, x_2, x_3 .

Слова

$\gamma_1(x_1) = x_1, \gamma_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = [\gamma_n(x_1, \dots, x_n), x_{n+1}], n = 1, 2, \dots,$

называются простыми коммутаторами.

При написании тождеств кванторы всеобщности будем опускать.

Нам потребуются следующие хорошо известные коммутаторные тождества и тождество Витта ([17], теорема 33.34), истинные в каждой группе:

$$[xy, z] = [x, z]^y [y, z], \quad (1)$$

$$[x, yz] = [x, z][x, y]^z, \quad (2)$$

$$[x, yzt] = [x, t][x, z]^t [x, y]^{zt}, \quad (3)$$

$$[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1. \quad (4)$$

Будем пользоваться линейностью коммутаторов веса 4 в 4-ступенно нильпотентных группах, т.е. истинностью в них тождеств:

$$[xy, z, t, u] = [x, z, t, u][y, z, t, u],$$

$$[z, xy, t, u] = [z, x, t, u][x, y, t, u],$$

$$[t, z, xy, u] = [t, z, x, u][t, z, y, u],$$

$$[u, z, t, xy] = [u, z, t, x][u, z, t, y].$$

Отметим, что из вышеупомянутых тождеств тождеств следует, что в 4-ступенно нильпотентных группах истинны тождества:

$$[[x, y], [z, t]^{-1}] = [[x, y], [z, t]]^{-1},$$

$$[[x, y, z]^{-1}, t] = [x, y, z, t]^{-1},$$

$$[x^m, y^k, z^s, t^l] = [x, y, z, t]^{mksl} \quad (m, k, s, t \in \mathbb{Z}),$$

$$[[x, y, z][y, z, x][z, x, y], t] = 1, \quad (5)$$

$$[[x, y, z], t] = [[y, z, x][z, x, y], t]^{-1},$$

которыми мы будем часто пользоваться.

С основными понятиями и определениями можно познакомиться в [17, 18, 19].

3 Основной результат

Пусть F — свободная 4-нильпотентная группа со свободными порождающими x_1, x_2, x_3 ; N — её подгруппа, порождённая элементами $u_1, \dots, u_9, v_1, \dots, v_{12}$ (эти элементы — произведения некоторых базисных коммутаторов), где

$$\begin{aligned} u_1 &= [x_2, x_1, x_1, x_1], u_2 = [x_2, x_1, x_1, x_2], u_3 = [x_2, x_1, x_2, x_2], \\ u_4 &= [x_3, x_1, x_1, x_1], u_5 = [x_3, x_1, x_1, x_3], u_6 = [x_3, x_1, x_3, x_3], \\ u_7 &= [x_3, x_2, x_2, x_2], u_8 = [x_3, x_2, x_2, x_3], u_9 = [x_3, x_2, x_3, x_3], \\ v_1 &= [x_3, x_1, x_2, x_3]^{-2} [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1} [x_3, x_2, [x_3, x_1]], \\ v_2 &= [x_2, x_1, x_2, x_3]^{-2} [x_3, x_1, x_2, x_2]^{-1} [x_3, x_2, [x_2, x_1]], \\ v_3 &= [x_3, x_2, [x_3, x_1]] [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-2}, \\ v_4 &= [x_3, x_2, [x_2, x_1]] [x_3, x_1, x_2, x_2]^2, \\ v_5 &= [x_2, x_1, x_1, x_3] [x_3, x_1, x_1, x_2], \\ v_6 &= [x_3, x_1, x_2, x_3]^{-2} [x_2, x_1, x_3, x_3], \\ v_7 &= [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^2 [x_2, x_1, x_2, x_3]^{-2} [x_3, x_1, x_2, x_2], \\ v_8 &= [x_3, x_2, [x_3, x_1]] [x_3, x_1, x_2, x_3]^2 [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-3}, \\ v_9 &= [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^2 [x_2, x_1, x_2, x_3]^{-2} [x_3, x_1, x_2, x_2], \\ v_{10} &= [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^{-3} [x_2, x_1, x_2, x_3]^2 [x_3, x_1, x_2, x_2]^{-3}, \\ v_{11} &= [x_3, x_1, [x_2, x_1]]^3 [x_2, x_1, x_1, x_3]^{-3} [x_3, x_1, x_1, x_2], \\ v_{12} &= [x_3, x_1, [x_2, x_1]]^{-3} [x_3, x_1, x_1, x_2]^{-3} [x_2, x_1, x_1, x_3], \end{aligned}$$

N_0 — изолятор N в F_3 .

Лемма 1. $\langle [x_3, x_1, [x_2, x_1]] \rangle \cap N_0 = \langle 1 \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда $[x_3, x_1, [x_2, x_1]]^m \in N$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$. Тогда для подходящих $k_1, \dots, k_9, m_1, \dots, m_{12} \in \mathbb{Z}$ имеем:

$$u_1^{k_1} \dots u_9^{k_9} v_1^{m_1} \dots v_{12}^{m_{12}} = [x_3, x_1, [x_2, x_1]]^m.$$

Элемент $[x_2, x_1, x_1, x_3]$ входит в левую часть этого равенства с суммой показателей, равной $m_5 - 3m_{11} + m_{12}$, элемент $[x_3, x_1, x_1, x_2]$ — с суммой показателей $m_5 + m_{11} - 3m_{12}$, элемент $[x_3, x_1, [x_2, x_1]]$ — с суммой показателей $3m_{11} - 3m_{12}$. Из однозначности представления элемента $[x_3, x_1, [x_2, x_1]]$ в виде произведения базисных коммутаторов в свободной 4-нильпотентной группе получаем равенства:

$$\begin{aligned} m_5 - 3m_{11} + m_{12} &= 0, \\ m_5 + m_{11} - 3m_{12} &= 0, \\ 3m_{11} - 3m_{12} &= m, \end{aligned}$$

откуда легко следует, что $m_{11} - m_{12} = 0$, т.е. $m = 0$. Противоречие. Лемма доказана.

Следствие 1. *Группа $G = F/N_0$ не является метабелевой.*

В следующей лемме некоторые коммутаторы представлены в F в виде произведения базисных коммутаторов. Несомненно, эти формулы можно получить, используя хорошо известный собирательный процесс. Тем не менее, мы приведём подробный, менее громоздкий вывод этих формул.

Лемма 2. *В любой нильпотентной группе A степени 4 истинны следующие тождества:*

$$[x_1, x_2, x_3, x_2] = [x_3, x_2, [x_2, x_1]][x_2, x_1, x_2, x_3]^{-1}, \quad (6)$$

$$[x_1, x_3, x_3, x_2] = [x_3, x_1, x_2, x_3]^{-1}[x_3, x_2, [x_3, x_1]], \quad (7)$$

$$[x_3, x_2, x_3, x_1] = [x_3, x_1, [x_3, x_2]]^{-1}[x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_3], \quad (8)$$

$$[x_2, x_1, x_3, x_2] = [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^{-1}[x_2, x_1, x_2, x_3], \quad (9)$$

$$[x_2, x_3, x_2, x_1] = [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^{-2}[x_3, x_1, x_2, x_2]^{-1}[x_2, x_1, x_2, x_3], \quad (10)$$

$$[x_1, x_2, x_3, x_1] = [x_2, x_1, x_1, x_3]^{-1}[x_3, x_1, [x_2, x_1]], \quad (11)$$

$$[x_1, x_3, x_2, x_1] = [x_3, x_1, [x_2, x_1]]^{-1}[x_3, x_1, x_1, x_2]^{-1}, \quad (12)$$

$$[x_3, x_2, x_1, x_3] = [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_3], \quad (13)$$

$$[x_3, x_2, x_1, x_2] = [x_3, x_2, [x_2, x_1]][x_2, x_1, x_2, x_3]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_2], \quad (14)$$

$$[x_3, x_2, x_1, x_1] = [x_3, x_1, [x_2, x_1]]^2[x_2, x_1, x_1, x_3]^{-1}[x_3, x_1, x_1, x_2]. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4), (5) и линейности коммутаторов получаем в F следующие равенства (которые являются тождествами в F):

$$\begin{aligned} [x_1, x_2, x_3, x_2] &= [x_3, x_2, [x_1, x_2]]^{-1}[x_2, [x_1, x_2], x_3]^{-1} = \\ &= [x_3, x_2, [x_2, x_1]][x_2, x_1, x_2, x_3]^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [x_1, x_3, x_3, x_2] &= [x_3, x_2, [x_1, x_3]]^{-1}[x_2, [x_1, x_3], x_3]^{-1} = \\ &= [x_3, x_1, x_2, x_3]^{-1}[x_3, x_2, [x_3, x_1]], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [x_3, x_2, x_3, x_1] &= [x_3, x_1, [x_3, x_2]]^{-1}[x_1, [x_3, x_2], x_3]^{-1} = \\ &= [x_3, x_1, [x_3, x_2]]^{-1}[x_3, x_2, x_1, x_3] = \\ &= [x_3, x_1, [x_3, x_2]]^{-1}[x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1}[x_1, x_3, x_2, x_3]^{-1} = \\ &= [x_3, x_1, [x_3, x_2]]^{-1}[x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_3], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [x_2, x_1, x_3, x_2] &= [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^{-1}[x_2, [x_2, x_1], x_3]^{-1} = \\ &= [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^{-1}[x_2, x_1, x_2, x_3]. \end{aligned}$$

Заменяем в (8) x_2 на x_3 , x_3 на x_2 . Получим следующее равенство:

$$[x_2, x_3, x_2, x_1] = [x_2, x_1, [x_2, x_3]]^{-1} [x_3, x_1, x_2, x_2]^{-1} [x_2, x_1, x_3, x_2].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & [x_2, x_3, x_2, x_1] = \\ & = [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^{-1} [x_3, x_1, x_2, x_2]^{-1} [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^{-1} [x_2, [x_2, x_1], x_3]^{-1} = \\ & = [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^{-2} [x_3, x_1, x_2, x_2]^{-1} [x_2, x_1, x_2, x_3]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [x_1, x_3, x_2, x_1] & = [x_2, x_1, [x_1, x_3]]^{-1} [x_1, [x_1, x_3], x_2]^{-1} = \\ & = [x_3, x_1, [x_2, x_1]]^{-1} [x_3, x_1, x_1, x_2]^{-1}. \end{aligned}$$

Получили тождество (12). Заменяя в (12) x_2 на x_3 , x_3 на x_2 , получаем тождество (11).

$$\begin{aligned} [x_3, x_2, x_1, x_3] & = [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1} [x_1, x_3, x_2, x_3]^{-1} = \\ & = [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1} [x_3, x_1, x_2, x_3]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [x_3, x_2, x_1, x_2] & = [x_2, x_1, x_3, x_2]^{-1} [x_1, x_3, x_2, x_2]^{-1} = \\ & = [x_3, x_2, [x_2, x_1]] [x_2, x_1, x_2, x_3]^{-1} [x_3, x_1, x_2, x_2]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [x_3, x_2, x_1, x_1] & = [x_2, x_1, x_3, x_1]^{-1} [x_1, x_3, x_2, x_1]^{-1} = \\ & = [x_3, x_1, [x_2, x_1]] [x_2, x_1, x_1, x_3]^{-1} [x_3, x_1, [x_2, x_1]] [x_3, x_1, x_1, x_2] = \\ & = [x_3, x_1, [x_2, x_1]]^2 [x_2, x_1, x_1, x_3]^{-1} [x_3, x_1, x_1, x_2]. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Если $g_1 = x_3^{m_3} x_2^{m_2} c_1, g_2 = x_3^{k_3} x_2^{k_2} x_1^{k_1} c_2 \in F_3$ ($c_1, c_2 \in F'_3$), то $[g_2, g_1, g_1, g_1] \in N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h = [g_2, g_1, g_1, g_1]$. Ясно, что

$$h = [x_3^{k_3} x_2^{k_2} x_1^{k_1}, x_2^{m_2} x_3^{m_3}, x_2^{m_2} x_3^{m_3}, x_2^{m_2} x_3^{m_3}].$$

Используя линейность коммутаторов, несложно представить h в виде произведения коммутаторов вида $[x_i, x_j, x_k, x_l]$. Видим, что в этой записи элемента h присутствует элемент

$$h_1 = [x_1, x_2, x_2, x_3] [x_1, x_2, x_3, x_2] [x_1, x_3, x_2, x_2]$$

в степени $k_1 m_2^2 m_3$. Ввиду (6)

$$\begin{aligned} h_1 & = [x_2, x_1, x_2, x_3]^{-1} [x_3, x_2, [x_2, x_1]] [x_2, x_1, x_2, x_3]^{-1} [x_3, x_1, x_2, x_2]^{-1} = \\ & = [x_3, x_2, [x_2, x_1]] [x_2, x_1, x_2, x_3]^{-2} [x_3, x_1, x_2, x_2]^{-1} = v_2 \in N. \end{aligned}$$

В нашу запись элемента h в степени $k_1 m_2 m_3^2$ входит элемент

$$h_2 = [x_1, x_2, x_3, x_3] [x_1, x_3, x_2, x_3] [x_1, x_3, x_3, x_2].$$

Ввиду (7)

$$\begin{aligned} h_2 &= [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_3]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_3]^{-1}[x_3, x_2, [x_3, x_1]] = \\ &= [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_3]^{-2}[x_3, x_2, [x_3, x_1]] = v_1 \in N. \end{aligned}$$

Отметим, что все базисные коммутаторы от любых двух переменных из множества $\{x_1, x_2, x_3\}$ веса 4 содержатся в N . Отсюда любой коммутатор от двух переменных из множества $\{x_1, x_2, x_3\}$ веса 4 содержится в N . Так как

$$\begin{aligned} h &= [x_3^{k_3} x_2^{k_2}, x_3^{m_3} x_2^{m_2}, x_3^{m_3} x_2^{m_2}, x_3^{m_3} x_2^{m_2}][x_1^{k_1}, x_2^{m_2}, x_2^{m_2}, x_2^{m_2}] \cdot \\ &\cdot [x_1^{k_1}, x_3^{m_3}, x_3^{m_3}, x_3^{m_3}] h_1^{k_1 m_2^2 m_3} h_2^{k_1 m_2 m_3^2} = h_1^{k_1 m_2^2 m_3} h_2^{k_1 m_2 m_3^2} c, \end{aligned}$$

где c — подходящее произведение базисных коммутаторов от двух переменных из множества $\{x_1, x_2, x_3\}$ веса 4, то видим, что $h \in N$. Лемма доказана.

Лемма 4. Если $g_1 = x_3^{m_3} x_2^{m_2} c_1, g_2 = x_3^{k_3} x_2^{k_2} x_1^{k_1} c_2 \in F_3$ ($c_1, c_2 \in F_3'$), то $[g_2, g_1, g_1, g_2] \in N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h = [g_2, g_1, g_1, g_2]$. Тогда

$$\begin{aligned} h &= [x_3^{k_3} x_2^{k_2} x_1^{k_1}, x_3^{m_3} x_2^{m_2}, x_3^{m_3} x_2^{m_2}, x_3^{k_3} x_2^{k_2} x_1^{k_1}] = \\ &= [x_3^{k_3} x_2^{k_2}, x_3^{m_3} x_2^{m_2}, x_3^{m_3} x_2^{m_2}, x_3^{k_3} x_2^{k_2}][x_1^{k_1}, x_3^{m_3} x_2^{m_2}, x_3^{m_3} x_2^{m_2}, x_1^{k_1}] \cdot \\ &\cdot [x_1^{k_1}, x_3^{m_3} x_2^{m_2}, x_3^{m_3} x_2^{m_2}, x_3^{k_3} x_2^{k_2}][x_3^{k_3} x_2^{k_2}, x_3^{m_3} x_2^{m_2}, x_3^{m_3} x_2^{m_2}, x_1^{k_1}]. \end{aligned}$$

Используя линейность коммутаторов, зафиксируем запись h в виде произведения коммутаторов вида $[x_i, x_j, x_k, x_l]$. Видим, что в эту запись h в степени $k_1 k_3 m_2 m_3$ входит элемент

$$h_1 = [x_1, x_2, x_3, x_3][x_1, x_3, x_2, x_3][x_3, x_2, x_3, x_1].$$

Ввиду (8)

$$\begin{aligned} h_1 &= [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_3]^{-1}[x_3, x_1, [x_3, x_2]]^{-1} \cdot \\ &\cdot [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_3] = [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-2} \cdot \\ &\cdot [x_3, x_1, [x_3, x_2]]^{-1} = v_3 \in N. \end{aligned}$$

В нашу запись h в степени $k_1 k_2 m_2 m_3$ входит элемент

$$h_2 = [x_1, x_2, x_3, x_2][x_1, x_3, x_2, x_2][x_2, x_3, x_2, x_1].$$

Ввиду (6) и (10)

$$\begin{aligned} h_2 &= [x_3, x_2, [x_2, x_1]][x_2, x_1, x_2, x_3]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_2]^{-1} \cdot \\ &\cdot [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^{-2}[x_3, x_1, x_2, x_2]^{-1} \cdot \\ &\cdot [x_2, x_1, x_2, x_3] = [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_2]^{-2} = v_4^{-1} \in N. \end{aligned}$$

В эту запись h в степени $k_1^2 m_2 m_3$ входит элемент

$$h_3 = [x_1, x_2, x_3, x_1][x_1, x_3, x_2, x_1].$$

В силу (11) и (12)

$$\begin{aligned} h_3 &= [x_2, x_1, x_1, x_3]^{-1} [x_3, x_1, [x_2, x_1]] [x_3, x_1, [x_2, x_1]]^{-1} [x_3, x_1, x_1, x_2]^{-1} = \\ &= [x_2, x_1, x_1, x_3]^{-1} [x_3, x_1, x_1, x_2]^{-1} = v_5^{-1} \in N. \end{aligned}$$

В полученную запись h в степени $k_1 k_2 m_3^2$ входит элемент

$$h_4 = [x_1, x_3, x_3, x_2] [x_2, x_3, x_3, x_1].$$

Ввиду (7) и (8)

$$\begin{aligned} h_4 &= [x_3, x_1, x_2, x_3]^{-1} [x_3, x_2, [x_3, x_1]] [x_3, x_1, [x_3, x_2]] \cdot \\ &\cdot [x_2, x_1, x_3, x_3] [x_3, x_1, x_2, x_3]^{-1} = [x_3, x_1, x_2, x_3]^{-2} [x_2, x_1, x_3, x_3] = v_6 \in N. \end{aligned}$$

В зафиксированную запись h в степени $k_1 k_3 m_2^2$ входит элемент

$$h_5 = [x_1, x_2, x_2, x_3] [x_3, x_2, x_2, x_1].$$

В силу (10)

$$\begin{aligned} h_5 &= [x_2, x_1, x_2, x_3]^{-1} [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^2 [x_3, x_1, x_2, x_2] \cdot \\ &\cdot [x_2, x_1, x_2, x_3]^{-1} = [x_2, x_1, x_2, x_3]^{-2} [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^2 [x_3, x_1, x_2, x_2] = v_7 \in N. \end{aligned}$$

Видим, что

$$h = h_1^{k_1 k_3 m_2 m_3} h_2^{k_1 k_2 m_2 m_3} h_3^{k_1^2 m_2 m_3} h_4^{k_1 k_2 m_3^2} h_5^{k_1 k_3 m_2^2} t,$$

где t — подходящее произведение коммутаторов веса 4 от двух переменных. Так как все базисные коммутаторы веса 4 от двух переменных содержатся в N , то $t \in N$. Отсюда $h \in N$. Лемма доказана.

Лемма 5. Если $g_1 = x_3^{m_3} x_2^{m_2} c_1, g_2 = x_3^{k_3} x_2^{k_2} x_1^{k_1} c_2 \in F_3$ ($c_1, c_2 \in F_3'$), то $[g_2, g_1, g_2, g_2] \in N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h = [g_2, g_1, g_2, g_2]$. Тогда

$$\begin{aligned} h &= [x_3^{k_3} x_2^{k_2} x_1^{k_1}, x_3^{m_3} x_2^{m_2}, x_3^{k_3} x_2^{k_2} x_1^{k_1}, x_3^{k_3} x_2^{k_2} x_1^{k_1}] = \\ &= [x_3^{k_3} x_2^{k_2}, x_3^{m_3} x_2^{m_2}, x_3^{k_3} x_2^{k_2}, x_3^{k_3} x_2^{k_2}] [x_1^{k_1}, x_3^{m_3} x_2^{m_2}, x_3^{k_3} x_2^{k_2}, x_1^{k_1}] \cdot \\ &\cdot [x_1^{k_1}, x_3^{m_3} x_2^{m_2}, x_3^{k_3} x_2^{k_2}, x_3^{k_3} x_2^{k_2}] [x_3^{k_3} x_2^{k_2}, x_3^{m_3} x_2^{m_2}, x_3^{k_3} x_2^{k_2}, x_1^{k_1}] \cdot \\ &\cdot [x_3^{k_3} x_2^{k_2}, x_3^{m_3} x_2^{m_2}, x_1^{k_1}, x_3^{k_3} x_2^{k_2}] [x_1^{k_1}, x_3^{m_3} x_2^{m_2}, x_1^{k_1}, x_1^{k_1}] \cdot \\ &\cdot [x_1^{k_1}, x_3^{m_3} x_2^{m_2}, x_1^{k_1}, x_3^{k_3} x_2^{k_2}] [x_3^{k_3} x_2^{k_2}, x_3^{m_3} x_2^{m_2}, x_1^{k_1}, x_1^{k_1}]. \end{aligned}$$

Фиксируем запись h в виде произведения коммутаторов вида $[x_i, x_j, x_k, x_l]$. В эту запись элемента h в степени $k_1 k_3^2 m_2$ входит элемент

$$h_1 = [x_1, x_2, x_3, x_3] [x_3, x_2, x_3, x_1] [x_3, x_2, x_1, x_3].$$

Ввиду (8) и (13)

$$\begin{aligned} h_1 &= [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1} [x_3, x_1, [x_3, x_2]]^{-1} [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1} \cdot \\ &\cdot [x_3, x_1, x_2, x_3] [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1} [x_3, x_1, x_2, x_3] = \\ &= [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-3} [x_3, x_1, [x_3, x_2]]^{-1} [x_3, x_1, x_2, x_3]^2 = v_8 \in N. \end{aligned}$$

В рассматриваемую запись h в степени $k_1 k_2 k_3 m_2$ входит элемент

$$h_2 = [x_1, x_2, x_2, x_3] [x_1, x_2, x_3, x_2] [x_3, x_2, x_2, x_1] [x_3, x_2, x_1, x_2].$$

Ввиду (6), (10) и (14)

$$\begin{aligned} h_2 &= [x_2, x_1, x_2, x_3]^{-1} [x_3, x_2, [x_2, x_1]] [x_2, x_1, x_2, x_3]^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^2 [x_3, x_1, x_2, x_2] [x_2, x_1, x_2, x_3]^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot [x_3, x_2, [x_2, x_1]] [x_2, x_1, x_2, x_3]^{-1} [x_3, x_1, x_2, x_2] = \\ &= [x_2, x_1, x_2, x_3]^{-4} [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^4 [x_3, x_1, x_2, x_2]^2 = v_9^2 \in N. \end{aligned}$$

В нашу запись h в степени $k_1 k_2 k_3 m_3$ входит элемент

$$h_3 = [x_1, x_3, x_2, x_3] [x_1, x_3, x_3, x_2] [x_2, x_3, x_3, x_1] [x_2, x_3, x_1, x_3].$$

В силу (7), (8) и (13)

$$\begin{aligned} h_3 &= [x_3, x_1, x_2, x_3]^{-1} [x_3, x_1, x_2, x_3]^{-1} [x_3, x_2, [x_3, x_1]] [x_3, x_1, [x_3, x_2]] \cdot \\ &\quad \cdot [x_2, x_1, x_3, x_3] [x_3, x_1, x_2, x_3]^{-1} [x_2, x_1, x_3, x_3] [x_3, x_1, x_2, x_3]^{-1} = \\ &= [x_3, x_1, x_2, x_3]^{-4} [x_2, x_1, x_3, x_3]^2 = v_6^2 \in N. \end{aligned}$$

В h в степени $k_1 k_2^2 m_3$ входит элемент

$$h_4 = [x_1, x_3, x_2, x_2] [x_2, x_3, x_2, x_1] [x_2, x_3, x_1, x_2].$$

Ввиду (10) и (14)

$$\begin{aligned} h_4 &= [x_3, x_1, x_2, x_2]^{-1} [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^{-2} [x_3, x_1, x_2, x_2]^{-1} [x_2, x_1, x_2, x_3] \cdot \\ &\quad \cdot [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^{-1} [x_2, x_1, x_2, x_3] [x_3, x_1, x_2, x_2]^{-1} = \\ &= [x_3, x_1, x_2, x_2]^{-3} [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^{-3} [x_2, x_1, x_2, x_3]^2 = v_{10} \in N. \end{aligned}$$

В запись h в степени $k_1^2 k_3 m_2$ входит элемент

$$h_5 = [x_1, x_2, x_3, x_1] [x_1, x_2, x_1, x_3] [x_3, x_2, x_1, x_1].$$

В силу (11) и (15)

$$\begin{aligned} h_5 &= [x_3, x_1, [x_2, x_1]] [x_2, x_1, x_1, x_3]^{-1} [x_2, x_1, x_1, x_3]^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot [x_3, x_1, [x_2, x_1]]^2 [x_2, x_1, x_1, x_3]^{-1} [x_3, x_1, x_1, x_2] = \\ &= [x_3, x_1, [x_2, x_1]]^3 [x_3, x_1, x_1, x_2] [x_2, x_1, x_1, x_3]^{-3} = v_{11} \in N. \end{aligned}$$

В фиксированную запись h в степени $k_1^2 k_2 m_3$ входит элемент

$$h_6 = [x_1, x_3, x_2, x_1] [x_1, x_3, x_1, x_2] [x_2, x_3, x_1, x_1].$$

Используя (12) и (15), получаем, что

$$\begin{aligned} h_6 &= [x_3, x_1, [x_2, x_1]]^{-1} [x_3, x_1, x_1, x_2]^{-1} [x_3, x_1, x_1, x_2]^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot [x_3, x_1, [x_2, x_1]]^{-2} [x_2, x_1, x_1, x_3] [x_3, x_1, x_1, x_2]^{-1} = \\ &= [x_3, x_1, [x_2, x_1]]^{-3} [x_3, x_1, x_1, x_2]^{-3} [x_2, x_1, x_1, x_3] = v_{12} \in N. \end{aligned}$$

Теперь легко заметить, что

$$h = h_1^{k_1 k_3^2 m_2} h_2^{k_1 k_2 k_3 m_2} h_3^{k_1 k_2 k_3 m_3} h_4^{k_1 k_2^2 m_3} h_5^{k_1^2 k_3 m_2} h_6^{k_1^2 k_2 m_3} t,$$

где t — подходящее произведение коммутаторов веса 4 от двух переменных. Так как все базисные коммутаторы веса 4 от двух переменных содержатся в N , то $t \in N$. Отсюда $h \in N$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Всякая 2-порождённая подгруппа H группы $G = F/N_0$ принадлежит \mathcal{N}_3 .*

Доказательство. Из пар порождающих группы H выберем пару g_1N_0, g_2N_0 ($g_1 = x_3^{m_3}x_2^{m_2}x_1^{m_1}c_1, g_2 = x_3^{k_3}x_2^{k_2}x_1^{k_1}c_2, c_1, c_2 \in G'$) с наименьшим положительным k_1 . Если $k_1 \neq 0$, то легко заметить, что m_1 делится на k_1 . В этом случае рассматриваем пару порождающих $g_1g_2^{-\frac{m_1}{k_1}}N_0, g_2N_0$. Из вышесказанного следует, что можно считать, что $H = \langle g_1N_0, g_2N_0 \rangle$, где $g_1 = x_3^{m_3}x_2^{m_2}c_1, g_2 = x_3^{k_3}x_2^{k_2}x_1^{k_1}c_2, c_1, c_2 \in G'$. По лемме 17.2.1 [18] $\gamma_4(H)$ порождается простыми коммутаторами от g_1N_0, g_2N_0 веса 4, которые в свою очередь выражаются через базисные коммутаторы от g_1N_0, g_2N_0 веса 4. По леммам 3 – 5 значения базисных коммутаторов веса 4 от двух переменных на g_1N_0, g_2N_0 равны единице, следовательно, $\gamma_4(H) = \langle 1 \rangle$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть \mathcal{N} — квазимногообразие всех нильпотентных групп ступени не выше 3 без элементов второго порядка. Тогда класс $L_2(\mathcal{N})$ содержит неметабелеву группу.*

Доказательство. Рассмотрим группу $G = F/N_0$. По следствию 1 группа G не является метабелевой. Покажем, что $G \in L_2(\mathcal{N})$. Сначала отметим, что поскольку N_0 — изолятор подгруппы N , то G — группа без кручения.

Пусть H — произвольная 2-порождённая подгруппа группы G . Всякий элемент из H^G можно записать в виде hc , где $h \in H, c \in G'$. Возьмём любые элементы $h_1c_1, h_2c_2, h_3c_3, h_4c_4$ ($h_i \in H, c_i \in G'$) из H^G . Так как $G \in \mathcal{N}_4$, то из линейности коммутаторов веса 4 в G и нильпотентности ступени не выше трёх группы H (лемма 6) получаем

$$[h_1c_1, h_2c_2, h_3c_3, h_4c_4] = [h_1, h_2, h_3, h_4] = 1,$$

следовательно, тождество $[x, y, z, u] = 1$ истинно в H^G . Таким образом, $H^G \in \mathcal{N}$, значит $G \in L_2(\mathcal{N})$. Теорема доказана.

В заключение хочу выразить благодарность Лодейщиковой Виктории и Шаховой Светлане за внимательное прочтение этой работы и полезные замечания.

References

- [1] L.C. Kappe, *On Levi-formations*, Arch. Math., **23** (1972), 561–572. Zbl 0252.20030
- [2] F.M. Levi, *Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions*, J. Indian Math. Soc. (N.S.), **6** (1942), 87–97. MR0007417
- [3] R.F. Morse, *Levi-properties generated by varieties*, Contemp. Math., **169**, AMS, Providence, 1994, 467–474. Zbl 0818.20023
- [4] A.I. Budkin, *Levi quasivarieties*, Sib. Math. J., **40:2** (1999), 225–228. Zbl 0930.20028
- [5] A.I. Budkin, L.V. Taranina, *On Levi quasivarieties generated by nilpotent groups*, Sib. Math. J., **41:2** (2000), 218–223. Zbl 0956.20015

- [6] A.I. Budkin, *Levi classes generated by nilpotent groups*, Algebra Logic, **39**:6 (2000), 363–369. Zbl 0973.20020
- [7] V.V. Lodeishchikova, *Levi quasivarieties generated by nilpotent groups*, Izv. Altaĭ. Gos. Univ., Ser. Mat. Inform. Fiz., **61**:1 (2009), 26–29. Zbl 1374.20039
- [8] V.V. Lodeishchikova, *The Levi classes generated by nilpotent groups*, Sib. Math. J., **51**:6 (2010), 1075–1080. Zbl 1228.20021
- [9] V.V. Lodeishchikova, *Levi quasivarieties of exponent p^s* , Algebra Logic, **50**:1 (2011), 17–28. Zbl 1266.20040
- [10] V.V. Lodeishchikova, *A Levi class generated by a quasivariety of nilpotent groups*, Algebra Logic, **58**:4 (2019), 327–336. Zbl 1443.20042
- [11] S.A. Shakhova, *The axiomatic rank of Levi classes*, Algebra Logic, **57**:5 (2018), 381–391. Zbl 1406.20035
- [12] S.A. Shakhova, *The axiomatic rank of the Levi class generated by the almost abelian quasivariety of nilpotent groups*, Lobachevskii J. Math., **41**:9 (2020), 1680–1683. Zbl 1486.20032
- [13] S.A. Shakhova, *Levi classes of quasivarieties of groups with commutator subgroup of order p* , Algebra Logic, **60**:5 (2021), 336–347. Zbl 1495.20033
- [14] V.V. Lodeishchikova, S.A. Shakhova, *Levi classes of quasivarieties of nilpotent groups of exponent p^s* , Algebra Logic, **61**:1 (2022), 54–66. Zbl 1515.20136
- [15] A.I. Budkin, *The operator L_n on quasivarieties of universal algebras*, Sib. Math. J., **60**:4 (2019), 565–571. Zbl 1475.08002
- [16] A.I. Budkin, *Groups with restrictions on normal subgroups*, Algebra Logic, **63**:1 (2024), 1–9. Zbl 1560.20078
- [17] H. Neumann, *Varieties of groups*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1967. Zbl 0251.20001
- [18] M.I. Kargapolov, Yu.I. Merzlyakov, *Fundamentals of the theory of groups*, Springer-Verlag, New York etc., 1979. Zbl 0549.20001
- [19] M. Hall, *The theory of groups*, The Macmillan Company, New York, 1959. Zbl 1381.20002

ALEXANDR IVANOVICH BUDKIN
ALTAI STATE UNIVERSITY,
PR. LENINA, 61,
656049, BARNAUL, RUSSIA
Email address: budkin@math.asu.ru