S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

*Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023)* УДК 512.54
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 20E10

# О ГРУППАХ, НОРМАЛЬНЫЕ ЗАМЫКАНИЯ 2-ПОРОЖДЕННЫХ ПОДГРУПП КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ 3-НИЛЬПОТЕНТНЫМИ

**А.И. Будкин**

*Представлено* П.П. Петровым

**Abstract:** In this paper, we continue to study groups whose normal closure of each 2-generated subgroup is a nilpotent group. It is proved that there exists a non-metabelian group without elements of order 2, the normal closure of each 2-generated subgroup of which is a nilpotent group of class no more than 3.

**Keywords:** nilpotent group, metabelian group, normal closure of a subgroup, Levy class, variety, quasivariety.

## 1 Введение

Покрытием группы $G$ назовём всякую систему подгрупп этой группы, теоретико-множественное объединение которых совпадает с $G$. Исследование влияния свойств покрытия на строение самой группы — одна из интересных задач, в рамках которой выполнена данная работа.

Пусть $\mathcal{M}$ — класс групп, тогда через $L_n(\mathcal{M})$ будем обозначать класс всех групп $G$, в которых нормальное замыкание $\langle g_1, \dots, g_n\rangle^G$ любой $n$-порождённой подгруппы $\langle g_1, \dots, g_n\rangle$ группы $G$ принадлежит $\mathcal{M}$.

Как обычно, $\mathcal{N}_c$ — многообразие нильпотентных групп ступени не выше $c$, $\mathcal{A}^2$ — многообразие метабелевых групп (т.е. групп с абелевым коммутантом), $q\mathcal{K}$ — квазимногообразие, порождённое классом групп

Budkin, A.I., On groups whose normal closure of 2-generated subgroups are 3-nilpotent.



*Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.*

$\mathcal{K}$. Квазимногообразие называется нильпотентным, если все группы в нём нильпотентные.

Класс $L_1(\mathcal{M})$ групп называется классом Леви, порождённым $\mathcal{M}$. Впервые классы Леви были введены в [1] под влиянием работы Леви [2], в которой исследовались группы с абелевыми подгруппами вида $\langle x\rangle^G$. В [3] доказано, что если класс $\mathcal{M}$ является многообразием, то $L_1(\mathcal{M})$ — также многообразие групп, а в [4] установлено, что если $\mathcal{M}$ — квазимногообразие, то $L_1(\mathcal{M})$ — снова квазимногообразие групп. Это привело в дальнейшем к исследованию классов $L_1(\mathcal{M})$ для многообразий и квазимногообразий групп.

В настоящее время классы Леви активно изучаются. Особое внимание здесь уделяется нильпотентным квазимногообразиям $\mathcal{M}$ групп [4]–[6]. Основным результатом работ [4] и [5] явилась теорема, в которой найдены условия на произвольное множество $\mathcal{K}$ групп из $\mathcal{N}_2$, при выполнении которых $L_1(q\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{N}_3$. В [7]–[10] описаны классы Леви почти абелевых квазимногообразий нильпотентных групп, т.е. неабелевых квазимногообразий групп, все собственные подквазимногообразия которых абелевы. Вопросы аксиоматизируемости классов Леви нильпотентных квазимногообразий групп изучались в [11]–[14].

Оператор $L_n$ для каждого натурального числа $n$ был введён в [15]. Оказалось [15], если $\mathcal{M}$ — квазимногообразие (многообразие) групп, то $L_n(\mathcal{M})$ — снова квазимногообразие (многообразие) групп.

В [16] установлено, что для класса $\mathcal{N}$ нильпотентных групп ступени не выше трёх без элементов второго порядка справедливо включение: $L_2(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}_4$. Здесь же показано, что в последнем утверждении ограничение на элементы второго порядка убрать нельзя, в частности, класс $L_2(\mathcal{N}_3)$ не является нильпотентным.

В [16] доказано, что если $\mathcal{N}$ — класс нильпотентных групп ступени не выше трёх без элементов второго порядка, то $L_2(\mathcal{N}) \cap \mathcal{A}^2 = \mathcal{N}$. Возникает естественный вопрос: $L_2(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{A}^2$? В данной работе доказано, что квазимногообразие $L_2(\mathcal{N})$ содержит неметабелеву группу, в частности, $L_2(\mathcal{N}) \nsubseteq \mathcal{N}_3$.

## 2 Предварительные сведения

В работе используются следующие обозначения:

$[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y$, $[x,y,\dots,z,u] = [[x,y,\dots,z],u]$;

$\langle x,y,\dots\rangle$ — группа, порожденная элементами $x,y,\dots$; $\langle x\rangle$ — циклическая группа, порожденная $x$;

$\langle g_1,\dots,g_n\rangle^G = \langle g^{-1}g_1g,\dots,g^{-1}g_ng \mid g\in G\rangle$ — нормальное замыкание подгруппы $\langle g_1,\dots,g_n\rangle$ в $G$;

$\gamma_1(G) = G, \gamma_2(G) = [G,G],\dots,\gamma_n(G) = [\gamma_{n-1}(G),G]$;

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.

Если $H$ — подгруппа группы $G$, то $IsH = \{g\in G \mid (\exists n)(n\in\mathbb{Z}\ \&\ n\neq 0\ \&\ g^n\in H)\}$ — изолятор подгруппы $H$ в $G$.

Стандартным образом определяем вес $w(a)$ коммутатора, считая, что

1) $w(x) = 1$, если $x$ — предметная переменная,

2) $w(a) = w(u) + w(v)$, если $a = [u, v]$.

$[x_3, x_2, x_2, x_2], [x_3, x_2, x_2, x_3], [x_3, x_2, x_3, x_3],$
$[x_3, x_1, x_1, x_1], [x_3, x_1, x_1, x_2], [x_3, x_1, x_1, x_3]$
$[x_3, x_1, x_2, x_2], [x_3, x_1, x_2, x_3]$
$[x_3, x_1, x_3, x_3], [x_2, x_1, x_1, x_1], [x_2, x_1, x_1, x_2], [x_2, x_1, x_1, x_3],$
$[x_2, x_1, x_2, x_2], [x_2, x_1, x_2, x_3], [x_2, x_1, x_3, x_3],$
$[x_3, x_2, [x_3, x_1]], [x_3, x_2, [x_2, x_1]], [x_3, x_1, [x_2, x_1]]$
— это все базисные коммутаторы веса 4 в переменных $x_1, x_2, x_3$.

Слова

$\gamma_1(x_1) = x_1,\ \gamma_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = [\gamma_n(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}],\ \ n = 1, 2, \ldots,$
называются простыми коммутаторами.

При написании тождеств кванторы всеобщности будем опускать.

Нам потребуются следующие хорошо известные коммутаторные тождества и тождество Витта ([17], теорема 33.34), истинные в каждой группе:

$$[xy, z] = [x, z]^y [y, z], \tag{1}$$

$$[x, yz] = [x, z][x, y]^z, \tag{2}$$

$$[x, yzt] = [x, t][x, z]^t [x, y]^{zt}, \tag{3}$$

$$[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1. \tag{4}$$

Будем пользоваться линейностью коммутаторов веса 4 в 4-ступенно нильпотентных группах, т.е. истинностью в них тождеств:

$$\begin{gathered}
[xy, z, t, u] = [x, z, t, u][y, z, t, u], \\
[z, xy, t, u] = [z, x, t, u][x, y, t, u], \\
[t, z, xy, u] = [t, z, x, u][t, z, y, u], \\
[u, z, t, xy] = [u, z, t, x][u, z, t, y].
\end{gathered}$$

Отметим, что из вышеупомянутых тождеств тождеств следует, что в 4-ступенно нильпотентных группах истинны тождества:

$$\begin{gathered}
[[x, y], [z, t]^{-1}] = [[x, y], [z, t]]^{-1}, \\
[[x, y, z]^{-1}, t] = [x, y, z, t]^{-1}, \\
[x^m, y^k, z^s, t^l] = [x, y, z, t]^{mkst}\ (m, k, s, t \in \mathbb{Z}), \\
[[x, y, z][y, z, x][z, x, y], t] = 1, \\
[[x, y, z], t] = [[y, z, x][z, x, y], t]^{-1},
\end{gathered} \tag{5}$$

которыми мы будем часто пользоваться.

С основными понятиями и определениями можно познакомиться в [17, 18, 19].

## 3 Основной результат

Пусть $F$ — свободная 4-нильпотентная группа со свободными порождающими $x_1, x_2, x_3$; $N$ — её подгруппа, порождённая элементами $u_1, \dots, u_9$, $v_1, \dots, v_{12}$ (эти элементы — произведения некоторых базисных коммутаторов), где

$u_1 = [x_2, x_1, x_1, x_1], u_2 = [x_2, x_1, x_1, x_2], u_3 = [x_2, x_1, x_2, x_2],$
$u_4 = [x_3, x_1, x_1, x_1], u_5 = [x_3, x_1, x_1, x_3], u_6 = [x_3, x_1, x_3, x_3],$
$u_7 = [x_3, x_2, x_2, x_2], u_8 = [x_3, x_2, x_2, x_3], u_9 = [x_3, x_2, x_3, x_3],$
$v_1 = [x_3, x_1, x_2, x_3]^{-2}[x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1}[x_3, x_2, [x_3, x_1]],$
$v_2 = [x_2, x_1, x_2, x_3]^{-2}[x_3, x_1, x_2, x_2]^{-1}[x_3, x_2, [x_2, x_1]],$
$v_3 = [x_3, x_2, [x_3, x_1]][x_2, x_1, x_3, x_3]^{-2},$
$v_4 = [x_3, x_2, [x_2, x_1]][x_3, x_1, x_2, x_2]^2,$
$v_5 = [x_2, x_1, x_1, x_3][x_3, x_1, x_1, x_2],$
$v_6 = [x_3, x_1, x_2, x_3]^{-2}[x_2, x_1, x_3, x_3],$
$v_7 = [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^2[x_2, x_1, x_2, x_3]^{-2}[x_3, x_1, x_2, x_2],$
$v_8 = [x_3, x_2, [x_3, x_1]][x_3, x_1, x_2, x_3]^2[x_2, x_1, x_3, x_3]^{-3},$
$v_9 = [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^2[x_2, x_1, x_2, x_3]^{-2}[x_3, x_1, x_2, x_2],$
$v_{10} = [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^{-3}[x_2, x_1, x_2, x_3]^2[x_3, x_1, x_2, x_2]^{-3},$
$v_{11} = [x_3, x_1, [x_2, x_1]]^3[x_2, x_1, x_1, x_3]^{-3}[x_3, x_1, x_1, x_2],$
$v_{12} = [x_3, x_1, [x_2, x_1]]^{-3}[x_3, x_1, x_1, x_2]^{-3}[x_2, x_1, x_1, x_3],$
$N_0$ — изолятор $N$ в $F_3$.

**Лемма 1.** $\langle [x_3, x_1, [x_2, x_1]] \rangle \cap N_0 = \langle 1 \rangle$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда $[x_3, x_1, [x_2, x_1]]^m \in N$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$. Тогда для подходящих $k_1, \dots, k_9, m_1, \dots, m_{12} \in \mathbb{Z}$ имеем:

$$u_1^{k_1} \dots u_9^{k_9} v_1^{m_1} \dots v_{12}^{m_{12}} = [x_3, x_1, [x_2, x_1]]^m.$$

Элемент $[x_2, x_1, x_1, x_3]$ входит в левую часть этого равенства с суммой показателей, равной $m_5 - 3m_{11} + m_{12}$, элемент $[x_3, x_1, x_1, x_2]$ — с суммой показателей $m_5 + m_{11} - 3m_{12}$, элемент $[x_3, x_1, [x_2, x_1]]$ — с суммой показателей $3m_{11} - 3m_{12}$. Из однозначности представления элемента $[x_3, x_1, [x_2, x_1]]$ в виде произведения базисных коммутаторов в свободной 4-нильпотентной группе получаем равенства:

$m_5 - 3m_{11} + m_{12} = 0,$
$m_5 + m_{11} - 3m_{12} = 0,$
$3m_{11} - 3m_{12} = m,$

откуда легко следует, что $m_{11} - m_{12} = 0$, т.е. $m = 0$. Противоречие. Лемма доказана.

**Следствие 1.** *Группа $G = F/N_0$ не является метабелевой.*

В следующей лемме некоторые коммутаторы представлены в $F$ в виде произведения базисных коммутаторов. Несомненно, эти формулы можно получить, используя хорошо известный собирательный процесс. Тем не менее, мы приведём подробный, менее громоздкий вывод этих формул.

**Лемма 2.** *В любой нильпотентной группе $A$ ступени 4 истинны следующие тождества:*

$$[x_1,x_2,x_3,x_2]=[x_3,x_2,[x_2,x_1]][x_2,x_1,x_2,x_3]^{-1}, \tag{6}$$

$$[x_1,x_3,x_3,x_2]=[x_3,x_1,x_2,x_3]^{-1}[x_3,x_2,[x_3,x_1]], \tag{7}$$

$$[x_3,x_2,x_3,x_1]=[x_3,x_1,[x_3,x_2]]^{-1}[x_2,x_1,x_3,x_3]^{-1}[x_3,x_1,x_2,x_3], \tag{8}$$

$$[x_2,x_1,x_3,x_2]=[x_3,x_2,[x_2,x_1]]^{-1}[x_2,x_1,x_2,x_3], \tag{9}$$

$$[x_2,x_3,x_2,x_1]=[x_3,x_2,[x_2,x_1]]^{-2}[x_3,x_1,x_2,x_2]^{-1}[x_2,x_1,x_2,x_3], \tag{10}$$

$$[x_1,x_2,x_3,x_1]=[x_2,x_1,x_1,x_3]^{-1}[x_3,x_1,[x_2,x_1]], \tag{11}$$

$$[x_1,x_3,x_2,x_1]=[x_3,x_1,[x_2,x_1]]^{-1}[x_3,x_1,x_1,x_2]^{-1}, \tag{12}$$

$$[x_3,x_2,x_1,x_3]=[x_2,x_1,x_3,x_3]^{-1}[x_3,x_1,x_2,x_3], \tag{13}$$

$$[x_3,x_2,x_1,x_2]=[x_3,x_2,[x_2,x_1]][x_2,x_1,x_2,x_3]^{-1}[x_3,x_1,x_2,x_2], \tag{14}$$

$$[x_3,x_2,x_1,x_1]=[x_3,x_1,[x_2,x_1]]^2[x_2,x_1,x_1,x_3]^{-1}[x_3,x_1,x_1,x_2]. \tag{15}$$

Доказательство. Из (4), (5) и линейности коммутаторов получаем в $F$ следующие равенства (которые являются тождествами в $F$):

$$\begin{gathered}[x_1,x_2,x_3,x_2]=[x_3,x_2,[x_1,x_2]]^{-1}[x_2,[x_1,x_2],x_3]^{-1}=\\=[x_3,x_2,[x_2,x_1]][x_2,x_1,x_2,x_3]^{-1},\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}[x_1,x_3,x_3,x_2]=[x_3,x_2,[x_1,x_3]]^{-1}[x_2,[x_1,x_3],x_3]^{-1}=\\=[x_3,x_1,x_2,x_3]^{-1}[x_3,x_2,[x_3,x_1]],\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}[x_3,x_2,x_3,x_1]=[x_3,x_1,[x_3,x_2]]^{-1}[x_1,[x_3,x_2],x_3]^{-1}=\\=[x_3,x_1,[x_3,x_2]]^{-1}[x_3,x_2,x_1,x_3]=\\=[x_3,x_1,[x_3,x_2]]^{-1}[x_2,x_1,x_3,x_3]^{-1}[x_1,x_3,x_2,x_3]^{-1}=\\=[x_3,x_1,[x_3,x_2]]^{-1}[x_2,x_1,x_3,x_3]^{-1}[x_3,x_1,x_2,x_3],\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}[x_2,x_1,x_3,x_2]=[x_3,x_2,[x_2,x_1]]^{-1}[x_2,[x_2,x_1],x_3]^{-1}=\\=[x_3,x_2,[x_2,x_1]]^{-1}[x_2,x_1,x_2,x_3].\end{gathered}$$

Заменим в (8) $x_2$ на $x_3$, $x_3$ на $x_2$. Получим следующее равенство:

$$[x_2, x_3, x_2, x_1] = [x_2, x_1, [x_2, x_3]]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_2]^{-1}[x_2, x_1, x_3, x_2].$$

Отсюда

$$[x_2, x_3, x_2, x_1] =$$
$$= [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_2]^{-1}[x_3, x_2, [x_2, x_1]]^{-1}[x_2, [x_2, x_1], x_3]^{-1} =$$
$$= [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^{-2}[x_3, x_1, x_2, x_2]^{-1}[x_2, x_1, x_2, x_3].$$

$$[x_1, x_3, x_2, x_1] = [x_2, x_1, [x_1, x_3]]^{-1}[x_1, [x_1, x_3], x_2]^{-1} =$$
$$= [x_3, x_1, [x_2, x_1]]^{-1}[x_3, x_1, x_1, x_2]^{-1}.$$

Получили тождество (12). Заменяя в (12) $x_2$ на $x_3$, $x_3$ на $x_2$, получаем тождество (11).

$$[x_3, x_2, x_1, x_3] = [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1}[x_1, x_3, x_2, x_3]^{-1} =$$
$$= [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_3].$$

$$[x_3, x_2, x_1, x_2] = [x_2, x_1, x_3, x_2]^{-1}[x_1, x_3, x_2, x_2]^{-1} =$$
$$= [x_3, x_2, [x_2, x_1]][x_2, x_1, x_2, x_3]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_2].$$

$$[x_3, x_2, x_1, x_1] = [x_2, x_1, x_3, x_1]^{-1}[x_1, x_3, x_2, x_1]^{-1} =$$
$$= [x_3, x_1, [x_2, x_1]][x_2, x_1, x_1, x_3]^{-1}[x_3, x_1, [x_2, x_1]][x_3, x_1, x_1, x_2] =$$
$$= [x_3, x_1, [x_2, x_1]]^2[x_2, x_1, x_1, x_3]^{-1}[x_3, x_1, x_1, x_2].$$

Лемма доказана.

**Лемма 3.** *Если* $g_1 = x_3^{m_3}x_2^{m_2}c_1, g_2 = x_3^{k_3}x_2^{k_2}x_1^{k_1}c_2 \in F_3$ $(c_1, c_2 \in F_3')$, *то* $[g_2, g_1, g_1, g_1] \in N$.

Доказательство. Пусть $h = [g_2, g_1, g_1, g_1]$. Ясно, что

$$h = [x_3^{k_3}x_2^{k_2}x_1^{k_1}, x_2^{m_2}x_3^{m_3}, x_2^{m_2}x_3^{m_3}, x_2^{m_2}x_3^{m_3}].$$

Используя линейность коммутаторов, несложно представить $h$ в виде произведения коммутаторов вида $[x_i, x_j, x_k, x_l]$. Видим, что в этой записи элемента $h$ присутствует элемент

$$h_1 = [x_1, x_2, x_2, x_3][x_1, x_2, x_3, x_2][x_1, x_3, x_2, x_2]$$

в степени $k_1m_2^2m_3$. Ввиду (6)

$$h_1 = [x_2, x_1, x_2, x_3]^{-1}[x_3, x_2, [x_2, x_1]][x_2, x_1, x_2, x_3]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_2]^{-1} =$$
$$= [x_3, x_2, [x_2, x_1]][x_2, x_1, x_2, x_3]^{-2}[x_3, x_1, x_2, x_2]^{-1} = v_2 \in N.$$

В нашу запись элемента $h$ в степени $k_1m_2m_3^2$ входит элемент

$$h_2 = [x_1, x_2, x_3, x_3][x_1, x_3, x_2, x_3][x_1, x_3, x_3, x_2].$$

Ввиду (7)

$$h_2 = [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_3]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_3]^{-1}[x_3, x_2, [x_3, x_1]] =$$
$$= [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_3]^{-2}[x_3, x_2, [x_3, x_1]] = v_1 \in N.$$

Отметим, что все базисные коммутаторы от любых двух переменных из множества $\{x_1, x_2, x_3\}$ веса 4 содержатся в $N$. Отсюда любой коммутатор от двух переменных из множества $\{x_1, x_2, x_3\}$ веса 4 содержатся в $N$. Так как

$$h = [x_3^{k_3}x_2^{k_2}, x_3^{m_3}x_2^{m_2}, x_3^{m_3}x_2^{m_2}, x_3^{m_3}x_2^{m_2}][x_1^{k_1}, x_2^{m_2}, x_2^{m_2}, x_2^{m_2}]\cdot$$
$$\cdot[x_1^{k_1}, x_3^{m_3}, x_3^{m_3}, x_3^{m_3}]h_1^{k_1m_2^2m_3}h_2^{k_1m_2m_3^2} = h_1^{k_1m_2^2m_3}h_2^{k_1m_2m_3^2}c,$$

где $c$ — подходящее произведение базисных коммутаторов от двух переменных из множества $\{x_1, x_2, x_3\}$ веса 4, то видим, что $h \in N$. Лемма доказана.

**Лемма 4.** *Если* $g_1 = x_3^{m_3}x_2^{m_2}c_1, g_2 = x_3^{k_3}x_2^{k_2}x_1^{k_1}c_2 \in F_3$ $(c_1, c_2 \in F_3')$, *то* $[g_2, g_1, g_1, g_2] \in N$.

Доказательство. Пусть $h = [g_2, g_1, g_1, g_2]$. Тогда

$$h = [x_3^{k_3}x_2^{k_2}x_1^{k_1}, x_3^{m_3}x_2^{m_2}, x_3^{m_3}x_2^{m_2}, x_3^{k_3}x_2^{k_2}x_1^{k_1}] =$$
$$= [x_3^{k_3}x_2^{k_2}, x_3^{m_3}x_2^{m_2}, x_3^{m_3}x_2^{m_2}, x_3^{k_3}x_2^{k_2}][x_1^{k_1}, x_3^{m_3}x_2^{m_2}, x_3^{m_3}x_2^{m_2}, x_1^{k_1}]\cdot$$
$$\cdot[x_1^{k_1}, x_3^{m_3}x_2^{m_2}, x_3^{m_3}x_2^{m_2}, x_3^{k_3}x_2^{k_2}][x_3^{k_3}x_2^{k_2}, x_3^{m_3}x_2^{m_2}, x_3^{m_3}x_2^{m_2}, x_1^{k_1}].$$

Используя линейность коммутаторов, зафиксируем запись $h$ в виде произведения коммутаторов вида $[x_i, x_j, x_k, x_l]$. Видим, что в эту запись $h$ в степени $k_1k_3m_2m_3$ входит элемент

$$h_1 = [x_1, x_2, x_3, x_3][x_1, x_3, x_2, x_3][x_3, x_2, x_3, x_1].$$

Ввиду (8)

$$h_1 = [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_3]^{-1}[x_3, x_1, [x_3, x_2]]^{-1}[x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1}\cdot$$
$$\cdot[x_3, x_1, x_2, x_3] = [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-2}[x_3, x_1, [x_3, x_2]]^{-1} = v_3 \in N.$$

В нашу запись $h$ в степени $k_1k_2m_2m_3$ входит элемент

$$h_2 = [x_1, x_2, x_3, x_2][x_1, x_3, x_2, x_2][x_2, x_3, x_2, x_1].$$

Ввиду (6) и (10)

$$h_2 = [x_3, x_2, [x_2, x_1]][x_2, x_1, x_2, x_3]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_2]^{-1}[x_3, x_2, [x_2, x_1]]^{-2}\cdot$$
$$\cdot[x_3, x_1, x_2, x_2]^{-1}[x_2, x_1, x_2, x_3] = [x_3, x_2, [x_2, x_1]]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_2]^{-2} = v_4^{-1} \in N.$$

В эту запись $h$ в степени $k_1^2m_2m_3$ входит элемент

$$h_3 = [x_1, x_2, x_3, x_1][x_1, x_3, x_2, x_1].$$

В силу (11) и (12)

$$h_3 = [x_2, x_1, x_1, x_3]^{-1}[x_3, x_1, [x_2, x_1]][x_3, x_1, [x_2, x_1]]^{-1}[x_3, x_1, x_1, x_2]^{-1} =$$
$$= [x_2, x_1, x_1, x_3]^{-1}[x_3, x_1, x_1, x_2]^{-1} = v_5^{-1} \in N.$$

В полученную запись $h$ в степени $k_1k_2m_3^2$ входит элемент

$$h_4 = [x_1, x_3, x_3, x_2][x_2, x_3, x_3, x_1].$$

Ввиду (7) и (8)

$$h_4 = [x_3, x_1, x_2, x_3]^{-1}[x_3, x_2, [x_3, x_1]][x_3, x_1, [x_3, x_2]]\cdot$$
$$\cdot[x_2, x_1, x_3, x_3][x_3, x_1, x_2, x_3]^{-1} = [x_3, x_1, x_2, x_3]^{-2}[x_2, x_1, x_3, x_3] = v_6 \in N.$$

В зафиксированную запись $h$ в степени $k_1k_3m_2^2$ входит элемент

$$h_5 = [x_1, x_2, x_2, x_3][x_3, x_2, x_2, x_1].$$

В силу (10)

$$h_5 = [x_2, x_1, x_2, x_3]^{-1}[x_3, x_2, [x_2, x_1]]^2[x_3, x_1, x_2, x_2]\cdot$$
$$\cdot[x_2, x_1, x_2, x_3]^{-1} = [x_2, x_1, x_2, x_3]^{-2}[x_3, x_2, [x_2, x_1]]^2[x_3, x_1, x_2, x_2] = v_7 \in N.$$

Видим, что

$h = h_1^{k_1k_3m_2m_3}h_2^{k_1k_2m_2m_3}h_3^{k_1^2m_2m_3}h_4^{k_1k_2m_3^2}h_5^{k_1k_3m_2^2}t,$
где $t$ — подходящее произведение коммутаторов веса 4 от двух переменных. Так как все базисные коммутаторы веса 4 от двух переменных содержатся в $N$, то $t \in N$. Отсюда $h \in N$. Лемма доказана.

**Лемма 5.** *Если* $g_1 = x_3^{m_3}x_2^{m_2}c_1, g_2 = x_3^{k_3}x_2^{k_2}x_1^{k_1}c_2 \in F_3$ $(c_1, c_2 \in F_3')$, *то* $[g_2, g_1, g_2, g_2] \in N$.

Доказательство. Пусть $h = [g_2, g_1, g_2, g_2]$. Тогда

$$h = [x_3^{k_3}x_2^{k_2}x_1^{k_1}, x_3^{m_3}x_2^{m_2}, x_3^{k_3}x_2^{k_2}x_1^{k_1}, x_3^{k_3}x_2^{k_2 2}x_1^{k_1}] =$$
$$= [x_3^{k_3}x_2^{k_2}, x_3^{m_3}x_2^{m_2}, x_3^{k_3}x_2^{k_2}, x_3^{k_3}x_2^{k_2}][x_1^{k_1}, x_3^{m_3}x_2^{m_2}, x_3^{k_3}x_2^{k_2}, x_1^{k_1}]\cdot$$
$$\cdot[x_1^{k_1}, x_3^{m_3}x_2^{m_2}, x_3^{k_3}x_2^{k_2}, x_3^{k_3}x_2^{k_2}][x_3^{k_3}x_2^{k_2}, x_3^{m_3}x_2^{m_2}, x_3^{k_3}x_2^{k_2}, x_1^{k_1}]\cdot$$
$$\cdot[x_3^{k_3}x_2^{k_2}, x_3^{m_3}x_2^{m_2}, x_1^{k_1}, x_3^{k_3}x_2^{k_2}][x_1^{k_1}, x_3^{m_3}x_2^{m_2}, x_1^{k_1}, x_1^{k_1}]\cdot$$
$$\cdot[x_1^{k_1}, x_3^{m_3}x_2^{m_2}, x_1^{k_1}, x_3^{k_3}x_2^{k_2}][x_3^{k_3}x_2^{k_2}, x_3^{m_3}x_2^{m_2}, x_1^{k_1}, x_1^{k_1}].$$

Фиксируем запись $h$ в виде произведения коммутаторов вида $[x_i, x_j, x_k, x_l]$. В эту запись элемента $h$ в степени $k_1k_3^2m_2$ входит элемент

$$h_1 = [x_1, x_2, x_3, x_3][x_3, x_2, x_3, x_1][x_3, x_2, x_1, x_3].$$

Ввиду (8) и (13)

$$h_1 = [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1}[x_3, x_1, [x_3, x_2]]^{-1}[x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1}\cdot$$
$$\cdot[x_3, x_1, x_2, x_3][x_2, x_1, x_3, x_3]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_3] =$$
$$= [x_2, x_1, x_3, x_3]^{-3}[x_3, x_1, [x_3, x_2]]^{-1}[x_3, x_1, x_2, x_3]^2 = v_8 \in N.$$

В рассматриваемую запись $h$ в степени $k_1k_2k_3m_2$ входит элемент

$$h_2 = [x_1, x_2, x_2, x_3][x_1, x_2, x_3, x_2][x_3, x_2, x_2, x_1][x_3, x_2, x_1, x_2].$$

Ввиду (6), (10) и (14)

$$h_2 = [x_2, x_1, x_2, x_3]^{-1}[x_3, x_2, [x_2, x_1]][x_2, x_1, x_2, x_3]^{-1}\cdot$$

$$\cdot[x_3,x_2,[x_2,x_1]]^2[x_3,x_1,x_2,x_2][x_2,x_1,x_2,x_3]^{-1}\cdot$$
$$\cdot[x_3,x_2,[x_2,x_1]][x_2,x_1,x_2,x_3]^{-1}[x_3,x_1,x_2,x_2]=$$
$$=[x_2,x_1,x_2,x_3]^{-4}[x_3,x_2,[x_2,x_1]]^4[x_3,x_1,x_2,x_2]^2=v_9^2\in N.$$

В нашу запись $h$ в степени $k_1k_2k_3m_3$ входит элемент

$$h_3=[x_1,x_3,x_2,x_3][x_1,x_3,x_3,x_2][x_2,x_3,x_3,x_1][x_2,x_3,x_1,x_3].$$

В силу (7), (8) и (13)

$$h_3=[x_3,x_1,x_2,x_3]^{-1}[x_3,x_1,x_2,x_3]^{-1}[x_3,x_2,[x_3,x_1]]\cdot$$
$$\cdot[x_3,x_1,[x_3,x_2]][x_2,x_1,x_3,x_3][x_3,x_1,x_2,x_3]^{-1}[x_2,x_1,x_3,x_3][x_3,x_1,x_2,x_3]^{-1}=$$
$$=[x_3,x_1,x_2,x_3]^{-4}[x_2,x_1,x_3,x_3]^2=v_6^2\in N.$$

В $h$ в степени $k_1k_2^2m_3$ входит элемент

$$h_4=[x_1,x_3,x_2,x_2][x_2,x_3,x_2,x_1][x_2,x_3,x_1,x_2].$$

Ввиду (10) и (14)

$$h_4=[x_3,x_1,x_2,x_2]^{-1}[x_3,x_2,[x_2,x_1]]^{-2}[x_3,x_1,x_2,x_2]^{-1}[x_2,x_1,x_2,x_3]\cdot$$
$$\cdot[x_3,x_2,[x_2,x_1]]^{-1}[x_2,x_1,x_2,x_3][x_3,x_1,x_2,x_2]^{-1}=$$
$$=[x_3,x_1,x_2,x_2]^{-3}[x_3,x_2,[x_2,x_1]]^{-3}[x_2,x_1,x_2,x_3]^2=v_{10}\in N.$$

В запись $h$ в степени $k_1^2k_3m_2$ входит элемент

$$h_5=[x_1,x_2,x_3,x_1][x_1,x_2,x_1,x_3][x_3,x_2,x_1,x_1].$$

В силу (11) и (15)

$$h_5=[x_3,x_1,[x_2,x_1]][x_2,x_1,x_1,x_3]^{-1}[x_2,x_1,x_1,x_3]^{-1}\cdot$$
$$\cdot[x_3,x_1,[x_2,x_1]]^2[x_2,x_1,x_1,x_3]^{-1}[x_3,x_1,x_1,x_2]=$$
$$=[x_3,x_1,[x_2,x_1]]^3[x_3,x_1,x_1,x_2][x_2,x_1,x_1,x_3]^{-3}=v_{11}\in N.$$

В фиксированную запись $h$ в степени $k_1^2k_2m_3$ входит элемент

$$h_6=[x_1,x_3,x_2,x_1][x_1,x_3,x_1,x_2][x_2,x_3,x_1,x_1].$$

Используя (12) и (15), получаем, что

$$h_6=[x_3,x_1,[x_2,x_1]]^{-1}[x_3,x_1,x_1,x_2]^{-1}[x_3,x_1,x_1,x_2]^{-1}\cdot$$
$$\cdot[x_3,x_1,[x_2,x_1]]^{-2}[x_2,x_1,x_1,x_3][x_3,x_1,x_1,x_2]^{-1}=$$
$$=[x_3,x_1,[x_2,x_1]]^{-3}[x_3,x_1,x_1,x_2]^{-3}[x_2,x_1,x_1,x_3]=v_{12}\in N.$$

Теперь легко заметить, что

$h=h_1^{k_1k_3^2m_2}h_2^{k_1k_2k_3m_2}h_3^{k_1k_2k_3m_3}h_4^{k_1k_2^2m_3}h_5^{k_1^2k_3m_2}h_6^{k_1^2k_2m_3}t,$

где $t$ — подходящее произведение коммутаторов веса 4 от двух переменных. Так как все базисные коммутаторы веса 4 от двух переменных содержатся в $N$, то $t\in N$. Отсюда $h\in N$. Лемма доказана.

**Лемма 6.** *Всякая 2-порождённая подгруппа $H$ группы $G=F/N_0$ принадлежит $\mathcal{N}_3$.*

Доказательство. Из пар порождающих группы $H$ выберем пару $g_1N_0$, $g_2N_0$ ($g_1 = x_3^{m_3}x_2^{m_2}x_1^{m_1}c_1, g_2 = x_3^{k_3}x_2^{k_2}x_1^{k_1}c_2,\ c_1, c_2 \in G'$) с наименьшим положительным $k_1$. Если $k_1 \neq 0$, то легко заметить, что $m_1$ делится на $k_1$. В этом случае рассматриваем пару порождающих $g_1 g_2^{-\frac{m_1}{k_1}} N_0$, $g_2N_0$. Из вышесказанного следует, что можно считать, что $H = \langle g_1N_0, g_2N_0\rangle$, где $g_1 = x_3^{m_3}x_2^{m_2}c_1, g_2 = x_3^{k_3}x_2^{k_2}x_1^{k_1}c_2,\ c_1, c_2 \in G'$. По лемме 17.2.1 [18] $\gamma_4(H)$ порождается простыми коммутаторами от $g_1N_0, g_2N_0$ веса 4, которые в свою очередь выражаются через базисные коммутаторы от $g_1N_0, g_2N_0$ веса 4. По леммам 3 – 5 значения базисных коммутаторов веса 4 от двух переменных на $g_1N_0, g_2N_0$ равны единице, следовательно, $\gamma_4(H) = \langle 1\rangle$. Лемма доказана.

**Теорема 1.** *Пусть $\mathcal{N}$ — квазимногообразие всех нильпотентных групп ступени не выше 3 без элементов второго порядка. Тогда класс $L_2(\mathcal{N})$ содержит неметабелеву группу.*

Доказательство. Рассмотрим группу $G = F/N_0$. По следствию 1 группа $G$ не является метабелевой. Покажем, что $G \in L_2(\mathcal{N})$. Сначала отметим, что поскольку $N_0$ — изолятор подгруппы $N$, то $G$ — группа без кручения.

Пусть $H$ — произвольная 2-порождённая подгруппа группы $G$. Всякий элемент из $H^G$ можно записать в виде $hc$, где $h \in H, c \in G'$. Возьмём любые элементы $h_1c_1, h_2c_2, h_3c_3, h_4c_4$ ($h_i \in H, c_i \in G'$) из $H^G$. Так как $G \in \mathcal{N}_4$, то из линейности коммутаторов веса 4 в $G$ и нильпотентности ступени не выше трёх группы $H$ (лемма 6) получаем

$$[h_1c_1, h_2c_2, h_3c_3, h_4c_4] = [h_1, h_2, h_3, h_4] = 1,$$

следовательно, тождество $[x, y, z, u] = 1$ истинно в $H^G$. Таким образом, $H^G \in \mathcal{N}$, значит $G \in L_2(\mathcal{N})$. Теорема доказана.

В заключение хочу выразить благодарность Лодейщиковой Виктории и Шаховой Светлане за внимательное прочтение этой работы и полезные замечания.

## References


[1] L.C. Kappe, *On Levi-formations*, Arch. Math., **23** (1972), 561–572.

[2] F.M. Levi, *Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions*, J. Indian Math. Soc., **6** (1942), 87–97.

[3] R.F. Morse, *Levi-Properties Generated by Varieties*, Contemporary Math., **169** (1994), 467–474.

[4] A.I. Budkin, *Levi quasivarieties*, Sib. Math. J., **40**:2 (1999), 225–228.

[5] A.I. Budkin, L.V. Taranina, *On Levi quasivarieties generated by nilpotent groups*, Sib. Math. J., **41**:2 (2000), 218—223.

[6] A.I. Budkin, *Levi Classes Generated by Nilpotent Groups*, Algebra and Logic, **39**:6 (2000), 363–369.

[7] V.V. Lodeishchikova, *Levi quasivarieties generated by nilpotent groups*, Izv. Altay State Univ., **61**:1 (2009), 26–29.

[8] V.V. Lodeyshchikova, *The Levi classes generated by nilpotent groups*, Sib. Math. J., **51**:6 (2010), 1075–1080.
[9] V.V. Lodeishchikova, *Levi quasivarieties of exponent $p^s$*, Algebra and Logic, **50**:1 (2011), 17–28.
[10] V.V. Lodeishchikova, *A Levi Class Generated by a Quasivariety of Nilpotent Groups*, Algebra and Logic, **58**:4 (2019), 327–336.
[11] S.A. Shakhova, *The axiomatic rank of Levi classes*, Algebra and Logic, **57**:5 (2018), 381–391.
[12] S.A. Shakhova, *The Axiomatic Rank of the Levi Class Generated by the Almost Abelian Quasivarieties of Nilpotent Groups*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **17**:9 (2020), 1680–1683.
[13] S.A. Shakhova, *Levi Classes of Quasivarieties of Groups with Commutator Subgroup of Order $p$*, Algebra and Logic, **60**:5 (2021), 336–347.
[14] V.V. Lodeishchikova, S.A. Shakhova, *Levi Classes of Quasivarieties of Nilpotent Groups of Exponent $p^s$*, Algebra and Logic, **61**:1 (2022), 54–66.
[15] A.I. Budkin, *The Operator Ln on Quasivarieties of Universal Algebras*, Sib. Math. J., **60**:4 (2019), 565–571.
[16] A.I. Budkin, *Groups with Restrictions on Normal Subgroups*. Algebra and Logic, **63**: 1 (2024), 1–9.
[17] H. Neumann, *Varieties of groups*, Springer, New York, Heidelberg, and Berlin (1967). Zbl 0251.20001
[18] M.I. Kargapolov, Yu.I. Merzlyakov, *Foundations of Group Theory*, Springer-Verlag, New York etc., 1979. Zbl 0549.20001
[19] M. Hall, *The theory of groups*, The Macmillan Company, New York, 1959. Zbl 1381.20002

Alexandr Ivanovich Budkin
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
*Email address*: budkin@math.asu.ru