Закон повторного логарифма в форме Штрассена для винеровского процесса заданного на полуоси

Е.В. Ефремов, А.В. Логачев

УДК 519.214
MSC 60F15

Abstract. For a Wiener process defined on the half-axis we prove a version of Strassen's law of iterated logarithm in the space of continuous functions with weighted sup – metric. We consider weight functions of the form $1/(1+t^{\alpha})$, where $\alpha > 1/2$. The result is unimprovable in the class of power weight functions.

Keywords: Wiener process, Strassen's law of iterated logarithm.

1 Введение, формулировка основного результата

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ задан винеровский процесс $w(t)$, $t \geqslant 0$. Нас будет интересовать предельное поведение последовательность случайных процессов

$$w_n(t) = \frac{w(nt)}{\sqrt{n}\varphi(n)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\varphi(n) := \sqrt{2 \ln \ln(3 \vee n)}$. Заметим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ случайный процесс $\tilde{w}(t) = w(nt)/\sqrt{n}$ также является винеровским процессом.

Мы будем рассматривать траектории случайных процессов w_n в пространстве непрерывных на полуоси $[0, \infty)$ функций $\mathbb{C}$ с заданной sup – метрикой

$$\rho(f, g) = \rho_{\alpha}(f, g) := \sup_{t \geqslant 0} \frac{|f(t) - g(t)|}{1 + t^{\alpha}},$$

где $1/(1+t^{\alpha})$ — степенная весовая функция, $\alpha > \frac{1}{2}$ — фиксированная константа.

Будем обозначать $\mathbb{AC}_0[0, \infty)$, $\mathbb{AC}_0[0, T]$ множества функций, стартующих из нуля и абсолютно непрерывных на интервалах $[0, \infty)$, $[0, T]$, соответственно.

Определим заданный на полуоси шар Штрассена

$$K := \left\{ f \in \mathbb{AC}_0[0, \infty) : \int_0^{\infty} \dot{f}^2(s) ds \leqslant 1 \right\},$$

где $\dot{f}$ — производная в смысле абсолютной непрерывности.

Также определим шар Штрассена, заданный на $[0, T]$

$$K_T := \left\{ f \in \mathbb{AC}_0[0, T] : \int_0^{T} \dot{f}^2(s) ds \leqslant 1 \right\}.$$

Следующая теорема является основным результатом работы.

Теорема 1. *Для любого $\alpha > \frac{1}{2}$ множество предельных точек последовательности w_n в метрическом пространстве $\mathbb{C}$ п.н. совпадает с множеством K.*

Сделаем краткий обзор похожих результатов, полученных ранее. В работе [2, теорема 1.4.1] был рассмотрен случай, когда $\alpha = 1$ для многомерного винеровского процесса; в статье [3, теорема 3] эта теорема использовалась для доказательства закона повторного логарифма для винеровского процесса в форме Штрассена для малых времен. Работа [4, теорема 1] также посвящена случаю, когда $\alpha = 1$, но рассмотрен более общий класс нормирующих функций, чем $\varphi(n) = \sqrt{2 \ln \ln(3 \vee n)}$. Отметим, что способ доказательства в текущей работе значительно отличается от методов, предложенных в статье [4]. Также упомянем работу [5], в ней получен принцип больших уклонений (основной инструмент доказательства закона повторного логарифма в форме Штрассена) для диффузионных процессов для случая, когда $\alpha \geqslant 1$.

Замечание 1. *В случае, когда $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, получить закон повторного логарифма в форме Штрассена не удастся, т.к. для таких α, в силу закона повторного логарифма в форме Хинчина, выполнено*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|\tilde{w}(t)|}{1+t^\alpha} \geqslant \limsup_{t\to\infty} \frac{|\tilde{w}(t)|}{1+\sqrt{t}} = \infty \quad \text{п.н.} \tag{1}$$

Также, в силу неравенства Коши – Буняковского, для любой $f \in K$ верна следующая оценка

$$|f(t)| \leqslant \int_0^t |\dot{f}(s)| ds \leqslant \sqrt{t} \left(\int_0^t \dot{f}^2(s) ds \right)^{1/2} \leqslant \sqrt{t}. \tag{2}$$

Используя формулы (1) и (2), можем заключить, что при любом $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ для любой функции $f \in K$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\begin{aligned} \rho_\alpha(w_n, f) &= \sup_{t\geqslant 0} \frac{|w_n(t) - f(t)|}{1+t^\alpha} \geqslant \sup_{t\geqslant 0} \left(\frac{|w_n(t)|}{1+t^\alpha} - \frac{|f(t)|}{1+t^\alpha} \right) \\ &\geqslant \sup_{t\geqslant 0} \left(\frac{|w_n(t)|}{1+t^\alpha} - \frac{\sqrt{t}}{1+t^\alpha} \right) = \sup_{t\geqslant 0} \frac{1+\sqrt{t}}{1+t^\alpha} \left(\frac{|w_n(t)|}{1+\sqrt{t}} - \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} \right) \\ &\geqslant \sup_{t\geqslant 0} \frac{1+\sqrt{t}}{1+t^\alpha} \left(\frac{|w_n(t)|}{1+\sqrt{t}} - 1 \right) = \infty \quad \text{п.н.} \end{aligned}$$

Таким образом, полученный результат является неулучшаемым в классе степенных весовых функций.

Введем еще несколько новых обозначений. Для фиксированного $T \in (0, \infty)$ пространство непрерывных функций на отрезке $[0, T]$ будем обозначать $\mathbb{C}[0, T]$. На этом пространстве зададим sup – метрику

$$\rho_T(f, g) := \sup_{t\in[0,T]} \frac{|f(t) - g(t)|}{1+t^\alpha},$$

где $\alpha > \frac{1}{2}$; и равномерную метрику

$$\rho_{T,U}(f, g) := \sup_{t\in[0,T]} |f(t) - g(t)|.$$

Оставшаяся часть работы состоит из двух разделов, посвященных доказательству основного результата и вспомогательным утверждениям, соответственно.

2 Доказательство основного результата

Доказательство. Разобьем доказательство на 2 шага.

Шаг 1. Докажем, что множество предельных точек последовательности w_n п.н. содержится в K. Для этого покажем, что для w_n п.н. выполнены условия леммы 2.

Из [1, приложение 8, теорема 4] и неравенства $\rho_T\left(w_{n_r(c)}, K_T\right) \leqslant \rho_{T,U}\left(w_{n_r(c)}, K_T\right)$ следует, что для любых $c > 1$, $T > 0$ выполнено равенство

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{r\to\infty} \rho_T\left(w_{n_r(c)}, K_T\right) = 0\right) = 1, \tag{3}$$

где $n_r(c) = \lfloor c^r \rfloor$. То есть п.н. выполнено условие 1) леммы 2.

Теперь покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T_\varepsilon > 0$ такое, что для любого $c > 1$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{r\to\infty}\left(\sup_{t\geqslant T_\varepsilon} \frac{\max\limits_{s\in[0,t]}\left|w_{n_r(c)}(s)\right|}{1+t^\alpha}\right) < \varepsilon\right) = 1. \tag{4}$$

Для $T > 0$ определим семейство событий

$$A_r := \left\{\sup_{t\geqslant T} \frac{\max\limits_{s\in[0,t]}\left|w_{n_r(c)}(s)\right|}{1+t^\alpha} \geqslant \varepsilon\right\}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Используя лемму 4, получаем оценку

$$\sum_{r=1}^{\infty}\mathbf{P}(A_r) \leqslant C(T,\varepsilon)\sum_{r=1}^{\infty} 2\exp\left\{\frac{-T^{2\alpha-1}\varphi^2(n_r(c))\varepsilon^2}{4}\right\} = C(T,\varepsilon)\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2}{(\ln(3\vee n_r(c)))^{T^{2\alpha-1}\varepsilon^2/2}},$$

из которой следует, что ряд $\sum\limits_{r=1}^{\infty}\mathbf{P}(A_r)$ сходится при

$$T_\varepsilon > \left(\frac{2}{\varepsilon^2}\right)^{1/(2\alpha-1)}.$$

Поэтому из леммы Бореля – Кантелли следует, что справедливо равенство (4), и следовательно п.н. выполнено условие 2) леммы 2.

Таким образом, п.н. выполнены все условия леммы 2 и мы можем заключить, что множество предельных точек последовательности w_n п.н. содержится в K.

Шаг 2. Осталось показать, что для любой функции $f \in K$ и п.в. $\omega \in \Omega$ найдется подпоследовательность $n_k(\omega)$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(w_{n_k(\omega)}, f) = 0$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем $T_{1,\varepsilon}$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\left(\sup_{t\geqslant T_\varepsilon} \frac{\max\limits_{s\in[0,t]}|w_n(s)|}{1+t^\alpha}\right) < \varepsilon\right) = 1. \tag{5}$$

Напомним, что такой выбор возможен в силу равенства (4) и леммы 1.

Пусть функция $f \in K$. Для любого $T > 0$ верна следующая оценка (см. 2)

$$|f(T)| \leqslant \sqrt{T}.$$

Поэтому мы можем выбрать $T_{2,\varepsilon} > 0$ таким образом, что для любого $T \geqslant T_{2,\varepsilon}$ выполнено

$$\sup_{t\geqslant T} \frac{|f(T)|}{1+t^\alpha} < \varepsilon. \tag{6}$$

Т.к. функция $f \in K$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T_{3,\varepsilon} > 0$ такое, что

$$\int_{T_{3,\varepsilon}}^{\infty} \dot{f}^2(s)ds \leqslant \varepsilon^2. \tag{7}$$

Очевидно, что для $T_\varepsilon := \max(T_{1,\varepsilon}, T_{2,\varepsilon}, T_{3,\varepsilon})$ одновременно выполнены неравенства (5), (6), (7).

Используя неравенство Коши – Буняковского, получаем

$$\sup_{t\geqslant T_\varepsilon} \frac{|f(t)-f(T_\varepsilon)|}{1+t^\alpha} \leqslant \sup_{t\geqslant T_\varepsilon} \frac{\int_{T_\varepsilon}^t |\dot{f}(s)|ds}{1+t^\alpha} \leqslant \sup_{t\geqslant T_\varepsilon} \int_{T_\varepsilon}^t \frac{|\dot{f}(s)|}{1+s^\alpha}ds$$

$$\leqslant \int_{T_\varepsilon}^{\infty} \frac{|\dot{f}(s)|}{1+s^\alpha}ds \leqslant \left(\int_{T_\varepsilon}^{\infty} \dot{f}^2(s)ds\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{T_\varepsilon}^{\infty} \frac{ds}{(1+s^\alpha)^2}\right)^{1/2} \leqslant \varepsilon C_\alpha. \tag{8}$$

Из неравенств (6), (8) следует, что

$$\rho(w_n, f) \leqslant \sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} \frac{|w_n(t)-f(t)|}{1+t^\alpha} + \sup_{t\geqslant T_\varepsilon} \frac{|w_n(t)-f(t)|}{1+t^\alpha} \leqslant \sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} \frac{|w_n(t)-f(t)|}{1+t^\alpha}$$

$$+ \sup_{t\geqslant T_\varepsilon} \frac{|f(t)-f(T_\varepsilon)|}{1+t^\alpha} + \sup_{t\geqslant T_\varepsilon} \frac{|w_n(t)|}{1+t^\alpha} + \sup_{t\geqslant T_\varepsilon} \frac{|f(T_\varepsilon)|}{1+t^\alpha}$$

$$\leqslant \sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} \frac{|w_n(t)-f(t)|}{1+t^\alpha} + \sup_{t\geqslant T_\varepsilon} \frac{|w_n(t)|}{1+t^\alpha} + (1+C_\alpha)\varepsilon. \tag{9}$$

Используя равенство (5), можем заключить, что для п.в. $\omega \in \Omega$ найдется $n(\varepsilon, \omega)$ такое, что для всех $n \geqslant n(\varepsilon, \omega)$ справедливо равенство

$$\sup_{t\geqslant T_\varepsilon} \frac{|w_n(t)|}{1+t^\alpha} < 2\varepsilon. \tag{10}$$

Из [1, приложение 8, теорема 4] (закон повторного логарифма для винеровского процесса на отрезке $[0, T_\varepsilon]$) следует, что для любой функции $f \in K_{T_\varepsilon}$ и п.в. $\omega \in \Omega$ существует подпоследовательность $n_k(\omega)$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_{T_\varepsilon,U}(w_{n_k(\omega)}, f) = 0$. Поэтому для п.в. $\omega \in \Omega$

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} \frac{|w_{n_k(\omega)}(t)-f(t)|}{1+t^\alpha} \leqslant \lim_{k\to\infty} \rho_{T_\varepsilon,U}(w_{n_k(\omega)}, f) = 0. \tag{11}$$

Из (9), (10) и (11) следует, что для любых функции $f \in K$, $\varepsilon > 0$, п.в. $\omega \in \Omega$ найдется подпоследовательность $n_k(\omega)$ такая, что

$$\limsup_{k\to\infty} \rho(w_{n_k(\omega)}, f) < (3+C_\alpha)\varepsilon.$$

Теорема 1 полностью доказана. □

3 Вспомогательные результаты

Для функции $g \in \mathbb{C}$ положим

$$g_n(t) := \frac{g(nt)}{\sqrt{n}\varphi(n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Лемма 1. *Пусть $g \in \mathbb{C}$ и для некоторого $T > 0$ справедливо неравенство*

$$\limsup_{r\to\infty} \left(\sup_{t\geqslant T} \frac{\max\limits_{s\in[0,t]} |g_{2^r}(s)|}{1+t^\alpha} \right) < \varepsilon. \tag{12}$$

Тогда для этого же $T > 0$ выполнено неравенство

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\sup_{t\geqslant T} \frac{\max\limits_{s\in[0,t]} |g_n(s)|}{1+t^\alpha} \right) < 2\varepsilon.$$

Доказательство. Т.к. неравенство в условии (12) строгое, то найдется $r(\varepsilon)$ такое, что для всех $r \geqslant r(\varepsilon)$ выполнено

$$\sup_{t\geqslant T} \frac{\max\limits_{s\in[0,t]} |g_{2^r}(s)|}{1+t^\alpha} < \varepsilon, \quad \frac{\varphi(2^{r+1})}{\varphi(2^r)} < \sqrt{2}. \tag{13}$$

Легко видеть, что для любого $n \geqslant 2^{r(\varepsilon)}$ найдется $r(n) \geqslant r(\varepsilon)$ такое, что $2^{r(n)} \leqslant n < 2^{r(n)+1}$. Поэтому, используя неравенства (13), для $n \geqslant 2^{r(\varepsilon)}$ получаем

$$\sup_{t\geqslant T} \frac{\max\limits_{s\in[0,t]} |g_n(s)|}{1+t^\alpha} = \sup_{t\geqslant T} \frac{\max\limits_{s\in[0,t]} |g(ns)|}{(1+t^\alpha)\sqrt{n}\varphi(n)} \leqslant \sup_{t\geqslant T} \frac{\max\limits_{s\in[0,t]} \left|g(2^{r(n)+1}s)\right|}{(1+t^\alpha)\sqrt{2^{r(n)}}\varphi(2^{r(n)})}$$

$$= \frac{\sqrt{2^{r(n)+1}}\varphi(2^{r(n)+1})}{\sqrt{2^{r(n)}}\varphi(2^{r(n)})} \cdot \sup_{t\geqslant T} \frac{\max\limits_{s\in[0,t]} \left|g(2^{r(n)+1}s)\right|}{(1+t^\alpha)\sqrt{2^{r(n)+1}}\varphi(2^{r(n)+1})} = \frac{\sqrt{2}\varphi(2^{r(n)+1})}{\varphi(2^{r(n)})} \cdot \sup_{t\geqslant T} \frac{\max\limits_{s\in[0,t]} |g_{2^{r(n)+1}}(s)|}{1+t^\alpha} < 2\varepsilon.$$

□

Лемма 2. *Пусть $g \in \mathbb{C}$ и удовлетворяет условиям*

1) для любых $c > 1$, $T > 0$

$$\limsup_{r\to\infty} \rho_T\left(g_{n_r(c)}, K_T\right) = 0,$$

где $n_r(c) = \lfloor c^r \rfloor$, $r \in \mathbb{N}$, $\rho_T\left(g_{n_r(c)}, K_T\right) := \inf\limits_{f\in K_T} \rho_T\left(g_{n_r(c)}, f\right)$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T_\varepsilon > 0$ такое, что для любого $c > 1$

$$\limsup_{r\to\infty} \left(\sup_{t\geqslant T_\varepsilon} \frac{\max\limits_{s\in[0,t]} \left|g_{n_r(c)}(s)\right|}{1+t^\alpha} \right) < \varepsilon. \tag{14}$$

Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} \rho\left(g_n, K\right) = 0.$$

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$
$$\limsup_{n\to\infty} \rho\left(\frac{g(nt)}{\sqrt{n}\varphi(n)}, K\right) < 3\varepsilon. \tag{15}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Обозначим $C_{T_\varepsilon} := \{f \in \mathbb{C} : f(t) \equiv f(T_\varepsilon), \text{ при } t \geqslant T_\varepsilon\}$. Очевидно, что
$$\widetilde{K}_\varepsilon := K_{T_\varepsilon} \cap C_{T_\varepsilon} \subset K, \tag{16}$$
и, в силу неравенства Коши – Буняковского, для любой функции $f \in K_{T_\varepsilon}$ справедливо неравенство
$$\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} |f(t)| \leqslant \int_0^{T_\varepsilon} |\dot{f}(s)|ds \leqslant \sqrt{T_\varepsilon}\left(\int_0^{T_\varepsilon} \dot{f}^2(s)ds\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{T_\varepsilon}.$$
Следовательно при любом достаточно большом T_ε для функции $f \in \widetilde{K}_\varepsilon$ будет выполнено неравенство
$$\sup_{t\geqslant T_\varepsilon} \frac{\max\limits_{s\in[0,t]} |f(s)|}{1+t^\alpha} = \sup_{t\geqslant T_\varepsilon} \frac{\max\limits_{s\in[0,T_\varepsilon]} |f(s)|}{1+t^\alpha} \leqslant \frac{\sqrt{T_\varepsilon}}{1+T_\varepsilon^\alpha} < \varepsilon. \tag{17}$$
Легко видеть, что, если неравенство (14) верно для некоторого $T_\varepsilon > 0$, то оно также справедливо для любого $T > T_\varepsilon$. Поэтому далее будем считать, что T_ε выбрано таким образом, что выполнены оба неравенства (14), (17).

Используя (16) и (17), получаем
$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \rho(g_n, K) &\leqslant \limsup_{n\to\infty} \rho(g_n, \widetilde{K}_\varepsilon) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \inf_{f\in\widetilde{K}_\varepsilon} \left(\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} \frac{|g_n(t)-f(t)|}{1+t^\alpha} + \sup_{t\geqslant T_\varepsilon} \frac{|g_n(t)-f(t)|}{1+t^\alpha}\right) \\
&\leqslant \limsup_{n\to\infty} \inf_{f\in\widetilde{K}_\varepsilon} \left(\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} \frac{|g_n(t)-f(t)|}{1+t^\alpha} + \sup_{t\geqslant T_\varepsilon} \frac{\max\limits_{s\in[0,t]} |g_n(s)|}{1+t^\alpha} + \varepsilon\right) \\
&\leqslant \limsup_{n\to\infty} \rho_{T_\varepsilon}(g_n, K_{T_\varepsilon}) + \limsup_{n\to\infty} \left(\sup_{t\geqslant T_\varepsilon} \frac{\max\limits_{s\in[0,t]} |g_n(s)|}{1+t^\alpha}\right) + \varepsilon.
\end{aligned} \tag{18}$$
Легко видеть, что $\rho_{T_\varepsilon}(g_n, K_{T_\varepsilon}) \leqslant \rho_{T_\varepsilon,U}(g_n, K_{T_\varepsilon}) \leqslant (1+T_\varepsilon^\alpha)\rho_{T_\varepsilon}(g_n, K_{T_\varepsilon})$. Также заметим, что множество K_{T_ε} является компактом в метрическом пространстве $(\mathbb{C}[0,T_\varepsilon], \rho_{T_\varepsilon,U})$ (см., например, [1, приложение 8, лемма 2]). Поэтому из условия 1) и [1, приложение 8, лемма 6] следует, что
$$\limsup_{n\to\infty} \rho_{T_\varepsilon}(g_n, K_{T_\varepsilon}) = 0. \tag{19}$$
Применяя условие 2) и лемму 1, получаем
$$\limsup_{n\to\infty} \left(\sup_{t\geqslant T_\varepsilon} \frac{\max\limits_{s\in[0,t]} |g_n(s)|}{1+t^\alpha}\right) < 2\varepsilon. \tag{20}$$
Из формул (18)–(20) следует неравенство (15). □

Лемма 3. *Пусть функция $f(t)$ непрерывна на $[0,\infty)$ и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда*
$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\max\limits_{s\in[0,t]}|f(s)|}{1+t^\alpha} \geqslant \varepsilon \tag{21}$$
тогда и только тогда, когда
$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^\alpha} \geqslant \varepsilon. \tag{22}$$

Доказательство. Легко видеть, что из (22) следует (21).

Теперь покажем, что из неравенства

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^\alpha} < \varepsilon. \tag{23}$$

следует

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\max\limits_{s\in[0,t]}|f(s)|}{1+t^\alpha} < \varepsilon. \tag{24}$$

Предположим, что выполнено (23), но не выполнено (24). Тогда существуют последовательности s_m и t_m такие, что $0 \leqslant s_m \leqslant t_m$ для всех $m \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{m\to\infty} t_m = \infty$ и

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|f(s_m)|}{1+t_m^\alpha} \geqslant \varepsilon. \tag{25}$$

Если $\liminf\limits_{m\to\infty} s_m < \infty$, то в силу непрерывности функции f неравенство (25) невозможно. Следовательно $\lim\limits_{m\to\infty} s_m = \infty$. Тогда, в силу того, что $s_m \leqslant t_m$, будем иметь

$$\varepsilon \leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{|f(s_m)|}{1+t_m^\alpha} \leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{|f(s_m)|}{1+s_m^\alpha} \leqslant \limsup_{t\to\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^\alpha} < \varepsilon.$$

Полученное противоречие завершает доказательство. □

Лемма 4. *Для любых $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$ и $\varepsilon > 0$ верна оценка*

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant T} \frac{\max\limits_{s\in[0,t]}|w_n(s)|}{1+t^\alpha} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\exp\left\{-\frac{T^{2\alpha-1}\varphi^2(n)\varepsilon^2}{4}\right\} C(T,\varepsilon),$$

где постоянная $0 < C(T,\varepsilon) < \infty$ зависит только от T и ε.

Доказательство. Пусть $0 < \lambda \in \mathbb{R}$. Применяя мартингальное неравенство Дуба (см., например, [1, глава 4, следствие 5]) к мартингалу $\exp\left\{\lambda\tilde{w}(t) - \frac{\lambda^2}{2}t\right\}$, и пользуясь тем, что случайный процесс $-\tilde{w}(t)$ является винеровским процессом, для любых $x > 0$, $y > 0$ получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\max_{t\in[0,y]}|\tilde{w}(t)| \geqslant x\right) &\leqslant \mathbf{P}\left(\max_{t\in[0,y]} \tilde{w}(t) \geqslant x\right) + \mathbf{P}\left(\max_{t\in[0,y]}(-\tilde{w}(t)) \geqslant x\right) \\
&\leqslant 2\mathbf{P}\left(\max_{t\in[0,y]} \exp\left\{\lambda\tilde{w}(t) - \frac{\lambda^2}{2}t\right\} \geqslant \exp\left\{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}y\right\}\right) \\
&\leqslant \frac{2\mathbf{E}\exp\left\{\lambda\tilde{w}(y) - \frac{\lambda^2}{2}y\right\}}{\exp\left\{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}y\right\}} = 2\exp\left\{-\lambda x + \frac{\lambda^2}{2}y\right\}.
\end{aligned}$$

Выбирая $\lambda = \frac{x}{y}$, будем иметь

$$\mathbf{P}\left(\max_{t\in[0,y]}|\tilde{w}(t)| \geqslant x\right) \leqslant 2\exp\left\{-\frac{x^2}{2y}\right\}. \tag{26}$$

Применяя неравенство (26), лумму 3 и закон повторного логарифма в форме Хинчина получаем

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant T} \frac{\max\limits_{s\in[0,t]}|w_n(s)|}{1+t^\alpha} \geqslant \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant T} \frac{\max\limits_{s\in[0,t]}|\tilde{w}(s)|}{(1+t^\alpha)\varphi(n)} \geqslant \varepsilon\right)$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left(\bigcup_{r=1}^{\infty}\left\{\sup_{t\in[Tr,T(r+1)]}\frac{\max\limits_{s\in[0,t]}|\tilde{w}(s)|}{(1+t^{\alpha})}\geqslant\varphi(n)\varepsilon\right\}\right)+\mathbf{P}\left(\limsup_{t\to\infty}\frac{\max\limits_{s\in[0,t]}|\tilde{w}(s)|}{(1+t^{\alpha})\varphi(n)}\geqslant\varepsilon\right)$$
$$=\mathbf{P}\left(\bigcup_{r=1}^{\infty}\left\{\sup_{t\in[Tr,T(r+1)]}\frac{\max\limits_{s\in[0,t]}|\tilde{w}(s)|}{(1+t^{\alpha})}\geqslant\varphi(n)\varepsilon\right\}\right)+\mathbf{P}\left(\limsup_{t\to\infty}\frac{|\tilde{w}(t)|}{(1+t^{\alpha})\varphi(n)}\geqslant\varepsilon\right)$$
$$=\mathbf{P}\left(\bigcup_{r=1}^{\infty}\left\{\sup_{t\in[Tr,T(r+1)]}\frac{\max\limits_{s\in[0,t]}|\tilde{w}(s)|}{(1+t^{\alpha})}\geqslant\varphi(n)\varepsilon\right\}\right)$$
$$\leqslant\sum_{r=1}^{\infty}\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[Tr,T(r+1)]}\frac{\max\limits_{s\in[0,t]}|\tilde{w}(s)|}{(1+t^{\alpha})}\geqslant\varphi(n)\varepsilon\right)\leqslant\sum_{r=1}^{\infty}\mathbf{P}\left(\frac{\max\limits_{s\in[0,T(r+1)]}|\tilde{w}(s)|}{(1+(Tr)^{\alpha})}\geqslant\varphi(n)\varepsilon\right)$$
$$\leqslant 2\sum_{r=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(1+(Tr)^{\alpha})^2\varphi^2(n)\varepsilon^2}{2T(r+1)}\right\}=2\sum_{r=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(1+2(Tr)^{\alpha}+(Tr)^{2\alpha})\varphi^2(n)\varepsilon^2}{2T(r+1)}\right\}$$
$$=2\sum_{r=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(1+2(Tr)^{\alpha}+(Tr)^{2\alpha}+T^{2\alpha}r-T^{2\alpha}r)\varphi^2(n)\varepsilon^2}{2T(r+1)}\right\}$$
$$=2\sum_{r=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(1+2(Tr)^{\alpha}+(Tr)^{2\alpha}-T^{2\alpha}r)\varphi^2(n)\varepsilon^2}{2T(r+1)}\right\}\exp\left\{\frac{-T^{2\alpha}r\varphi^2(n)\varepsilon^2}{2T(r+1)}\right\}$$
$$\leqslant 2\sum_{r=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(1+2(Tr)^{\alpha}+(Tr)^{2\alpha}-T^{2\alpha}r)\varepsilon^2 2\ln\ln 3}{2T(r+1)}\right\}\exp\left\{\frac{-T^{2\alpha-1}\varphi^2(n)\varepsilon^2}{4}\right\}$$
$$=2\exp\left\{\frac{-T^{2\alpha-1}\varphi^2(n)\varepsilon^2}{4}\right\}\sum_{r=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(1+2(Tr)^{\alpha}+(Tr)^{2\alpha}-T^{2\alpha}r)\varepsilon^2 2\ln\ln 3}{2T(r+1)}\right\}$$
$$=2\exp\left\{\frac{-T^{2\alpha-1}\varphi^2(n)\varepsilon^2}{4}\right\}C(T,\varepsilon).$$

Лемма 4 доказана. □

Список литературы

[1] A.V. Bulinsky, A.N. Shiryaev, Theory of Random Processes, 2005, Fizmatlit, Moscow.

[2] J.D. Deuschel, D.W. Stroock, Large deviations, 1989, Academic, Boston.

[3] N. Gantert, An Inversion of Strassen's Law of the Iterated Logarithm for Small Time. The Annals of Probability, 1993, 21(2), pp. 1045–1049.

[4] Dmitrii S. Budkov, Sergey Ya. Makhno, Functional iterated logarithm law for a wiener process, Theory Stoch. Process., 2007, 13(29), Issue 3, pp. 22–28.

[5] F.C. Klebaner, A.V. Logachov, A.A. Mogulskii, Large deviations for processes on half–line, Electron. Commun. Probab., 2015, v. 20, no. 75, pp. 1–14.