S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 519.716
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 08A40

ОБ ИНТЕРВАЛЕ МЕЖДУ КЛОНОМ БУЛЕВЫХ ОПЕРАЦИЙ, СОХРАНЯЮЩИХ 0 И 1, И КЛОНОМ ВСЕХ МУЛЬТИОПЕРАЦИЙ

В.И. Пантелеев AND **С.Ю. Халтанова**

Abstract: The paper considers multioperations defined on a two-element set and describes the interval between the clone of Boolean operations preserving 0 and 1 and the clone of all multioperations. It is shown that this interval contains 108 clones.

Keywords: multifunction, multioperation, parametric closure, composition, completeness criterion, interval.

1 Введение

Исследование структуры замкнутых относительно суперпозиции множеств — традиционная задача в теории дискретных функций. К настоящему времени полное решение этой задачи есть только для булевых функций [12]. Решетка по включению всех замкнутых относительно суперпозиции множеств булевых функций является счетной.

Но уже для функций k-значной логики такая решетка является континуальной. В связи с этим встает задача описания фрагментов или интервалов в рассматриваемых решетках. При этом, как правило, рассматриваются замкнутые множества, которые содержат так называемые

Panteleev V.I., Haltanova S.Yu. On the interval between the clone of all Boolean operations preserving 0 and 1 and the clone of all multioperations.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00011 в Бурятском государственном университете им. Д. Банзарова, https://rscf.ru/project/24-21-00011/.

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

проекции или операции-переменные. Такие множества называют клонами.

Стоит заметить, что в литературе наряду с термином «функция» используется и термин «операция», который мы и будем использовать ниже.

В теории дискретных операций одним из объектов являются мультиоперации — операции, заданные на некотором конечном множестве и возвращающие подмножества (в том числе и пустое) исходного множества. Множество мультиопераций содержит в себе множество операций, множество так называемых частичных операций, гипер- и мультиопераций. Решетка множеств мультиопераций, замкнутых относительно суперпозиции, является континуальной даже в том случае, если мультиоперации заданы на двухэлементном множестве.

Одними из первых, кто начал изучение интервалов в множестве мультиопераций, были В. Б. Алексеев и А. А. Вороненко. Ими рассматривались интервалы между так называемыми максимальными (предполными) клонами булевых операций и клоном всех частичных операций. Для четырех клонов такие интервалы оказались конечными, а для клона линейных операций интервал оказался континуальным [1].

Немного в другой постановке задача описания интервалов рассматривалась в работах [4, 7, 13, 14]. Для частичных операций полная характеристика интервалов, содержащих клоны максимальных булевых операций, описана в [3].

Стоит заметить, что в отличие от булевых операций и частичных операций, суперпозиция гиперопераций и мультиопераций может порождать различные гипер- и мультиоперации. Исторически первым является подход в котором суперпозиция строится на основе теоретико-множественной операции объединения, так называемая U-суперпозиция. Но суперпозиция может быть основана и на пересечении — I-суперпозиция [11].

Исследование различных интервалов в решетке замкнутых относительно I-суперпозиции множеств мультиопераций приведено в работах [2, 5, 6, 10].

В настоящей работе рассматриваются мультиоперации, заданные на двухэлементном множестве, и описывается интервал между клоном булевых операций, сохраняющих 0 и 1, и клоном всех мультиопераций при использовании I-суперпозиции. Показано, что этот интервал содержит 108 клонов, в том числе и клоны частичных операций, содержащих клон $T_0 \cap T_1$ из [7, P. 628].

2 Основные понятия

Для конечного множества A его мощность будем обозначать как $|A|$. Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. Определим следующие множества: для $n \in N$
$\mathcal{M}_{2,n} = \{f \mid f : E_2^n \to 2^{E_2}\}$, $\mathcal{M} = \bigcup\limits_n \mathcal{M}_{2,n}$;
$\mathcal{H}_{2,n} = \{f : f \in \mathcal{M}_{2,n}$ и $|f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)| \geqslant 1$ для любого набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

из $E_2^n\}$, $\mathcal{H} = \bigcup\limits_n \mathcal{H}_{2,n}$;

$\mathcal{O}^*_{2,n} = \{f : f \in \mathcal{M}_{2,n}$ и $|f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| \leqslant 1$ для любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из $E_2^n\}$, $\mathcal{O}^* = \bigcup\limits_n \mathcal{O}^*_{2,n}$;

$\mathcal{O}_{2,n} = \{f : f \in \mathcal{M}_{2,n}$ и $|f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| = 1$ для любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из $E_2^n\}$, $\mathcal{O} = \bigcup\limits_n \mathcal{O}_{2,n}$.

Операции из $\mathcal{O}$ называют булевыми, из $\mathcal{O}^*$— частичными, из $\mathcal{H}$— гипер-, из $\mathcal{M}$ — мультиоперациями.

Мультиоперация $f(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \{\alpha_i\}$ для любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_2^n$ называется селекторной $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Мультиоперация $g(x_1, \ldots, x_n)$ называется двойственной к $f(x_1, \ldots, x_n)$, если $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \bar{f}(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ для любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_2^n$, при этом $\bar{0} = 1, \bar{1} = 0, \bar{\varnothing} = \varnothing$ и $\overline{\{0, 1\}} = \{0, 1\}$.

Очевидно, что выполняются следующие включения: $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}^* \subseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}$.

Для мультиопераций будем использовать запись как в виде вектора-строки, так и в виде вектора-столбца значений функции на всех наборах, расположенных в натуральном порядке, т.е. запись $f = (\{1\}\{0\}\varnothing\{0, 1\})$ означает, что $f(0, 0) = \{1\}$, $f(0, 1) = \{0\}$, $f(1, 0) = \varnothing$ и $f(1, 1) = \{0, 1\}$.

Пусть дана n-местная мультиоперация f и m-местные мультиоперации $f_1, \ldots, f_n$. Суперпозиция $s(f, f_1, \ldots, f_n)$ с внешней мультиоперацией f и внутренними мультиоперациями $f_1, \ldots, f_n$ определяет m-местную мультиоперацию g следующим образом [11]: для произвольного набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in E_2^m$ выполняется

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \begin{cases} \bigcap\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n), \text{если это пересече-} \\ \text{ние не равно } \varnothing; \\ \bigcup\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n), \text{ иначе.} \end{cases} \qquad (1)$$

Определение (1) фактически задает вложение $\mathcal{M}$ в множество $\mathcal{O}_4$ — множество операций 4-х значной логики, при этом каждая такая операция однозначно определяется своими значениями на наборах из множества E_2. Если определить 4-х значные операции как операции на множестве $F' = \{*, 0, 1, -\}$ при соответствии $\varnothing \leftrightarrow *$, $\{0\} \leftrightarrow 0$, $\{1\} \leftrightarrow 1$, $\{0, 1\} \leftrightarrow -$, то на наборах, построенных из 0 и 1, операция может принимать любое значение из множества F', на наборах, содержащих хотя бы одну $*$, операция обязательно принимает значение $*$, на остальных наборах значение операции вычисляется в соответствии с (1). Подробнее об этом можно посмотреть в [11]. С учетом описанного соответствия вместо $(\{1\}\{0\}\varnothing\{0, 1\})$, например, будем писать $f = (10 * -)$.

Клон, частичный, гипер-, мультиклон — множество операций, частичных, гипер- и мультиопераций, соответственно, содержащее все селекторные операции и замкнутое относительно суперпозиции.

Клоны, частичные, гипер-, мультиклоны ниже будем называть просто клонами.

Интервалом $\mathcal{I}(A, B)$ называется частично упорядоченное по включению множество всех клонов, содержащих клон A и являющихся подмножествами клона B.

Интервалы, обычно, представляются в виде диаграмм, где клоны изображаются точками и точка, представляющая клон A_1 расположена выше (или правее) и соединена отрезком с точкой, представляющей клон B_1, если множество A_1 непосредственно содержит B_1.

В [7] приведены некоторые сведения о различных интервалах в решетке клонов частичных операций.

Пусть $\ast$ — множество мультиопераций, которые на всех наборах принимают значение $\ast$, тогда очевидной является следующая лемма.

Лемма 1. *Если A — клон в $\mathcal{M}$, то $A \cup\ \ast$ — клон.*

Замечание 1. *С учетом леммы 1 мы рассматриваем только такие клоны, которые содержат множество $\ast$. В [7] клоны A и $A \cup\ \ast$ из леммы 1 считаются различными.*

3 Вспомогательные результаты

Если A — множество, то через $[A]$ обозначим замыкание A. Понятия полноты и предполноты используем обычным образом [7, 8].

Лемма 2. *Справедливы утверждения:*
$(00) \in [\{(0-)\}] \cap [\{-0\}]$ *и* $(11) \in [\{(1-)\}] \cap [\{-1\}]$.

Доказательство. Если $f_1(x) = (0-)$, $f_2(x) = (-0)$, $f_3(x) = (1-)$, $f_4(x) = (-1)$, то $s(f_1, f_1) = (00)$, $s(f_2, f_2) = f_1$, $s(f_3, f_3) = (11)$ и $s(f_4, f_4) = f_3$. $\square$

Пусть $Q \subseteq \{0, 1\}$ и $Q \neq \varnothing$. Определим множества:
$T_Q^2 = \{f \mid f \in \mathcal{O}$ и $a \in Q \Rightarrow f(a, \ldots, a) = a\}$;
$T_Q^* = \{f \mid f \in \mathcal{O}^*$ и $a \in Q \Rightarrow f(a, \ldots, a) = a\}$;
$T_Q^- = \{f \mid f \in \mathcal{H}$ и $a \in Q \Rightarrow f(a, \ldots, a) = a\}$;
$T_Q^{*-} = \{f \mid f \in \mathcal{M}$ и $a \in Q \Rightarrow f(a, \ldots, a) = a\}$.

Для записи множества Q далее не будем использовать фигурные скобки и запятые: например, вместо $T^2_{\{0,1\}}$ будем писать T^2_{01}.

Предложение 1. *Для любого $Q \subseteq \{0, 1\}$ и $Q \neq \varnothing$ множества T_Q^2, T_Q^*, T_Q^-, T_Q^{*-} являются клонами.*

Доказательство. Операции-проекции сохраняют константы, а множество мультиопераций, сохраняющих некоторую константу, очевидно, является замкнутым относительно суперпозиции. $\square$

Лемма 3. *Пусть $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $f_2(x_1, \ldots, x_n)$— мультиоперации, такие, что*

$$f_1(0, \ldots, 0) = f_2(0, \ldots, 0) = 0, f_1(1, \ldots, 1) = f_2(1, \ldots, 1) = 1$$

и найдутся наборы $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in E_2^n$ *и* $(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in E_2^n$ *такие, что* $f_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=*$ *и* $f_2(\beta_1,\ldots,\beta_n)=-$. *Тогда*

$$T_{01}^{*}\subseteq[T_{01}^{2}\cup\{f_1\}] \text{ и } T_{01}^{-}\subseteq[T_{01}^{2}\cup\{f_2\}].$$

Доказательство. Отождествлением и перестановкой переменных у мультиоперации f_1 можно получить 2-х местную мультиоперацию $h(x_1,x_2)$, такую, что $h(0,0)=0, h(0,1)=*, h(1,1)=1$. Пусть $g(x_1,\ldots,x_m)\in T_{01}^{*}$. По g построим две мультиоперации $u_1(x_1,\ldots,x_m)$ и $u_2(x_1,\ldots,x_m)$ принадлежащие T_{01} следующим образом:

$$u_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)=\begin{cases}0, & \text{если } g(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in\{0,*\};\\ 1, & \text{иначе.}\end{cases}$$

$$u_2(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)=\begin{cases}0, & \text{если } g(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)=0;\\ 1, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Очевидно, что справедливо равенство $g=s(h,u_1,u_2)$.

Для мультиоперации f_2 рассуждения проводим аналогичным образом.

□

Определим далее множества

$T_{0a,1b}^{*-}=\{f: f\in\mathcal{M} \text{ и } f(0,\ldots,0)=a, f(1,\ldots,1)=b\}, a\in\{0,*\}, b\in\{1,*\}$

и

$T_{0*}^{*-}=\{f: f\in\mathcal{M} \text{ и } f(0,\ldots,0)=*\},\ T_{1*}^{*-}=\{f: f\in\mathcal{M} \text{ и } f(1,\ldots,1)=*\}$.

Положим

$T_{0a,1b}^{*}=T_{0a,1b}^{*-}\cap\mathcal{O}^{*}$, $T_{0*}^{*}=T_{0*}^{*-}\cap\mathcal{O}^{*}$, $T_{1*}^{*}=T_{1*}^{*-}\cap\mathcal{O}^{*}$.

Замкнутость введенных множеств следует из замкнутости множеств сохраняющих константы, особенности $*$ и того, что пересечение замкнутых множеств является замкнутым множеством.

Замечание 2. *Справедливы следующие включения*

1) $T_{00,1*}^{*}\subseteq T_{1*}^{*}$, $T_{0*,11}^{*}\subseteq T_{0*}^{*}$, $T_{0*,1*}^{*}\subseteq T_{1*}^{*}\cap T_{0*}^{*}$;
2) $T_{00,1*}^{*-}\subseteq T_{1*}^{*-}$, $T_{0*,11}^{*-}\subseteq T_{0*}^{*-}$, $T_{0*,1*}^{*-}\subseteq T_{1*}^{*-}\cap T_{0*}^{*-}$;
3) $T_{0*,1*}^{*}\subset[T_{01}^{2}\cup T_{00,1*}^{*}\cup T_{0*,11}^{*}]$;
4) $T_{0*,1*}^{*-}\subset[T_{01}^{2}\cup T_{00,1*}^{*-}\cup T_{0*,11}^{*-}]$.

Лемма 4. *Справедливы следующие утверждения:*

a) $[T_{01}^{2}\cup\{(*0)\}]=T_{01}^{2}\cup T_{0*}^{*}$; *b)* $[T_{01}^{-}\cup\{(*0)\}]=T_{01}^{-}\cup T_{0*}^{*-}$;
c) $[T_{01}^{*}\cup\{(*0)\}]=T_{01}^{*}\cup T_{0*}^{*}$; *d)* $[T_{01}^{*-}\cup\{(*0)\}]=T_{01}^{*-}\cup T_{0*}^{*-}$;

Доказательство. Так как мультиоперация $(*0)$ принадлежит T_{0*}^{*} (и T_{0*}^{*-}), то включение левой части в правую, очевидно, справедливо.

Для доказательства справедливости обратного включения рассмотрим отдельно случаи a), c), d) и случай b).

Случаи a), c), d). На примере случая d) приведем рассуждение, переносимое на остальные рассматриваемые варианты.

Пусть мультиоперация $f(x_1,\dots,x_n) \in T^{*-}_{0*}$. Из мультиоперации $(*0)$ и мультиопераций множества T^{*-}_{01} можно получить мультиоперацию $h_1(x_1,\dots,x_n)$ такую, что $h_1(0,\dots,0) = *$, а на всех остальных наборах h_1 возвращает 0. В множестве T^{*-}_{01} есть мультиоперация $g(y,x_1,\dots,x_n)$ такая, что $g(0,0,\dots,0) = 0$ и $g(0,\tilde\beta) = f(\tilde\beta), (\tilde\beta \in E_2^n)$. Мультиоперация f представима как $s(g,h_1,x_1,\dots,x_n)$.

В случае b) по мультиоперации $f(x_1,\dots,x_n) \in T^{*-}_{0*}$ из $(*0)$ и мультиопераций множества T^2_{01} можно получить мультиоперацию $h_1(x_1,\dots,x_n)$ такую, что для любого $\tilde\alpha \in E_2^n$ выполняется $h_1(\tilde\alpha) = \begin{cases} *, \text{ если } f(\tilde\alpha) = *; \\ 0, \text{ иначе.}\end{cases}$

В множестве T^-_{01} есть мультиоперация $g(y,x_1,\dots,x_n)$ для которой $g(0,0,\dots,0) = 0$ и для произвольного оставшегося набора $\tilde\beta \in E_2^n$ выполняется $g(0,\tilde\beta) = \begin{cases} f(\tilde\beta), \text{ если } f(\tilde\beta) \in \{0,1,-\}; \\ 0, \text{ иначе.}\end{cases}$

Для рассматриваемого случая справедливо представление

$$f(x_1,\dots,x_n) = s(g,h_1,x_1,\dots,x_n).$$

$\square$

Аналогичным образом доказываются

Лемма 5. *Верны равенства*

a) $[T^2_{01} \cup \{(1*)\}] = T^2_{01} \cup T^*_{1*}$; *b)* $[T^*_{01} \cup \{(1*)\}] = T^*_{01} \cup T^*_{1*}$;
c) $[T^-_{01} \cup \{(1*)\}] = T^-_{01} \cup T^{*-}_{1*}$; *d)* $[T^{*-}_{01} \cup \{(1*)\}] = T^{*-}_{01} \cup T^{*-}_{1*}$.

Лемма 6. *Верны равенства*

a) $[T^2_{01} \cup \{(0*)\}] = T^2_{01} \cup T^*_{00,1*}$; *b)* $[T^*_{01} \cup \{(0*)\}] = T^*_{01} \cup T^*_{00,1*}$;
c) $[T^-_{01} \cup \{(0*)\}] = T^-_{01} \cup T^{*-}_{00,1*}$; *d)* $[T^{*-}_{01} \cup \{(0*)\}] = T^{*-}_{01} \cup T^{*-}_{00,1*}$.

Лемма 7. *Верны равенства*

a) $[T^2_{01} \cup \{(*1)\}] = T^2_{01} \cup T^*_{0*,11}$; *b)* $[T^*_{01} \cup \{(*1)\}] = T^*_{01} \cup T^*_{0*,11}$;
c) $[T^-_{01} \cup \{(*1)\}] = T^-_{01} \cup T^{*-}_{0*,11}$; *d)* $[T^{*-}_{01} \cup \{(*1)\}] = T^{*-}_{01} \cup T^{*-}_{0*,11}$.

Лемма 8. *Если мультиоперация* $u(x,y) \in \mathcal{O}^*$ *такова, что* $u(0,0) = *$, $u(1,1) = *$ *и* $u(0,1) \neq *$ *или* $u(1,0) \neq *$, *то* $[T^2_{01} \cup \{u\}] = T^2_{01} \cup T^*_{0*,1*}$.

Доказательство. Включение $[T^2_{01} \cup \{u\}] \subseteq T^2_{01} \cup T^*_{0*,1*}$ справедливо, так как u принадлежит $T^*_{0*,1*}$.

Пусть для определенности $u(0,1) = 0$ и пусть мультиоперация $g(x_1,\dots,x_n) \in T^*_{0*,1*}$. Тогда

$$g(0,\dots,0) = *, g(1,\dots,1) = *$$

и пусть далее на наборах $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_r$ значение функции g равно 0; на наборах $\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_s$ значение функции равно 1; на наборах $\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_t$ значение функции равно $*$, где $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_j, \tilde{\gamma}_l$ принадлежат E_2^n, $i \in \{1, \ldots, r\}$, $j \in \{1, \ldots, s\}$, $l \in \{1, \ldots, t\}$.

Из мультиоперации u получим мультиоперации $u_1(x, y) = (*00*)$ и $u_2(x, y) = (*01*)$: для первой в качестве внешней мультиоперации берем u, а в качестве внутренних — (0001) и (0111), а для второй в качестве внешней мультиоперации берем (00110001), а в качестве внутренних — $(*00*)$, (0011) и (0101).

В множестве T_{01}^2 выберем мультиоперации $h_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $h_2(x_1, \ldots, x_n)$ такие, что
$h_1(0, \ldots, 0) = h_2(0, \ldots, 0) = 0, h_1(1, \ldots, 1) = h_2(1, \ldots, 1) = 1,$
$h_1(\tilde{\alpha}_1) = \ldots = h_1(\tilde{\alpha}_r) = 0, h_2(\tilde{\alpha}_1) = \ldots = h_2(\tilde{\alpha}_r) = 1,$
$h_1(\tilde{\beta}_1) = \ldots = h_1(\tilde{\beta}_s) = 1, h_2(\tilde{\beta}_1) = \ldots = h_2(\tilde{\beta}_s) = 0,$
$h_1(\tilde{\gamma}_1) = \ldots = h_1(\tilde{\gamma}_s) = 0, h_2(\tilde{\gamma}_1) = \ldots = h_2(\tilde{\gamma}_t) = 0.$

И тогда $g(x_1, \ldots, x_n) = s(u_2, h_1, h_2)$. □

Лемма 9. *Если двухместная операция $v(x, y) \in \mathcal{M}$ такова, что $v(0, 0) = *$, $v(1, 1) = *$ и $v(0, 1) = -$ или $v(1, 0) = -$, то $[T_{01}^2 \cup \{v\}] = T_{01}^2 \cup T_{0*,1*}^{*-}$.*

Доказательство. Включение $[T_{01}^2 \cup \{v\}] \subseteq T_{01}^2 \cup T_{0*,1*}^{*-}$ очевидно.

Для определенности предположим, что $v(0, 1) = -$. Далее строим мультиоперации $v_1(x_1, x_2) = (*--*)$, $v_2(x_1, x_2) = (*01*)$ и $v_3(x_1, x_2, x_3) = (*--**01*)$. Из $v_3(x_1, x_2, x_3)$ и мультиопераций множества T_{01}^2 можно построить любую мультиоперацию из множества $T_{0*,1*}^{*-}$. □

Определение 1. *Для любого набора множеств $(A_1, \ldots, A_n)$ где $A_i \in \{T_{00,1*}^*, T_{0*,11}^*, T_{0*,1*}^*, T_{0*}^*, T_{1*}^*, T_{00,1*}^{*-}, T_{0*,11}^{*-}, T_{0*,1*}^{*-}, T_{0*}^{*-}, T_{1*}^{*-}\}$ и набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \alpha_i \in \{0, 1, \tilde{1}\}$ положим по определению*

$$(A_1, \ldots, A_n) \cdot (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^t = \bigcup_{i \in \{1, \ldots, n\}} \alpha_i \cdot A_i,$$

где $0 \cdot A = \varnothing$, $1 \cdot A = A$ *и* $\tilde{1} \cdot A = \begin{cases} T_{0a,1b}^{*-}, & \text{если } A = T_{0a,1b}^*; \\ T_{0*}^{*-}, & \text{если } A = T_{0*}^*; \\ T_{1*}^{*-}, & \text{если } A = T_{1*}^*; \\ A, & \text{иначе.} \end{cases}$

Пусть

$X^* = (T_{00,1*}^*, T_{0*,11}^*, T_{0*,1*}^*, T_{0*}^*, T_{1*}^*)$ и $X^{*-} = (T_{00,1*}^{*-}, T_{0*,11}^{*-}, T_{0*,1*}^{*-}, T_{0*}^{*-}, T_{1*}^{*-})$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \subseteq \{0, 1\}^5$. Зададим множества

$$B^{\alpha} = T_{01}^2 \cup X^* \cdot \alpha^t, \qquad B^{\alpha *} = T_{01}^* \cup X^* \cdot \alpha^t, \tag{1}$$

$$B^{\alpha -} = T_{01}^- \cup X^{*-} \cdot \alpha^t, \qquad B^{\alpha * -} = T_{01}^{*-} \cup X^{*-} \cdot \alpha^t \tag{2}$$

Рассмотрим двенадцать наборов значений $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ для (1)–(2):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
α_1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
α_2	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
α_3	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
α_4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
α_5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1

(3)

и 18 следующих наборов:

$$\begin{gathered}C=\{(00\tilde{1}00),(\tilde{1}0000),(0\tilde{1}000),(01\tilde{1}00),(0\tilde{1}\tilde{1}00),(10\tilde{1}00),(\tilde{1}0\tilde{1}00),\\(11\tilde{1}00),(\tilde{1}1\tilde{1}00),(1\tilde{1}\tilde{1}00),(\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1}00),(0\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1}0),(\tilde{1}0\tilde{1}0\tilde{1}),(1\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1}0),(\tilde{1}1\tilde{1}0\tilde{1}),\\(\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1}0),(\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1}0\tilde{1}),(\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1})\}.\end{gathered} \tag{4}$$

Предложение 2. *Для любого набора значений $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ из (3) множества B^{α}, $B^{\alpha*}$, $B^{\alpha-}$, $B^{\alpha*-}$ являются клонами.*

Доказательство. Множества $T_{01}^2, T_{01}^*, T_{01}^-, T_{01}^{*-}$ являются клонами, поэтому, во-первых, они содержат проекции, а во-вторых, содержат суперпозиции, в которых внешняя и все внутренние мультиоперации принадлежат одному из этих множеств. Если все внутренние принадлежат одному из этих множеств, то мультиоперация, определяемая суперпозицией, принадлежит тому множеству, которому принадлежит внешняя мультиоперация.

Если одна из внутренних мультиопераций принадлежит одному из множеств $T_{0*}^{\beta}, T_{1*}^{\beta}, T_{0*,1*}^{\beta}$ ($\beta \in \{*, *-\}$), то мультиоперация, определяемая суперпозицией, принадлежит этому же множеству.

Поэтому рассматриваем случаи, когда все внутренние принадлежат $T_{00,1*}^{\beta}$ или $T_{0*,11}^{\beta}$ ($\beta \in \{*, *-\}$). Для $T_{0*,11}^{\beta}$, например, справедливо, что мультиоперация, определяемая суперпозицией на наборе из одних единиц возвращает 1. Если же одна из внутренних мультиопераций на наборе из одних нулей возвращает $*$, то и мультиоперация, определяемая суперпозицией, на наборе из одних нулей возвращает $*$. □

Из замечания 2 следует

Предложение 3. *Для любого набора значений $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ не входящего в (3) найдется набор $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$ входящий в (3) такой, что $[B^{\alpha}] = B^{\beta}$, $[B^{\alpha*}] = B^{\beta*}$, $[B^{\alpha-}] = B^{\beta-}$, $[B^{\alpha*-}] = B^{\beta*-}$.*

Обычное отношение $\leqslant$ на множестве $\{0,1\}$: $0 \leqslant 0$, $0 \leqslant 1$, $1 \leqslant 1$ распространяем на множество $\{0, 1, \tilde{1}\}$ ($0 \leqslant \tilde{1}$, $1 \leqslant \tilde{1}$, $\tilde{1} \leqslant \tilde{1}$) и на наборы из (3) и (4).

Лемма 10. *Если для двух наборов α и α' из (3) выполняется $\alpha \leqslant \alpha'$, то $B^{\alpha} \subseteq B^{\alpha'}$, $B^{\alpha*} \subseteq B^{\alpha'*}$, $B^{\alpha-} \subseteq B^{\alpha'-}$, $B^{\alpha*-} \subseteq B^{\alpha'*-}$.*

Доказательство. Справедливость утверждения следует из замечания 2. □

Определение 2. *Для наборов α и α' будем говорить, что α непосредственно предшествует α', если $\alpha \leqslant \alpha'$ и для любого α'' из того, что $\alpha \leqslant \alpha''$ и $\alpha'' \leqslant \alpha'$ следует, что $\alpha'' = \alpha$ или $\alpha'' = \alpha'$.*

Лемма 11. *Если набор α из (3) непосредственно предшествует набору α' из (3), то B^{α} ($B^{\alpha *}$, $B^{\alpha -}$, $B^{\alpha * -}$) предполон в $B^{\alpha'}$ (соответственно, $B^{\alpha' *}$, $B^{\alpha' -}$, $B^{\alpha' * -}$).*

Доказательство. Следует из замечания 1 и лемм 4, 5, 6, 7, 8, 9 в соответствии со схемой на рис. 1. □

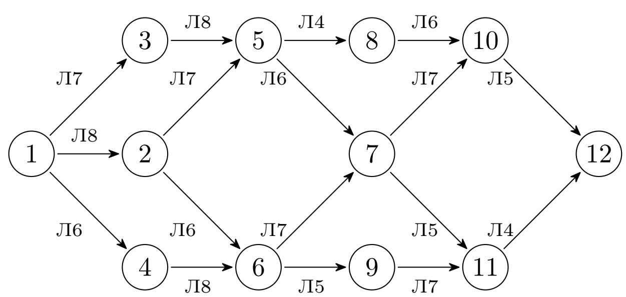


Рис. 1. Схема применения лемм

Из предложения 2 и леммы 11 вытекает

Лемма 12. *Справедливо*

(1) $\mid I(T^2_{01}, T^2_{01} \cup T^*_{1,*} \cup T^*_{0,*}) \mid = 12$,
(2) $\mid I(T^*_{01}, T^*_{01} \cup T^{*-}_{1,*} \cup T^{*-}_{0,*}) \mid = 12$,
(3) $\mid I(T^-_{01}, T^-_{01} \cup T^{*-}_{1,*} \cup T^{*-}_{0,*}) \mid = 12$,
(4) $\mid I(T^{*-}_{01}, T^{*-}_{01} \cup T^{*-}_{1,*} \cup T^{*-}_{0,*}) \mid = 12$.

Лемма 13. *Справедливо* $[T^-_{01} \cup B^{\alpha}] = B^{\alpha -}$.

Доказательство. Пусть $D^{*-} \in \{T^{*-}_{00,1*}, T^{*-}_{0*,1*}, T^{*-}_{0*}\}$, а соответствующее множество $D^* \in \{T^*_{00,1*}, T^*_{0*,1*}, T^*_{0*}\}$. По мультиоперации $f(x_1, \ldots, x_n)$ из D^{*-} построим мультиоперации $v(x_1, \ldots, x_n) \in D^*$ и $f'(y, x_1, \ldots, x_n) \in T^-_{01}$ следующим образом:

$$v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{cases} *, \text{ если } f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = *; \\ 0, \text{ иначе} \end{cases},$$

$f'(0, 0, \ldots, 0) = 0$ и для любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из оставшихся

$$f'(0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{cases} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \text{ если } f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq *; \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}.$$

Верно равенство $f(x_1,\dots,x_n) = s(f', v, x_1,\dots,x_n)$.

Для $D^{*-} \in \{T^{*-}_{1*}, T^{*-}_{0*,11}\}$ рассуждения проводим аналогичным образом, переходя к двойственным мультиоперациям. $\square$

Следствие 1. $[T^{*-}_{01} \cup B^{\alpha *}] = B^{\alpha *-}$.

Лемма 14. *Для любого $\beta \in C$ множества $T^2_{01} \cup X^* \cdot \beta^t$ и $T^*_{01} \cup X^* \cdot \beta^t$ являются клонами.*

Доказательство. Множества T^2_{01} и T^*_{01} являются клонами, поэтому содержат все проекции.

Пусть $K = T^s_{01} \cup X^* \cdot \beta^t, s \in \{*, 2\}$ для некоторого $\beta \in C$.

Покажем, что суперпозиция $g = s(f, f_1, \dots, f_n)$ мультиопераций из K принадлежит K.

Если для некоторых f' и f'' из суперпозиции выполняется $f'(0,\dots,0) = *$ и $f''(1,\dots,1) = *$, то в наборе β на третьей позиции стоит $\tilde{1}$, а значит выполняется включение $T^{*-}_{0*,1*} \subset K$. По определению суперпозиции для мультиоперации g в этом случае выполняется $g(0,\dots,0) = *$ и $g(1,\dots,1) = *$, т. е. $g \in T^{*-}_{0*,1*}$.

Если найдутся f_i и f_j для $1 \leqslant i, j \leqslant n$ такие, что $f_i(0,\dots,0) = *$ и $f_j(1,\dots,1) = 0$, то тогда $T^{*-}_{0*} \subset K$. Так как $f_i(0,\dots,0) = *$, то $g(0,\dots,0) = *$. Поэтому $g \in T^{*-}_{0*} \subset K$.

Случай, когда найдутся f_i и f_j для $1 \leqslant i, j \leqslant n$ такие, что $f_i(0,\dots,0) = 1$ и $f_j(1,\dots,1) = *$ приводит к тому, что $g \in T^{*-}_{1*} \subset K$.

Пусть найдется f_i такая, что $f_i(0,\dots,0) = *$ и для всех j выполняется $f_j(1,\dots,1) = 1$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. Тогда g принадлежит тому же замкнутому множеству, что и f_i.

Если же для всех i выполняется $f_i(0,\dots,0) = 0$ и $f_i(1,\dots,1) = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то в этом случае g принадлежит тому же замкнутому множеству, что и внешняя мультиоперация f. $\square$

Лемма 15. *Для $\sigma \in \{2, *\}$ Справедливо*

1. $[T^\sigma_{01} \cup X^* \cdot (0\tilde{1}100)^t] = T^\sigma_{01} \cup X^* \cdot (0\tilde{1}\tilde{1}00)^t$;
2. $[T^\sigma_{01} \cup X^* \cdot (\tilde{1}0100)^t] = T^\sigma_{01} \cup X^* \cdot (\tilde{1}0\tilde{1}00)^t$;
3. $[T^\sigma_{01} \cup X^* \cdot (01\tilde{1}10)^t] = T^\sigma_{01} \cup X^* \cdot (0\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1}0)^t$;
4. $[T^\sigma_{01} \cup X^* \cdot (10\tilde{1}01)^t] = T^\sigma_{01} \cup X^* \cdot (\tilde{1}0\tilde{1}0\tilde{1})^t$.

Доказательство. Рассмотрим случаи 1 и 3. Случаи 2 и 4 рассматриваются аналогичным образом.

Пусть $f(x_1,\dots,x_n) \in T^{*-}_{0*,1*}$ (соответственно, T^{*-}_{0*}). Выберем мультиоперацию $f'(y, x_1,\dots,x_n)$ из $T^{*-}_{0*,11}$ (соответственно, $T^{*-}_{0*,1*}$) такую, что $f'(0,\alpha_1,\dots,\alpha_n) = f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ и $v(x_1,\dots,x_n) \in T^*_{0*1*}$ (соответственно, T^*_{0*}) для которой справедливо

$$v(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \begin{cases} *, & \text{если } f(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = * \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad \big((\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in E^n_2\big).$$

И тогда выполняется $f = s(f', v, x_1,\dots,x_n)$. $\square$

Из замечания 2 и леммы 15 следует, что

Предложение 4. *Для любого набора значений* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$*, содержащего по меньшей мере одну* $\tilde{1}$ *и не входящего в* (4)*, найдется набор* $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$ *входящий в* (4) *такой, что для* $\sigma \in \{2, *\}$ *справедливо* $[T_{01}^{\sigma} \cup X^* \cdot \alpha^t] = T_{01}^{\sigma} \cup X^* \cdot \beta^t$.

Лемма 16. *Если* $f(x,y)$ *такова, что* $f(0,0) = 0, f(0,1) = -, f(1,1) = *$*, то* $[T_{00,1*}^{*} \cup \{f\}] = T_{00,1*}^{*-}$.

Доказательство. Суперпозиция с внешней f и внутренними $f_1 = (000*)$ и $f_2 = (011*)$ позволит получить $f_3 = (0--*)$. Суперпозиция $s(f_5, f_3, f_4)$, где $f_4 = (001*)$, $f_5 = (011*)$ позволит получить $f_6 = (0-1*)$.

По мультиоперации $g(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежащей $T_{00,1*}^{*-}$ построим $g'(x_1, \ldots, x_n)$ и $g''(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежащие $T_{00,1*}^{*}$ следующим образом: для произвольного набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_2^n$ выполняется
$g'(\tilde{\alpha}) = g''(\tilde{\alpha}) = 0$, если $g(\tilde{\alpha}) = 0$, $g'(\tilde{\alpha}) = 0, g''(\tilde{\alpha}) = 1$, если $g(\tilde{\alpha}) = -$, $g'(\tilde{\alpha}) = 1, g''(\tilde{\alpha}) = 0$, если $g(\tilde{\alpha}) = 1$, $g'(\tilde{\alpha}) = *, g''(\tilde{\alpha}) = *$, если $g(\tilde{\alpha}) = *$. Мультиоперации g' и g'' принадлежат $T_{00,1*}^{*}$. И тогда выполняется $g = s(f_6, g', g'')$. □

Лемма 17. *Если* $f(x,y)$ *такова, что* $f(0,0) = *, f(0,1) = -, f(1,1) = 1$*, то* $[T_{0*,11}^{*} \cup \{f\}] = T_{0*,11}^{*-}$.

Доказательство. Рассуждения аналогичны рассуждениям в доказательстве леммы 16. Заменив мультиоперации f_1, f_2, f_4, f_5 на двойственные, получим вначале мультиоперации $f_3' = (*--1)$ и $f_6' = (*0-1)$.

Затем по мультиоперации $g(x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащей $T_{0*,11}^{*-}$, в множестве $T_{0*,11}^{*}$ выбираются мультиоперации $g'(x_1, \ldots, x_n)$ и $g''(x_1, \ldots, x_n)$ так, чтобы было справедливо равенство $g = s(f_6, g', g'')$. □

Лемма 18. *Если* $f(x,y)$ *такова, что* $f(0,0) = *, f(0,1) \in \{-, 0, 1\}, f(1,1) = *$*, то*
а) $[T_{01}^{2} \cup T_{00,1*}^{*-} \cup \{f\}] = T_{01}^{2} \cup T_{00,1*}^{*-} \cup T_{0*,1*}^{*-}$*;*
б) $[T_{01}^{2} \cup T_{0*,11}^{*-} \cup \{f\}] = T_{01}^{2} \cup T_{0*,11}^{*-} \cup T_{0*,1*}^{*-}$.

Доказательство. а) Из f и мультиопераций множества T_{01}^{2} для любого $n \in N$ можно построить n-местную мультиоперацию $u = (*11\ldots11*)$. Пусть $g(x_1, \ldots, x_n) \in T_{0*,1*}^{*-}$. В множестве $T_{00,1*}^{*-}$ найдется мультиоперация $h(y, x_1, \ldots, x_n)$ такая, что для любого набора $\tilde{\alpha} \in E_2^n$ выполняется $g(\tilde{\alpha}) = h(1, \tilde{\alpha})$. И тогда $g = s(h, u, x_1, \ldots, x_n)$.

Случай б) рассматривается аналогично. □

Лемма 19. *Если* $f(x)$ *такова, что* $f(0) = *, f(1) = -$ *или* 0*, то* $[T_{01}^{2} \cup T_{0*,11}^{*-} \cup \{f\}] = T_{01}^{2} \cup T_{0*,11}^{*-} \cup T_{0*}^{*-}$.

Доказательство. Рассмотрим случай $f = (*0)$. Из f и мультиопераций множества $T_{0,1}^{2}$ можно для любого $n \in N$ построить мультиоперацию $f_1(x_1, \ldots, x_n) = (*0\ldots0)$.

Для любой мультиоперации $g(x_1, \dots, x_n) \in T^{*-}_{0*}$ в множестве $T^{*-}_{0*,11}$ найдется мультиоперация $g_1(y, x_1, \dots, x_n)$ такая, что для любого набора $\tilde{\alpha} \in E_2^n$ выполняется $g_1(0, \tilde{\alpha}) = f(\tilde{\alpha})$. И тогда справедливо $g = s(g_1, f_1, x_1, \dots, x_n)$.

Пусть теперь $f = (*-)$. Сведем этот случай к разобранному. Пусть $h_1 = (0001)$. Суперпозиция $s(h_1, f, h_1)$ задает мультиоперацию $h_2(x, y) = (*0 * -)$, а суперпозиция $s(h_1, f, x)$ определяет мультиоперацию $(*0)$. $\square$

Заменив в приведенном доказательстве мультиоперации на двойственные, получим доказательство следующей леммы.

Лемма 20. *Если $f(x)$ такова, что $f(1) = *, f(0) = -$ или 1, то* $[T^2_{0,1} \cup T^{*-}_{00,1*} \cup \{f\}] = T^2_{0,1} \cup T^{*-}_{00,1*} \cup T^{*-}_{1*}$.

Лемма 21. *Если набор β из (4) непосредственно предшествует набору β' из (4), то $T^2_{01} \cup X^* \cdot \beta^t$ предполон в $T^2_{01} \cup X^* \cdot \beta'^t$ и $T^*_{01} \cup X^* \cdot \beta^t$ предполон в $T^*_{01} \cup X^* \cdot \beta'^t$.*

Доказательство. Доказательство следует из лемм 6, 7, 16, 17, 18, 19, 20 в соответствии со схемой на рис. 2. $\square$

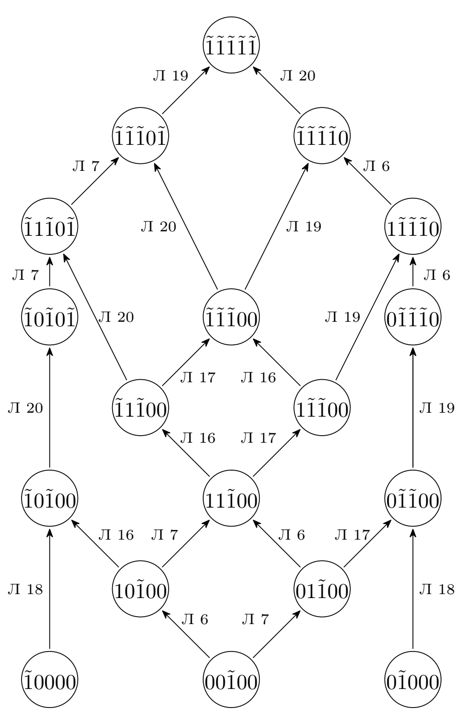


Рис. 2. Схема доказательства леммы 21

Лемма 22. *Если $A, B, A\cup C, B\cup C$ – клоны и A предполон в B,то $A\cup C$ предполон в $B\cup C$.*

Доказательство. Пусть $f \in (B\cup C)\setminus(A\cup C)$, тогда $f\in B$, $f\notin A$.

Пусть мультиоперация $g\in B\cup C$.

Если мультиоперация $g\in B$, то g представима суперпозициями, построенными из мультиоперации f и мультиопераций, принадлежащих A, т. е. может быть получена суперпозициями мультиопераций, принадлежащих $A\cup C$.

Если $g\in C$, то $g\in A\cup C$.

Таким образом, любая мультиоперация, принадлежащая $B\cup C$, представима суперпозициями, построенными из мультиопераций, принадлежащих $A\cup C$ и мультиоперации $f\in(A\cup C)\setminus(B\cup C)$. □

4 Основной результат

Лемма 23. *Интервалы $I(T^2_{01}, T^-_{01}\cup T^{*-}_{1,*}\cup T^{*-}_{0,*})$ и $I(T^*_{01}, T^{*-}_{01}\cup T^{*-}_{1,*}\cup T^{*-}_{0,*})$ содержат по 42 клона.*

Доказательство. Рассмотрим интервал $I(T^2_{01}, T^-_{01}\cup T^{*-}_{1,*}\cup T^{*-}_{0,*})$. По лемме 12 имеем $|I(T^2_{01}, T^2_{01}\cup T^*_{1,*}\cup T^*_{0,*})| = 12$ и $|I(T^-_{01}, T^-_{01}\cup T^{*-}_{1,*}\cup T^{*-}_{0,*})| = 12$.

Между двумя этими интервалами находится 18 клонов по леммам 14, 15, 21. То, что других клонов нет, следует из лемм 13, 22.

Для интервала $I(T^*_{01}, T^{*-}_{01}\cup T^{*-}_{1,*}\cup T^{*-}_{0,*})$ рассуждения повторяются. □

Интервал $I(T^2_{01}, T^-_{01}\cup T^{*-}_{1,*}\cup T^{*-}_{0,*})$ представлен на рис. 3.

Лемма 24. $[T^2_{01}\cup\{(0*-1)\}] = T^{*-}_{01}$

Доказательство. Пусть $h(x,y) = (0{*}{-}1)$. По мультиоперации $f(x_1,\ldots,x_n)\in T^{*-}_{01}$ построим мультиоперации f' и f'', принадлежащие T^2_{01}:

$$f'(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\{0,*\};\\ 1, & \text{иначе}\end{cases}$$

$$f''(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\{0,-\};\\ 1, & \text{иначе}\end{cases}$$

И тогда $f = s(h, f', f'')$ □

Лемма 25. *Пусть некоторый клон K такой, что $T^2_{01}\subseteq K$, не находится в интервале $I(T^2_{01}, T^-_{01}\cup T^{*-}_{1,*}\cup T^{*-}_{0,*})$. Тогда $T^2_0\subseteq K$ или $T^2_1\subseteq K$ или $T^*_{01}\subseteq K$ или $T^{*-}_{01}\subseteq K$.*

Доказательство. Пусть некоторый клон K не находится в интервале $I(T^2_{01}, T^-_{01}\cup T^{*-}_{1,*}\cup T^{*-}_{0,*})$. Это означает, что ему принадлежит мультиоперация $f(x_1,\ldots,x_n)$ такая, что отождествлением переменных из нее можно получить одну из следующих мультиопераций зависящих от одной переменной $(00), (11), (10), (-0), (0-), (-1), (1-), (--)$. А это означает, что

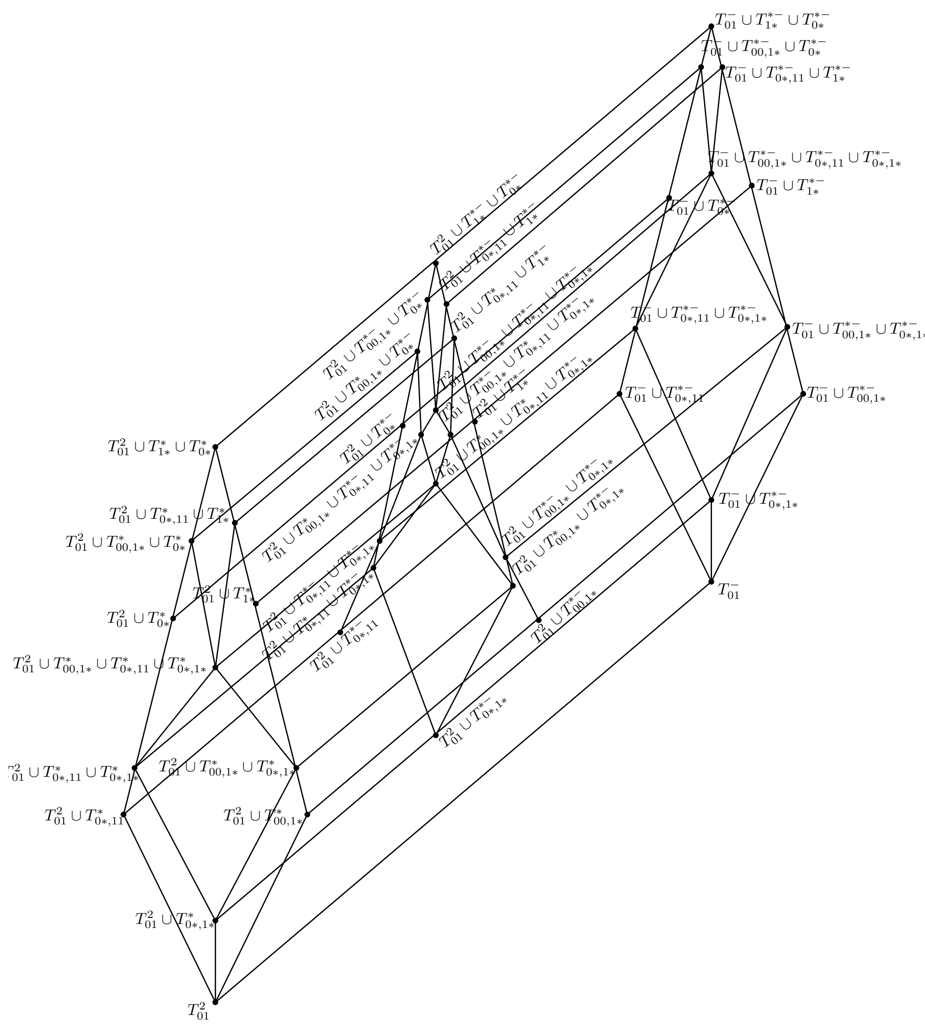


Рис. 3. Интервал $I(T^2_{01}, T^-_{01} \cup T^{*-}_{1,*} \cup T^{*-}_{0,*})$

T^2_0 содержится в K или T^2_1 содержится в K, так как любая из получившихся мультиопераций позволяет получить константу 0 или 1.

И осталось рассмотреть случай, когда отождествлением переменных из f можно получить мультиоперацию $(0 * \alpha 1)$ $(\alpha \in \{*, -\})$. Если $\alpha = -$, то по лемме 24 получим, что $T^{*-}_{01} \subseteq K$. Для $\alpha = *$ из доказательства этой же леммы получаем, что $T^*_{01} \subseteq K$. $\square$

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 26. *Пусть некоторый клон K такой, что $T^2_{01} \subseteq K$, не находится в интервале $I(T^*_{01}, T^{*-}_{01} \cup T^{*-}_{1,*} \cup T^{*-}_{0,*})$. Тогда $T^2_0 \subseteq K$ или $T^2_1 \subseteq K$.*

Теорема 1. *Интервал $I(T^2_{01}, \mathcal{M})$ содержит 108 клонов.*

Доказательство. Пусть K— клон, такой, что $T^2_{01} \subseteq K$. Если $f \in K \setminus T^2_{01}$, то отождествлением переменных у f можно получить одну из следующих одноместных операций $h_1 - h_{15}$:

x	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}	h_{11}	h_{12}	h_{13}	h_{14}	h_{15}
0	0	0	0	1	1	1	1	$*$	$*$	$*$	$*$	$-$	$-$	$-$	$-$
1	0	$*$	$-$	0	1	$*$	$-$	0	1	$*$	$-$	0	1	$-$	$*$

или одну из следующих двухместных операций $h_{16} - h_{17}$

xy	h_{16}	h_{17}
00	0	0
$\beta_1\beta_2$	$*$	$-$
11	1	1

, где $(\beta_1\beta_2) \in \{(01), (10)\}$.

Операции h_3, h_{12} позволяют получить операцию h_1, так как $s(h_3, h_3) = h_1$ и $s(h_{12}, h_{12}) = h_1$. Но $[T^2_{01} \cup \{h_1\}] = T^2_0$, поэтому $T^2_0 \subseteq K$.

Аналогично, операции h_7, h_{13} позволяют получить операцию h_5. Но $[T^2_{01} \cup \{h_5\}] = T_1$, поэтому $T^2_1 \subseteq K$.

Конъюнкция h_4 и x возвращает операцию h_1.

Конъюнкция h_{14} и x возвращает операцию h_3.

Из леммы 4 следует, что $[T^2_{01} \cup \{h_8\}] = T^2_{01} \cup T^*_{0*}$ и тогда $T^2_{01} \cup T^*_{0*} \subseteq K$.

Из леммы 5 следует, что $[T^2_{01} \cup \{h_6\}] = T^2_{01} \cup T^*_{1*}$, т.е. $T^2_{01} \cup T^*_{1*} \subseteq K$.

По лемме 6 имеем $[T^2_{01} \cup \{h_2\}] = T^2_{01} \cup T^*_{00,1*}$, а значит $T^2_{01} \cup T^*_{00,1*} \subseteq K$, а по лемме 7 — $[T^2_{01} \cup \{h_9\}] = T^2_{01} \cup T^*_{0*,11}$, а значит $T^2_{01} \cup T^*_{0*,11} \subseteq K$.

Случаи h_{11} и h_{15} сводятся к h_9 и h_2: $e^1_2(x, h_{11}) = h_9$, $e^2_2(h_{15}, x) = h_2$.

Если получена операция h_{10}, то так как операция $f \not\equiv *$, то из f можно получить двухместную операцию $u(x, y)$ такую, что $u(0, 0) = *$, $u(1, 1) = *$ и $u(0, 1) \neq *$ или $u(1, 0) \neq *$. По леммам 8 и 9 получаем, что $[T^2_{01} \cup \{u\}] = T^2_{01} \cup T^*_{0*,1*}$ или $[T^2_{01} \cup \{u\}] = T^2_{01} \cup T^{*-}_{0*,1*}$, а значит $T^2_{01} \cup T^*_{0*,1*} \subseteq K$ или $T^2_{01} \cup T^{*-}_{0*,1*} \subseteq K$.

Лемма 3 говорит, что $[T^2_{01} \cup \{h_{16}\}] = T^*_{01}$, а значит $T^*_{01} \subseteq K$ и $[T^2_{01} \cup \{h_{17}\}] = T^-_{01}$ и поэтому $T^-_{01} \subseteq K$.

Как известно [10], $\mid I(T^2_0, \mathcal{M}) \mid = 14$ и $\mid I(T^2_1, \mathcal{M}) \mid = 14$.

Клоны $T^2_{01} \cup T^*_{0*,1*}, T^2_{01} \cup T^*_{00,1*}$, $T^2_{01} \cup T^*_{0*,11}$ и T^-_{01} лежат в интервале $I(T^2_{01}, T^-_{01} \cup T^{*-}_{1,*} \cup T^{*-}_{0,*})$ мощность которого равна 42.

Клон T^*_{01} лежит в интервале $I(T^*_{01}, T^{*-}_{01} \cup T^{*-}_{1*} \cup T^{*-}_{0*})$, мощность которого также равна 42.

Учитывая, что клоны $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}^*$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}$ принадлежат $I(T^2_0, \mathcal{M})$ и $I(T^2_1, \mathcal{M})$, всего получим 108 клонов. То, что нет других клонов, следует из лемм 25, 26. □

На рис. 4 представлен общий вид интервала $I(T^2_{01}, \mathcal{M})$, разбитого на 6 блоков. Клоны, входящие в блоки, представлены на рис. 5, 6, 7.

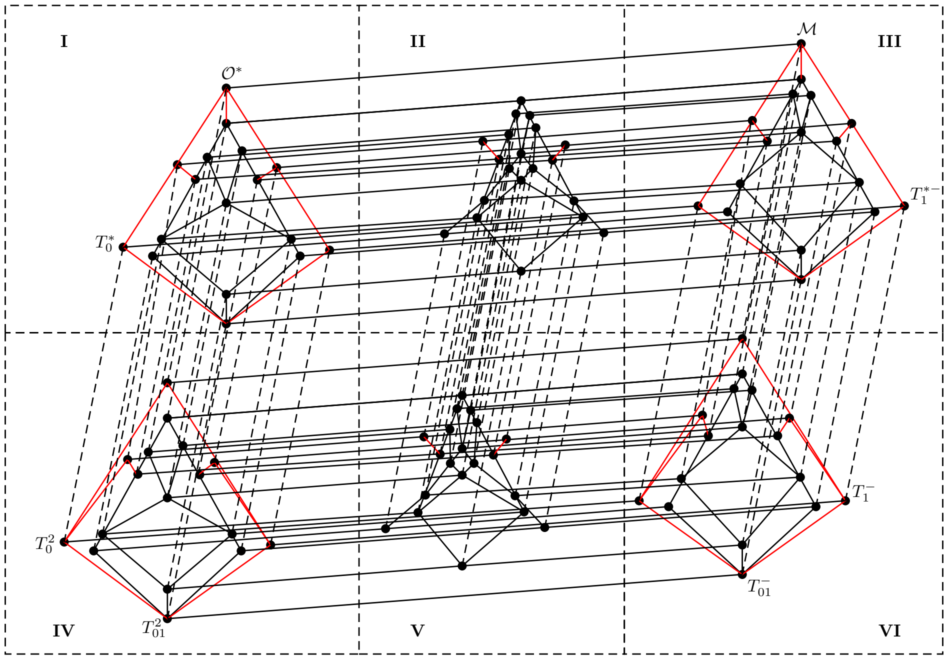


Рис. 4. Общий вид интервала $I(T_{01}^2, \mathcal{M})$

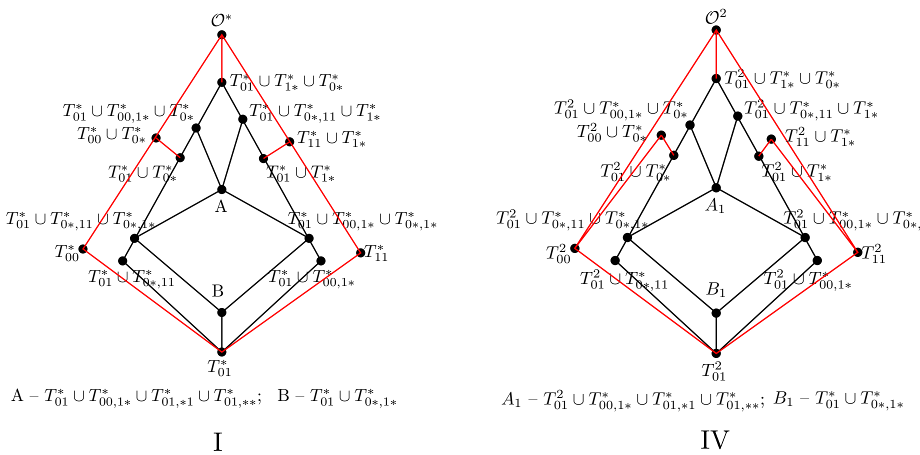
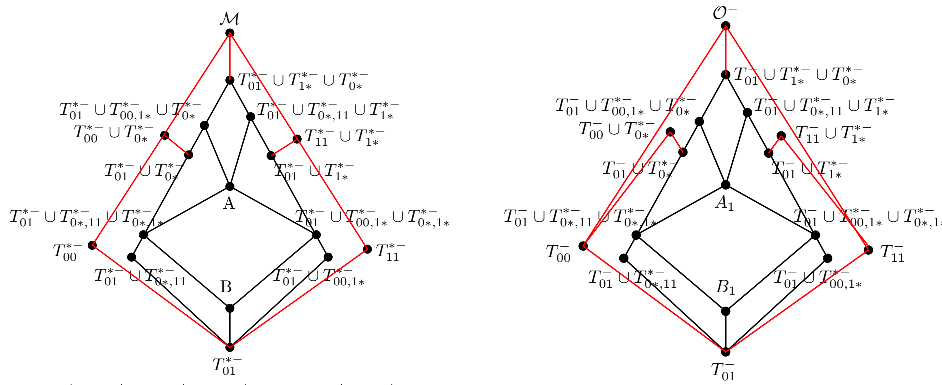


Рис. 5. Клоны блоков I, IV

5 Заключение

В работе показана конечность интервала между клоном булевых операций, сохраняющих 0 и 1, и клоном всех мультиопераций при использовании I-суперпозиции. Следующим шагом авторы видят полную характеристику интервалов, содержащих клоны максимальных булевых



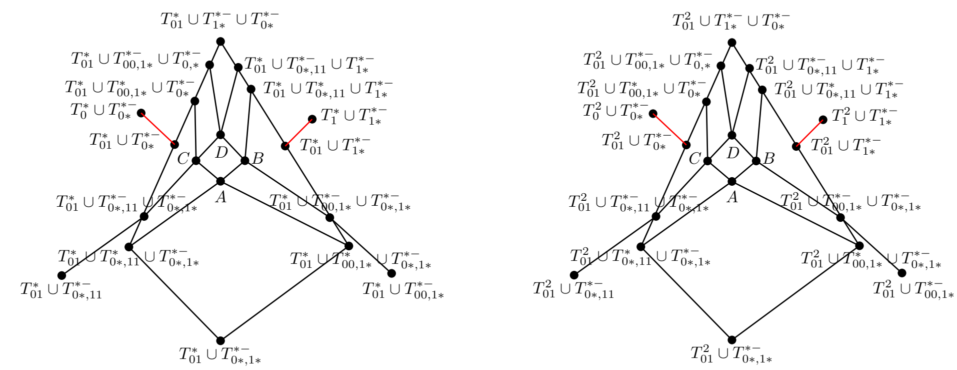
$A - T^{*-}_{01} \cup T^{*-}_{00,1*} \cup T^{*-}_{01,*1} \cup T^{*-}_{01,**}$; B – $T^{*-}_{01} \cup T^{*-}_{0*,1*}$

III

$A_1 - T^{-}_{01} \cup T^{*-}_{00,1*} \cup T^{*-}_{01,*1} \cup T^{*-}_{01,**}$; $B_1 - T^{*-}_{01} \cup T^{*-}_{0*,1*}$

VI

Рис. 6. Клоны блоков III, VI



$A - T^{*}_{01} \cup T^{*}_{00,1*} \cup T^{*}_{0*,11} \cup T^{*-}_{0*,1*}$; $B - T^{*}_{01} \cup T^{*-}_{00,1*} \cup T^{*}_{0*,11} \cup T^{*-}_{0*,1*}$;
$C - T^{*}_{01} \cup T^{*}_{00,1*} \cup T^{*-}_{0*,11} \cup T^{*-}_{0*,1*}$; $D - T^{*}_{01} \cup T^{*-}_{00,1*} \cup T^{*-}_{0*,11} \cup T^{*-}_{0*,1*}$

II

$A - T^{2}_{01} \cup T^{*}_{00,1*} \cup T^{*}_{0*,11} \cup T^{*-}_{0*,1*}$; $B - T^{2}_{01} \cup T^{*-}_{00,1*} \cup T^{*}_{0*,11} \cup T^{*-}_{0*,1*}$;
$C - T^{2}_{01} \cup T^{*}_{00,1*} \cup T^{*-}_{0*,11} \cup T^{*-}_{0*,1*}$; $D - T^{2}_{01} \cup T^{*-}_{00,1*} \cup T^{*-}_{0*,11} \cup T^{*-}_{0*,1*}$

V

Рис. 7. Клоны блоков II, V

операций, аналогичную приведенной в [3] для клонов частичных операций.

References

[1] Alekseev V.B., Voronenko A.A. On some closed classes in partial two-valued logic, Discrete Math. Appl., 4:5 (1994), Pp. 401–419. Zbl 0818.06013

[2] Badmaev S.A., Dugarov A.E., Fomina I.V., Sharankhaev I.K., On some intervals in the lattice of ultraclones of rank 2, Sib. Elektron. Mat. Izv., 18:2 (2021), Pp. 1210–1218. Zbl 7440274

[3] Couceiro M., Haddad L., Scholzel K., Waldhauser T. A Solution to a Problem of D. Lau: Complete Classification of Intervals in the Lattice of Partial Boolean Clones // Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing, 2017, 28 (1), pp.47-58

[4] Haddad L.; Lau D.; Rosenberg I. Intervals of partial clones containing maximal clones // J. Autom. Lang. Comb., 2006, V. 11, No. 4, Pp. 399-421.

[5] Khaltanova S.Yu., On two isomorphic intervals in the lattice of ultraclones on two-elements set, Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat., 7 (2014), Pp. 133–140. Zbl 1333.08004
[6] Khaltanova S.Yu. On clones of ultrafunctions preserving zero and one, Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics, 1 (2012), Pp. 93–98.
[7] Lau D. Function algebras on finite sets. A basic course on many-valued logic and clone theory. Berlin: Springer-Verlag. 2006. 668 p.
[8] Marchenkov S. S. Functional Systems with the Superposition Operation. — M.: FIZMATLIT, 2004. — 104 pp.
[9] Panteleev V.I. A completeness criterion for extendable Boolean functions // Vestnik of Samara State University. Natural Science Series, No. 2 (68), 2009.
[10] Panteleev V.I., Khaltanova S.Yu. On some intervals in the lattice of clones of partial ultrafunctions, Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat., 2010. Vol. 3, No. 4, Pp. 80–87.
[11] Panteleev V. I., Taglasov E. S. ES_I-closure of rank 2 multi-functions: completeness criterion, classification and types of bases. *Intelligent Systems. Theory and Applications*, 2021, vol. 25, no. 2, Pp. 55–80.
[12] Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic / E. L. Post // Annals of Math. Studies. – Princeton: Univ. Press, 1941. – Vol. 5. – 122 p.
[13] Strauch B. Die Menge $\mathcal{M}(M \cap T_0 \cap T_1)$. Preprint Universitat Rostock, Juni 1995, 16 p.
[14] Strauch B. On partial classes containing all monotone and zero-preserving total Boolean functions. Math. Log. Quart. 43, Pp. 510–524.

Vladimir Innokent'yevich Panteleev
Dorzhi Banzarov Buryat State University,
24a, Smolina str.,
670000, Ulan-Ude, Russia
Institute of Mathematics and Information Technologies, Irkutsk State University,
K. Marx st, 1,
664000, Irkutsk, Russia
Email address: vl.panteleyev@gmail.com

Soelma Yur'evna Haltanova
Dorzhi Banzarov Buryat State University,
24a, Smolina str.,
670000, Ulan-Ude, Russia
Email address: soelabad@mail.ru