

ОБ ИНТЕРВАЛЕ МЕЖДУ КЛОНОМ БУЛЕВЫХ
ОПЕРАЦИЙ, СОХРАНЯЮЩИХ 0 И 1, И КЛОНОМ
ВСЕХ МУЛЬТИОПЕРАЦИЙВ.И. ПАНТЕЛЕЕВ  AND С.Ю. ХАЛТАНОВА 

Abstract: The paper considers multioperations defined on a two-element set and describes the interval between the clone of Boolean operations preserving 0 and 1 and the clone of all multioperations. It is shown that this interval contains 108 clones.

Keywords: multifunction, multioperation, parametric closure, composition, completeness criterion, interval.

1 Введение

Исследование структуры замкнутых относительно суперпозиции множеств — традиционная задача в теории дискретных функций. К настоящему времени полное решение этой задачи есть только для булевых функций [11]. Решетка по включению всех замкнутых относительно суперпозиции множеств булевых функций является счетной.

Но уже для функций k -значной логики такая решетка является континуальной. В связи с этим встает задача описания фрагментов или интервалов в рассматриваемых решетках. При этом, как правило, рассматриваются замкнутые множества, которые содержат так называемые

PANTELEEV V.I., HALTANOVA S.YU. ON THE INTERVAL BETWEEN THE CLONE OF ALL BOOLEAN OPERATIONS PRESERVING 0 AND 1 AND THE CLONE OF ALL MULTIOPERATIONS.

© 2025 ПАНТЕЛЕЕВ В.И., ХАЛТАНОВА С.Ю..

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00011 в Бурятском государственном университете им. Д. Банзарова, <https://rscf.ru/project/24-21-00011/>.

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

проекции или операции-переменные. Такие множества называют клонами.

Стоит заметить, что в литературе наряду с термином «функция» используется и термин «операция», который мы и будем использовать ниже.

В теории дискретных операций одним из объектов являются мультиоперации — операции, заданные на некотором конечном множестве и возвращающие подмножества (в том числе и пустое) исходного множества. Множество мультиопераций содержит в себе множество операций, множество так называемых частичных операций, гипер- и мультиопераций. Решетка множеств мультиопераций, замкнутых относительно суперпозиции, является континуальной даже в том случае, если мультиоперации заданы на двухэлементном множестве.

Одними из первых, кто начал изучение интервалов в множестве мультиопераций, были В. Б. Алексеев и А. А. Вороненко. Ими рассматривались интервалы между так называемыми максимальными (предполными) клонами булевых операций и клоном всех частичных операций. Для четырех клонов такие интервалы оказались конечными, а для клона линейных операций интервал оказался континуальным [1].

Немного в другой постановке задача описания интервалов рассматривалась в работах [4, 7, 12, 13]. Для частичных операций полная характеристика интервалов, содержащих клоны максимальных булевых операций, описана в [3].

Стоит заметить, что в отличие от булевых операций и частичных операций, суперпозиция гиперопераций и мультиопераций может порождать различные гипер- и мультиоперации. Исторически первым является подход в котором суперпозиция строится на основе теоретико-множественной операции объединения, так называемая U -суперпозиция. Но суперпозиция может быть основана и на пересечении — I -суперпозиция [10].

Исследование различных интервалов в решетке замкнутых относительно I -суперпозиции множеств мультиопераций приведено в работах [2, 5, 6, 9].

В настоящей работе рассматриваются мультиоперации, заданные на двухэлементном множестве, и описывается интервал между клоном булевых операций, сохраняющих 0 и 1, и клоном всех мультиопераций при использовании I -суперпозиции. Показано, что этот интервал содержит 108 клонов, в том числе и клоны частичных операций, содержащих клон $T_0 \cap T_1$ из [7, P. 628].

2 Основные понятия

Для конечного множества A его мощность будем обозначать как $|A|$.

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. Определим следующие множества: для $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{M}_{2,n} = \{f \mid f : E_2^n \rightarrow 2^{E_2}\}, \mathcal{M} = \bigcup \mathcal{M}_{2,n};$$

$$\mathcal{H}_{2,n} = \{f : f \in \mathcal{M}_{2,n} \text{ и } |f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)| \geq 1 \text{ для любого набора } (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\}$$

из E_2^n , $\mathcal{H} = \bigcup_n \mathcal{H}_{2,n}$;

$\mathcal{O}_{2,n}^* = \{f : f \in \mathcal{M}_{2,n} \text{ и } |f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)| \leq 1 \text{ для любого набора } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ из } E_2^n\}$, $\mathcal{O}^* = \bigcup_n \mathcal{O}_{2,n}^*$;

$\mathcal{O}_{2,n} = \{f : f \in \mathcal{M}_{2,n} \text{ и } |f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)| = 1 \text{ для любого набора } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ из } E_2^n\}$, $\mathcal{O} = \bigcup_n \mathcal{O}_{2,n}$.

Операции из \mathcal{O} называют булевыми, из \mathcal{O}^* — частичными, из \mathcal{H} — гипер-, из \mathcal{M} — мультиоперациями.

Мультиоперация $f(x_1, \dots, x_n)$ такая, что $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \{\alpha_i\}$ для любого набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E_2^n$ называется селекторной ($1 \leq i \leq n$).

Очевидно, что выполняются следующие включения: $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}^* \subseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}$.

Для мультиопераций будем использовать запись как в виде вектора-строки, так и в виде вектора-столбца значений функции на всех наборах, расположенных в натуральном порядке, т.е. запись $f = (\{1\}\{0\}\emptyset\{0,1\})$ означает, что $f(0,0) = \{1\}$, $f(0,1) = \{0\}$, $f(1,0) = \emptyset$ и $f(1,1) = \{0,1\}$.

Пусть дана n -местная мультиоперация f и m -местные мультиоперации f_1, \dots, f_n . Суперпозиция $s(f, f_1, \dots, f_n)$ с внешней мультиоперацией f и внутренними мультиоперациями f_1, \dots, f_n определяет m -местную мультиоперацию g следующим образом [10]: для произвольного набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in E_2^m$ выполняется

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \begin{cases} \bigcap_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{если это пересече-} \\ \text{ние не равно } \emptyset; & \\ \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1)$$

Определение (1) фактически задает вложение \mathcal{M} в множество \mathcal{O}_4 — множество операций 4-х значной логики, при этом каждая такая операция однозначно определяется своими значениями на наборах из множества E_2 . Если определить 4-х значные операции как операции на множестве $F' = \{*, 0, 1, -\}$ при соответствии $\emptyset \leftrightarrow *$, $\{0\} \leftrightarrow 0$, $\{1\} \leftrightarrow 1$, $\{0,1\} \leftrightarrow -$, то на наборах, построенных из 0 и 1, операция может принимать любое значение из множества F' , на наборах, содержащих хотя бы одну *, операция обязательно принимает значение *, на остальных наборах значение операции вычисляется в соответствии с (1). Подробнее об этом можно посмотреть в [10]. С учетом описанного соответствия вместо $(\{1\}\{0\}\emptyset\{0,1\})$, например, будем писать $f = (10*-)$.

Клон, частичный, гипер-, мультиклон — множество операций, частичных, гипер- и мультиопераций, соответственно, содержащее все селекторные операции и замкнутое относительно суперпозиции.

Клоны, частичные, гипер-, мультиклоны ниже будем называть просто клонами, если это не вызывает недоразумений.

Интервалом $\mathcal{I}(A, B)$ называется частично упорядоченное по включению множество всех клонов, содержащих клон A и являющихся подмножествами клона B .

Интервалы, обычно, представляются в виде диаграмм, где клоны изображаются точками и точка, представляющая клон A_1 расположена выше (или правее) и соединена отрезком с точкой, представляющей клон B_1 , если множество A_1 непосредственно содержит B_1 .

В [7] приведены некоторые сведения о различных интервалах в решетке клонов частичных операций.

Пусть $*$ — множество мультиопераций, которые на всех наборах принимают значение $*$, тогда очевидной является следующая лемма.

Лемма 1. *Если A — клон в \mathcal{M} , то $A \cup *$ — клон.*

Замечание 1. *С учетом леммы 1 мы рассматриваем только такие клоны, которые содержат множество $*$. В [7] клоны A и $A \cup *$ из леммы 1 считаются различными.*

3 Вспомогательные результаты

Если A — множество, то через $[A]$ обозначим замыкание A . Понятия полноты и предполноты используем обычным образом.

Лемма 2. *Справедливы утверждения:*

$$(00) \in [\{(0-)\}] \cap [\{-0\}] \text{ и } (11) \in [\{(1-)\}] \cap [\{-1\}].$$

Доказательство. Если $f_1(x) = (0-)$, $f_2(x) = (-0)$, $f_3(x) = (1-)$, $f_4(x) = (-1)$, то $s(f_1, f_1) = (00)$, $s(f_2, f_2) = f_1$, $s(f_3, f_3) = (11)$ и $s(f_4, f_4) = f_3$. \square

Пусть $Q \subseteq \{0, 1\}$ и $Q \neq \emptyset$. Определим множества:

$$T_Q^2 = \{f \mid f \in \mathcal{O} \text{ и } a \in Q \Rightarrow f(a, \dots, a) = a\};$$

$$T_Q^* = \{f \mid f \in \mathcal{O}^* \text{ и } a \in Q \Rightarrow f(a, \dots, a) = a\};$$

$$T_Q^- = \{f \mid f \in \mathcal{H} \text{ и } a \in Q \Rightarrow f(a, \dots, a) = a\};$$

$$T_Q^{*-} = \{f \mid f \in \mathcal{M} \text{ и } a \in Q \Rightarrow f(a, \dots, a) = a\}.$$

Договоримся далее для записи множества Q не использовать фигурные скобки и запятые: например, вместо $T_{\{0,1\}}^2$ будем писать T_{01}^2 .

Предложение 1. *Для любого $Q \subseteq \{0, 1\}$ и $Q \neq \emptyset$ множества T_Q^2 , T_Q^* , T_Q^- , T_Q^{*-} являются клонами.*

Доказательство. Операции-проекции сохраняют константы, а множество мультиопераций, сохраняющих некоторую константу, очевидно, является замкнутым относительно суперпозиции. \square

Лемма 3. *Пусть $f_1(x_1, \dots, x_n)$ и $f_2(x_1, \dots, x_n)$ — мультиоперации, такие, что*

$$f_1(0, \dots, 0) = f_2(0, \dots, 0) = 0, f_1(1, \dots, 1) = f_2(1, \dots, 1) = 1$$

и найдутся наборы $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E_2^n$ и $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in E_2^n$ такие, что $f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = *$ и $f_2(\beta_1, \dots, \beta_n) = -$. Тогда

$$T_{01}^* \subseteq [T_{01}^2 \cup \{f_1\}] \text{ и } T_{01}^- \subseteq [T_{01}^2 \cup \{f_2\}].$$

Доказательство. Отождествлением и перестановкой переменных у мультиоперации f_1 можно получить 2-х местную мультиоперацию $h(x_1, x_2)$, такую, что $h(0, 0) = 0$, $h(0, 1) = *$, $h(1, 1) = 1$. Пусть $g(x_1, \dots, x_m) \in T_{01}^*$. По g построим две мультиоперации $u_1(x_1, \dots, x_m)$ и $u_2(x_1, \dots, x_m)$ принадлежащие T_{01} следующим образом:

$$u_1(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \begin{cases} 0, & \text{если } g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \{0, *\}; \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$u_2(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \begin{cases} 0, & \text{если } g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0; \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что справедливо равенство $g = s(h, u_1, u_2)$.

Для мультиоперации f_2 рассуждения проводим аналогичным образом. \square

Определим далее множества

$$T_{0a,1b}^{*-} = \{f : f \in \mathcal{M} \text{ и } f(0, \dots, 0) = a, f(1, \dots, 1) = b\}, a \in \{0, *\}, b \in \{1, *\}$$

и

$$T_{0*}^{*-} = \{f : f \in \mathcal{M} \text{ и } f(0, \dots, 0) = *\}, T_{1*}^{*-} = \{f : f \in \mathcal{M} \text{ и } f(1, \dots, 1) = *\}.$$

Положим

$$T_{0a,1b}^* = T_{0a,1b}^{*-} \cap \mathcal{O}^*, T_{0*}^* = T_{0*}^{*-} \cap \mathcal{O}^*, T_{1*}^* = T_{1*}^{*-} \cap \mathcal{O}^*.$$

Замкнутость введенных множеств проверяется несложным образом.

Замечание 2. *Справедливы следующие включения*

- 1) $T_{00,1*}^* \subseteq T_{1*}^*$, $T_{0*,11}^* \subseteq T_{0*}^*$, $T_{0*,1*}^* \subseteq T_{1*}^* \cap T_{0*}^*$;
- 2) $T_{00,1*}^{*-} \subseteq T_{1*}^{*-}$, $T_{0*,11}^{*-} \subseteq T_{0*}^{*-}$, $T_{0*,1*}^{*-} \subseteq T_{1*}^{*-} \cap T_{0*}^{*-}$;
- 3) $T_{0*,1*}^* \subseteq [T_{01}^2 \cup T_{00,1*}^* \cup T_{0*,11}^*]$;
- 4) $T_{0*,1*}^{*-} \subseteq [T_{01}^2 \cup T_{00,1*}^{*-} \cup T_{0*,11}^{*-}]$.

Лемма 4. *Справедливы следующие утверждения:*

- a) $[T_{01}^2 \cup \{(*0)\}] = T_{01}^2 \cup T_{0*}^*$; b) $[T_{01}^- \cup \{(*0)\}] = T_{01}^- \cup T_{0*}^{*-}$;
- c) $[T_{01}^* \cup \{(*0)\}] = T_{01}^* \cup T_{0*}^*$; d) $[T_{01}^{*-} \cup \{(*0)\}] = T_{01}^{*-} \cup T_{0*}^{*-}$;

Доказательство. Так как мультиоперация $(*0)$ принадлежит T_{0*}^* (и T_{0*}^{*-}), то включение левой части в правую, очевидно, справедливо.

Для доказательства справедливости обратного включения рассмотрим отдельно случаи а), с), d) и случай б).

Случаи а), с), d). На примере случая d) приведем рассуждение, легко переносимое на остальные рассматриваемые варианты.

Пусть мультиоперация $f(x_1, \dots, x_n) \in T_{0*}^{*-}$.

Из мультиоперации $(*0)$ и мультиопераций множества T_{01}^{*-} можно получить мультиоперацию $h_1(x_1, \dots, x_n)$ такую, что $h_1(0, \dots, 0) = *$, а на всех остальных наборах h_1 возвращает 0. В множестве T_{01}^{*-} есть мультиоперация $g(y, x_1, \dots, x_n)$ такая, что $g(0, 0, \dots, 0) = 0$ и $g(0, \tilde{\beta}) = f(\tilde{\beta})$, ($\tilde{\beta} \in E_2^n$).

И тогда $f(x_1, \dots, x_n) = s(g, h_1, x_1, \dots, x_n)$.

В случае b) по мультиоперации $f(x_1, \dots, x_n) \in T_{0*}^{*-}$ из $(*0)$ и мультиопераций множества T_{01}^2 можно получить мультиоперацию $h_1(x_1, \dots, x_n)$

такую, что для любого $\tilde{\alpha} \in E_2^n$ выполняется $h_1(\tilde{\alpha}) = \begin{cases} *, & \text{если } f(\tilde{\alpha}) = *; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

В множестве T_{01}^- есть мультиоперация $g(y, x_1, \dots, x_n)$ для которой $g(0, 0, \dots, 0) = 0$ и для произвольного оставшегося набора $\tilde{\beta} \in E_2^n$ вы-

полняется $g(0, \tilde{\beta}) = \begin{cases} f(\tilde{\beta}), & \text{если } f(\tilde{\beta}) \in \{0, 1, -\}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

И в этом случае справедливо $f(x_1, \dots, x_n) = s(g, h_1, x_1, \dots, x_n)$. \square

Аналогичным образом доказываются

Лемма 5. Верны равенства

$$\begin{aligned} a) [T_{01}^2 \cup \{(1*)\}] &= T_{01}^2 \cup T_{1*}^*; & b) [T_{01}^* \cup \{(1*)\}] &= T_{01}^* \cup T_{1*}^*; \\ c) [T_{01}^- \cup \{(1*)\}] &= T_{01}^- \cup T_{1*}^{*-}; & d) [T_{01}^{*-} \cup \{(1*)\}] &= T_{01}^{*-} \cup T_{1*}^{*-}. \end{aligned}$$

Лемма 6. Верны равенства

$$\begin{aligned} a) [T_{01}^2 \cup \{(0*)\}] &= T_{01}^2 \cup T_{00,1*}^*; & b) [T_{01}^* \cup \{(0*)\}] &= T_{01}^* \cup T_{00,1*}^*; \\ c) [T_{01}^- \cup \{(0*)\}] &= T_{01}^- \cup T_{00,1*}^{*-}; & d) [T_{01}^{*-} \cup \{(0*)\}] &= T_{01}^{*-} \cup T_{00,1*}^{*-}. \end{aligned}$$

Лемма 7. Верны равенства

$$\begin{aligned} a) [T_{01}^2 \cup \{(*1)\}] &= T_{01}^2 \cup T_{0*,11}^*; & b) [T_{01}^* \cup \{(*1)\}] &= T_{01}^* \cup T_{0*,11}^*; \\ c) [T_{01}^- \cup \{(*1)\}] &= T_{01}^- \cup T_{0*,11}^{*-}; & d) [T_{01}^{*-} \cup \{(*1)\}] &= T_{01}^{*-} \cup T_{0*,11}^{*-}. \end{aligned}$$

Лемма 8. Если мультиоперация $u(x, y) \in \mathcal{O}^*$ такова, что $u(0, 0) = *$, $u(1, 1) = *$ и $u(0, 1) \neq *$ или $u(1, 0) \neq *$, то $[T_{01}^2 \cup \{u\}] = T_{01}^2 \cup T_{0*,1*}^*$.

Доказательство. Включение $[T_{01}^2 \cup \{u\}] \subseteq T_{01}^2 \cup T_{0*,1*}^*$ очевидно.

Пусть для определенности $u(0, 1) = 0$ и пусть мультиоперация $g(x_1, \dots, x_n) \in T_{0*,1*}^*$. Тогда

$$g(0, \dots, 0) = *, g(1, \dots, 1) = *$$

и пусть далее на наборах $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_r$ значение функции g равно 0; на наборах $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_s$ значение функции равно 1; на наборах $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_t$ значение функции равно *, где $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_j, \tilde{\gamma}_l$ принадлежат E_2^n , $i \in \{1, \dots, r\}$, $j \in \{1, \dots, s\}$, $l \in \{1, \dots, t\}$.

Из мультиоперации u несложно получить мультиоперации $u_1(x, y) = (*00*)$ и $u_2(x, y) = (*01*)$: для первой в качестве внешней мультиоперации берем u , а в качестве внутренних — (0001) и (0111) , а для второй в качестве внешней мультиоперации берем (00110001) , а в качестве внутренних — $(*00*)$, (0011) и (0101) .

В множестве T_{01}^2 выберем мультиоперации $h_1(x_1, \dots, x_n)$ и $h_2(x_1, \dots, x_n)$ такие, что

$$\begin{aligned} h_1(0, \dots, 0) &= h_2(0, \dots, 0) = 0, h_1(1, \dots, 1) = h_2(1, \dots, 1) = 1 \\ h_1(\tilde{\alpha}_1) &= \dots h_1(\tilde{\alpha}_r) = 0, h_2(\tilde{\alpha}_1) = \dots h_2(\tilde{\alpha}_r) = 1, \\ h_1(\tilde{\beta}_1) &= \dots h_1(\tilde{\beta}_s) = 1, h_2(\tilde{\beta}_1) = \dots h_2(\tilde{\beta}_s) = 0, \\ h_1(\tilde{\gamma}_1) &= \dots h_1(\tilde{\gamma}_s) = 0, h_2(\tilde{\gamma}_1) = \dots h_2(\tilde{\gamma}_t) = 0. \end{aligned}$$

И тогда $g(x_1, \dots, x_n) = s(u_2, h_1, h_2)$. \square

Лемма 9. Если двухместная операция $v(x, y) \in \mathcal{M}$ такова, что $v(0, 0) = *$, $v(1, 1) = *$ и $v(0, 1) = -$ или $v(1, 0) = -$, то $[T_{01}^2 \cup \{v\}] = T_{01}^2 \cup T_{0*,1*}^{*-}$.

Доказательство. Включение $[T_{01}^2 \cup \{v\}] \subseteq T_{01}^2 \cup T_{0*,1*}^{*-}$ очевидно.

Для определенности предположим, что $v(0, 1) = -$. Далее строим мультиоперации $v_1(x_1, x_2) = (*--*)$, $v_2(x_1, x_2) = (*01*)$ и $v_3(x_1, x_2, x_3) = (*--* *01*)$. Из $v_3(x_1, x_2, x_3)$ и мультиопераций множества T_{01}^2 можно построить любую мультиоперацию из множества $T_{0*,1*}^{*-}$. \square

Определение 1. Для любого набора множеств (A_1, \dots, A_n) где $A_i \in \{T_{00,1*}^*, T_{0*,11}^*, T_{0*,1*}^*, T_{0*}^*, T_{1*}^*, T_{00,1*}^{*-}, T_{0*,11}^{*-}, T_{0*,1*}^{*-}, T_{0*}^{*-}, T_{1*}^{*-}\}$ и набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_i \in \{0, 1, \tilde{1}\}$ положим по определению

$$(A_1, \dots, A_n) \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t = \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} \alpha_i \cdot A_i,$$

$$\text{где } 0 \cdot A = \emptyset, 1 \cdot A = A \text{ и } \tilde{1} \cdot A = \begin{cases} T_{0a,1b}^{*-}, & \text{если } A = T_{0a,1b}^*; \\ T_{0*}^{*-}, & \text{если } A = T_{0*}^*; \\ T_{1*}^{*-}, & \text{если } A = T_{1*}^*; \\ A, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть

$$X^* = (T_{00,1*}^*, T_{0*,11}^*, T_{0*,1*}^*, T_{0*}^*, T_{1*}^*) \text{ и } X^{*-} = (T_{00,1*}^{*-}, T_{0*,11}^{*-}, T_{0*,1*}^{*-}, T_{0*}^{*-}, T_{1*}^{*-})$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \subseteq \{0, 1\}^5$. Зададим множества

$$B^\alpha = T_{01}^2 \cup X^* \cdot \alpha^t, \quad B^{\alpha*} = T_{01}^* \cup X^* \cdot \alpha^t, \quad (1)$$

$$B^{\alpha-} = T_{01}^- \cup X^{*-} \cdot \alpha^t, \quad B^{\alpha*-} = T_{01}^{*-} \cup X^{*-} \cdot \alpha^t \quad (2)$$

Рассмотрим двенадцать наборов значений $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ для (1)–(2):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
α_1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
α_2	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
α_3	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
α_4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
α_5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1

(3)

и 18 следующих наборов:

$$C = \{(00\tilde{1}00), (\tilde{1}0000), (0\tilde{1}000), (01\tilde{1}00), (0\tilde{1}\tilde{1}00), (10\tilde{1}00), (\tilde{1}0\tilde{1}00), \\ (11\tilde{1}00), (\tilde{1}1\tilde{1}00), (1\tilde{1}\tilde{1}00), (\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1}00), (0\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1}0), (\tilde{1}0\tilde{1}0\tilde{1}), (1\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1}0), (\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1}0\tilde{1}), \\ (\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1}0), (\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1}0\tilde{1}), (\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1})\}. \quad (4)$$

Предложение 2. Для любого набора значений $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ из (3) множества $V^\alpha, V^{\alpha*}, V^{\alpha-}, V^{\alpha*-}$ являются клонами.

Доказательство. Множества $T_{01}^2, T_{01}^*, T_{01}^-, T_{01}^{*-}$ являются клонами, поэтому, во-первых, они содержат проекции, а во-вторых, нет смысла рассматривать суперпозиции в которых внешняя и все внутренние мультиоперации принадлежат одному из этих множеств. Если все внутренние принадлежат одному из этих множеств, то мультиоперация, определяемая суперпозицией, принадлежит тому множеству, которому принадлежит внешняя мультиоперация.

Если одна из внутренних мультиопераций принадлежит одному из множеств $T_{0*}^\beta, T_{1*}^\beta, T_{0*,1*}^\beta$ ($\beta \in \{*, *- \}$), то мультиоперация, определяемая суперпозицией, принадлежит этому же множеству.

Поэтому рассматриваем случаи, когда все внутренние принадлежат $T_{00,1*}^\beta$ или $T_{0*,11}^\beta$ ($\beta \in \{*, *- \}$). Для $T_{0*,11}^\beta$, например, справедливо, что мультиоперация, определяемая суперпозицией на наборе из одних единиц возвращает 1. Если же одна из внутренних мультиопераций на наборе из одних нулей возвращает *, то и мультиоперация, определяемая суперпозицией, на наборе из одних нулей возвращает *. \square

Из замечания 2 следует, что

Предложение 3. Для любого набора значений $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ не входящего в (3) найдется набор $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$ входящий в (3) такой, что $[V^\alpha] = V^\beta, [V^{\alpha*}] = V^{\beta*}, [V^{\alpha-}] = V^{\beta-}, [V^{\alpha*-}] = V^{\beta*-}$.

Обычное отношение \leq на множестве $\{0, 1\}$: $0 \leq 0, 0 \leq 1, 1 \leq 1$ распространяем на множество $\{0, 1, \tilde{1}\}$ ($0 \leq \tilde{1}, 1 \leq \tilde{1}, \tilde{1} \leq \tilde{1}$) и на наборы из (3) и (4).

Лемма 10. Если для двух наборов α и α' из (3) выполняется $\alpha \leq \alpha'$, то $V^\alpha \subseteq V^{\alpha'}, V^{\alpha*} \subseteq V^{\alpha'*}, V^{\alpha-} \subseteq V^{\alpha'-}, V^{\alpha*-} \subseteq V^{\alpha'*-}$.

Доказательство. Справедливость утверждения следует из замечания 2. \square

Определение 2. Для наборов α и α' будем говорить, что α непосредственно предшествует α' , если $\alpha \leq \alpha'$ и для любого α'' из того, что $\alpha \leq \alpha''$ и $\alpha'' \leq \alpha'$ следует, что $\alpha'' = \alpha$ или $\alpha'' = \alpha'$.

Лемма 11. Если набор α из (3) непосредственно предшествует набору α' из (3), то V^α ($V^{\alpha*}, V^{\alpha-}, V^{\alpha*-}$) предполон в $V^{\alpha'}$ (соответственно, $V^{\alpha'*}, V^{\alpha'-}, V^{\alpha'*-}$).

Доказательство. Следует из замечания 1 и лемм 4, 5, 6, 7, 8, 9 в соответствии со схемой на рис. 1. \square

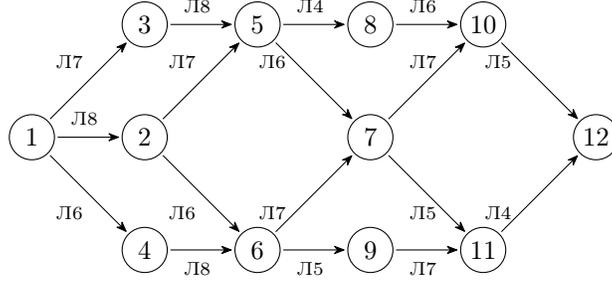


Рис. 1. Схема применения лемм

Из предложения 2 и леммы 11 вытекает

Лемма 12. *Справедливо*

- (1) $|I(T_{01}^2, T_{01}^2 \cup T_{1,*}^* \cup T_{0,*}^*)| = 12$,
- (2) $|I(T_{01}^*, T_{01}^* \cup T_{1,*}^{*-} \cup T_{0,*}^{*-})| = 12$,
- (3) $|I(T_{01}^-, T_{01}^- \cup T_{1,*}^{*-} \cup T_{0,*}^{*-})| = 12$,
- (4) $|I(T_{01}^{*-}, T_{01}^{*-} \cup T_{1,*}^{*-} \cup T_{0,*}^{*-})| = 12$.

Лемма 13. *Справедливо* $[T_{01}^- \cup B^\alpha] = B^{\alpha^-}$.

Доказательство. Пусть $D^{*-} \in \{T_{00,1*}^{*-}, T_{0*,1*}^{*-}, T_{0*}^{*-}\}$, а соответствующее множество $D^* \in \{T_{00,1*}^*, T_{0*,1*}^*, T_{0*}^*\}$. По мультиоперации $f(x_1, \dots, x_n)$ из D^{*-} построим мультиоперации $v(x_1, \dots, x_n) \in D^*$ и $f'(y, x_1, \dots, x_n) \in T_{01}^-$ следующим образом:

$$v(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{cases} *, & \text{если } f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = *; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

$f'(0, 0, \dots, 0) = 0$ и для любого набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ из оставшихся

$$f'(0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{cases} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n), & \text{если } f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq *; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Верно равенство $f(x_1, \dots, x_n) = s(f', v, x_1, \dots, x_n)$.

Для $D^{*-} \in \{T_{1*}^{*-}, T_{0*,11}^{*-}\}$ рассуждения проводим двойственным образом. \square

Следствие 1. $[T_{01}^{*-} \cup B^{\alpha*}] = B^{\alpha^{*-}}$

Несложно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 14. *Для любого $\beta \in C$ множества $T_{01}^2 \cup X^* \cdot \beta^t$ и $T_{01}^* \cup X^* \cdot \beta^t$ являются клонами.*

Лемма 15. Для $\sigma \in \{2, *\}$ справедливо

1. $[T_{01}^\sigma \cup X^* \cdot (0\tilde{1}100)^t] = T_{01}^\sigma \cup X^* \cdot (0\tilde{1}\tilde{1}00)^t$;
2. $[T_{01}^\sigma \cup X^* \cdot (\tilde{1}0100)^t] = T_{01}^\sigma \cup X^* \cdot (\tilde{1}0\tilde{1}00)^t$;
3. $[T_{01}^\sigma \cup X^* \cdot (01\tilde{1}10)^t] = T_{01}^\sigma \cup X^* \cdot (0\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1}0)^t$;
4. $[T_{01}^\sigma \cup X^* \cdot (10\tilde{1}01)^t] = T_{01}^\sigma \cup X^* \cdot (\tilde{1}0\tilde{1}0\tilde{1})^t$.

Доказательство. Рассмотрим случаи 1 и 3. Случаи 2 и 4 рассматриваются аналогичным образом.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in T_{0^*,1^*}^{*-}$ (соответственно, $T_{0^*}^{*-}$). Выберем мультиоперацию $f'(y, x_1, \dots, x_n)$ из $T_{0^*,11}^{*-}$ (соответственно, $T_{0^*,1^*}^{*-}$) такую, что $f'(0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $v(x_1, \dots, x_n) \in T_{0^*1^*}^*$ (соответственно, $T_{0^*}^*$) для которой справедливо

$$v(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{cases} *, & \text{если } f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = * \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad ((\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E_2^n).$$

И тогда выполняется $f = s(f', v, x_1, \dots, x_n)$. \square

Из замечания 2 и леммы 15 следует, что

Предложение 4. Для любого набора значений $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$, содержащего по меньшей мере одну $\tilde{1}$ и не входящего в (4), найдется набор $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$ входящий в (4) такой, что для $\sigma \in \{2, *\}$ справедливо $[T_{01}^\sigma \cup X^* \cdot \alpha^t] = T_{01}^\sigma \cup X^* \cdot \beta^t$.

Лемма 16. Если $f(x, y)$ такова, что $f(0, 0) = 0, f(0, 1) = -, f(1, 1) = *$, то $[T_{00,1^*}^* \cup \{f\}] = T_{00,1^*}^{*-}$.

Доказательство. Суперпозиция с внешней f и внутренними $f_1 = (000^*)$ и $f_2 = (011^*)$ позволит получить $f_3 = (0--^*)$. Суперпозиция $s(f_5, f_3, f_4)$, где $f_4 = (001^*), f_5 = (011^*)$ позволит получить $f_6 = (0-1^*)$.

По мультиоперации $f(x_1, \dots, x_n)$ принадлежащей $T_{00,1^*}^{*-}$ построим $f'(x_1, \dots, x_n)$ и $f''(x_1, \dots, x_n)$ принадлежащие $T_{00,1^*}^*$ следующим образом: для произвольного набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E_2^n$ выполняется $f'(\tilde{\alpha}) = f''(\tilde{\alpha}) = 0$, если $f(\tilde{\alpha}) = 0, f'(\tilde{\alpha}) = 0, f''(\tilde{\alpha}) = 1$, если $f(\tilde{\alpha}) = -, f'(\tilde{\alpha}) = 1, f''(\tilde{\alpha}) = 0$, если $f(\tilde{\alpha}) = 1, f'(\tilde{\alpha}) = 1, f''(\tilde{\alpha}) = 1$, если $f(\tilde{\alpha}) = *$. Мультиоперации f' и f'' принадлежат $T_{00,1^*}^*$. И тогда выполняется $f = s(f_6, f', f'')$. \square

Двойственным образом доказывается

Лемма 17. Если $f(x, y)$ такова, что $f(0, 0) = *, f(0, 1) = -, f(1, 1) = 1$, то $[T_{0^*,11}^* \cup \{f\}] = T_{0^*,11}^{*-}$.

Лемма 18. Если $f(x, y)$ такова, что $f(0, 0) = *, f(0, 1) \in \{-, 0, 1\}, f(1, 1) = *,$ то

- a) $[T_{01}^2 \cup T_{00,1^*}^{*-} \cup \{f\}] = T_{01}^2 \cup T_{00,1^*}^{*-} \cup T_{0^*,1^*}^{*-}$;
- б) $[T_{01}^2 \cup T_{0^*,11}^{*-} \cup \{f\}] = T_{01}^2 \cup T_{0^*,11}^{*-} \cup T_{0^*,1^*}^{*-}$.

Доказательство. а) Из f и мультиопераций множества T_{01}^2 для любого $n \in N$ можно построить n -местную мультиоперацию $u = (*11\dots 11*)$. Пусть $g(x_1, \dots, x_n) \in T_{0*,1*}^{*-}$. В множестве $T_{00,1*}^{*-}$ найдется мультиоперация $h(y, x_1, \dots, x_n)$ такая, что для любого набора $\tilde{\alpha} \in E_2^n$ выполняется $g(\tilde{\alpha}) = h(1, \tilde{\alpha})$. И тогда $g = s(h, u, x_1, \dots, x_n)$.

Случай б) рассматривается аналогично. \square

Лемма 19. *Если $f(x)$ такова, что $f(0) = *$, $f(1) = -$ или 0 , то $[T_{01}^2 \cup T_{0*,11}^{*-} \cup \{f\}] = T_{01}^2 \cup T_{0*,11}^{*-} \cup T_{0*}^{*-}$.*

Доказательство. Рассмотрим случай $f = (*0)$. Из f и мультиопераций множества $T_{0,1}^2$ можно для любого $n \in N$ построить мультиоперацию $f_1(x_1, \dots, x_n) = (*0\dots 0)$.

Для любой мультиоперации $g(x_1, \dots, x_n) \in T_{0*}^{*-}$ в множестве $T_{0*,11}^{*-}$ найдется мультиоперация $g_1(y, x_1, \dots, x_n)$ такая, что для любого набора $\tilde{\alpha} \in E_2^n$ выполняется $g_1(0, \tilde{\alpha}) = f(\tilde{\alpha})$. И тогда справедливо $g = s(g_1, f_1, x_1, \dots, x_n)$.

Пусть теперь $f = (*-)$. Сведем этот случай к разобранному. Пусть $h_1 = (0001)$. Суперпозиция $s(h_1, f, h_1)$ задает мультиоперацию $h_2(x, y) = (*0*-)$, а суперпозиция $s(h_1, f, x)$ определяет мультиоперацию $(*0)$. \square

Двойственным образом доказывается

Лемма 20. *Если $f(x)$ такова, что $f(1) = *$, $f(0) = -$ или 1 , то $[T_{0,1}^2 \cup T_{00,1*}^{*-} \cup \{f\}] = T_{0,1}^2 \cup T_{00,1*}^{*-} \cup T_{1*}^{*-}$.*

Лемма 21. *Если набор β из (4) непосредственно предшествует набору β' из (4), то $T_{01}^2 \cup X^* \cdot \beta^t$ предполон в $T_{01}^2 \cup X^* \cdot \beta'^t$ и $T_{01}^* \cup X^* \cdot \beta^t$ предполон в $T_{01}^* \cup X^* \cdot \beta'^t$.*

Доказательство. Доказательство следует из лемм 6, 7, 16, 17, 18, 19, 20 в соответствии со схемой на рис. 2. \square

Лемма 22. *Если $A, B, A \cup C, B \cup C$ – клоны и A предполон в B , то $A \cup C$ предполон в $B \cup C$.*

Доказательство. Пусть $f \in (B \cup C) \setminus (A \cup C)$, тогда $f \in B$, $f \notin A$.

Пусть мультиоперация $g \in B \cup C$.

Если мультиоперация $g \in B$, то g представима суперпозициями, построенными из мультиоперации f и мультиопераций, принадлежащих A , т. е. может быть получена суперпозициями мультиопераций, принадлежащих $A \cup C$.

Если $g \in C$, то $g \in A \cup C$.

Таким образом, любая мультиоперация, принадлежащая $B \cup C$, представима суперпозициями, построенными из мультиопераций, принадлежащих $A \cup C$ и мультиоперации $f \in (A \cup C) \setminus (B \cup C)$. \square

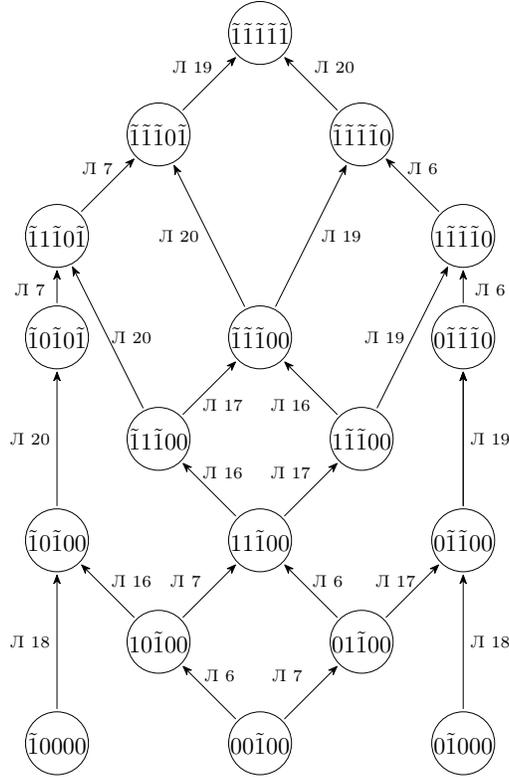


Рис. 2. Схема доказательства леммы 21

4 Основной результат

Лемма 23. Интервалы $I(T_{01}^2, T_{01}^- \cup T_{1,*}^{*-} \cup T_{0,*}^{*-})$ и $I(T_{01}^*, T_{01}^{*-} \cup T_{1,*}^{*-} \cup T_{0,*}^{*-})$ содержат по 42 клона.

Доказательство. Рассмотрим интервал $I(T_{01}^2, T_{01}^- \cup T_{1,*}^{*-} \cup T_{0,*}^{*-})$. По лемме 12 имеем $|I(T_{01}^2, T_{01}^2 \cup T_{1,*}^* \cup T_{0,*}^*)| = 12$ и $|I(T_{01}^-, T_{01}^- \cup T_{1,*}^{*-} \cup T_{0,*}^{*-})| = 12$.

Между двумя этими интервалами находится 18 клонов по леммам 14, 15, 21. То, что других клонов нет, следует из лемм 13, 22.

Для интервала $I(T_{01}^*, T_{01}^{*-} \cup T_{1,*}^{*-} \cup T_{0,*}^{*-})$ рассуждения повторяются. \square

Интервал $I(T_{01}^2, T_{01}^- \cup T_{1,*}^{*-} \cup T_{0,*}^{*-})$ представлен на рис. 3.

Лемма 24. $[T_{01}^2 \cup \{(0 * -1)\}] = T_{01}^{*-}$

Доказательство. Пусть $h(x, y) = (0 * -1)$. По мультиоперации $f(x_1, \dots, x_n) \in T_{01}^{*-}$ построим мультиоперации f' и f'' , принадлежащие T_{01}^2 :

$$f'(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0, *\}; \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f''(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0, -\}; \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

И тогда $f = s(h, f', f'')$

□

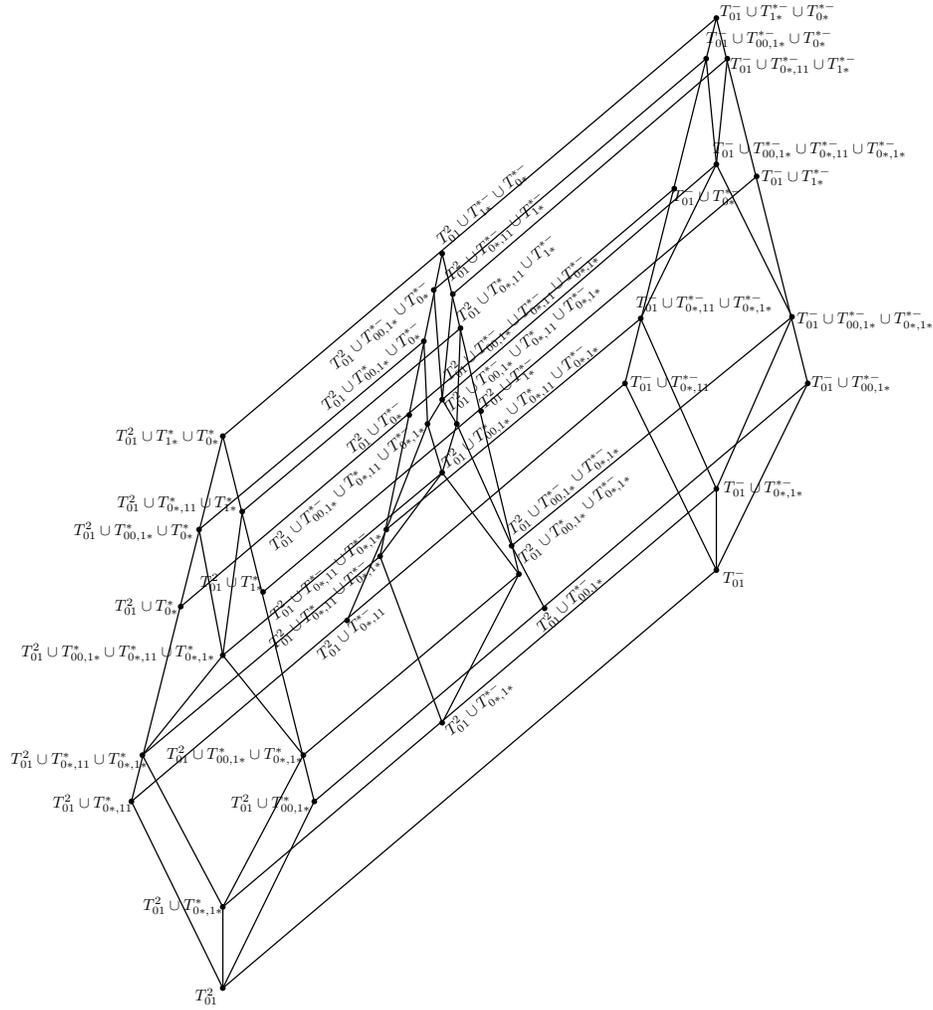


Рис. 3. Интервал $I(T_{01}^2, T_{01}^- \cup T_{1,*}^{*-} \cup T_{0,*}^{*-})$

Лемма 25. Пусть некоторый клон K такой, что $T_{01}^2 \subseteq K$, не находится в интервале $I(T_{01}^2, T_{01}^- \cup T_{1,*}^{*-} \cup T_{0,*}^{*-})$. Тогда $T_0^2 \subseteq K$ или $T_1^2 \subseteq K$ или $T_{01}^* \subseteq K$ или $T_{01}^{*-} \subseteq K$.

Доказательство. Пусть некоторый клон K не находится в интервале $I(T_{01}^2, T_{01}^- \cup T_{1,*}^{*-} \cup T_{0,*}^{*-})$. Это означает, что ему принадлежит мультиоперация $f(x_1, \dots, x_n)$ такая, что отождествлением переменных из нее можно

получить одну из следующих мультиопераций зависящих от одной переменной $(00), (11), (10), (-0), (0-), (-1), (1-), (-)$. А это означает, что T_0^2 содержится в K или T_1^2 содержится в K , так как любая из получившихся мультиопераций легко позволяет получить константу 0 или 1.

И осталось рассмотреть случай, когда отождествлением переменных из f можно получить мультиоперацию $(0 * \alpha 1)$ ($\alpha \in \{*, -\}$). Если $\alpha = -$, то по лемме 24 получим, что $T_{01}^{*-} \subseteq K$. Для $\alpha = *$ из доказательства этой же леммы легко получаем, что $T_{01}^* \subseteq K$. \square

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 26. Пусть некоторый клон K такой, что $T_{01}^2 \subseteq K$, не находится в интервале $I(T_{01}^*, T_{01}^{*-} \cup T_{1,*}^{*-} \cup T_{0,*}^{*-})$. Тогда $T_0^2 \subseteq K$ или $T_1^2 \subseteq K$.

Теорема 1. Интервал $I(T_{01}^2, \mathcal{M})$ содержит 108 клонов.

Доказательство. Пусть K — клон, такой, что $T_{01}^2 \subseteq K$. Если $f \in K \setminus T_{01}^2$, то отождествлением переменных у f можно получить одну из следующих одноместных операций $h_1 - h_{15}$:

x	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}	h_{11}	h_{12}	h_{13}	h_{14}	h_{15}
0	0	0	0	1	1	1	1	*	*	*	*	-	-	-	-
1	0	*	-	0	1	*	-	0	1	*	-	0	1	-	*

или одну из следующих двухместных операций $h_{16} - h_{17}$

xy	h_{16}	h_{17}
00	0	0
$\beta_1\beta_2$	*	-
11	1	1

, где $(\beta_1\beta_2) \in \{(01), (10)\}$.

Операции h_3, h_{12} позволяют получить операцию h_1 , так как $s(h_3, h_3) = h_1$ и $s(h_{12}, h_{12}) = h_1$. Но $[T_{01}^2 \cup \{h_1\}] = T_0^2$, поэтому $T_0^2 \subseteq K$.

Аналогично, операции h_7, h_{13} позволяют получить операцию h_5 . Но $[T_{01}^2 \cup \{h_5\}] = T_1$, поэтому $T_1^2 \subseteq K$.

Конъюнкция h_4 и x возвращает операцию h_1 .

Конъюнкция h_{14} и x возвращает операцию h_3 .

Из леммы 4 следует, что $[T_{01}^2 \cup \{h_8\}] = T_{01}^2 \cup T_{0,*}^*$ и тогда $T_{01}^2 \cup T_{0,*}^* \subseteq K$.

Из леммы 5 следует, что $[T_{01}^2 \cup \{h_6\}] = T_{01}^2 \cup T_{1,*}^*$, т.е. $T_{01}^2 \cup T_{1,*}^* \subseteq K$.

По лемме 6 имеем $[T_{01}^2 \cup \{h_2\}] = T_{01}^2 \cup T_{00,1,*}^*$, а значит $T_{01}^2 \cup T_{00,1,*}^* \subseteq K$, а по лемме 7 — $[T_{01}^2 \cup \{h_9\}] = T_{01}^2 \cup T_{0*,11}^*$, а значит $T_{01}^2 \cup T_{0*,11}^* \subseteq K$.

Случаи h_{11} и h_{15} сводятся к h_9 и h_2 : $e_2^1(x, h_{11}) = h_9$, $e_2^2(h_{15}, x) = h_2$.

Если получена операция h_{10} , то так как операция $f \not\equiv *$, то из f можно получить двухместную операцию $u(x, y)$ такую, что $u(0, 0) = *$, $u(1, 1) = *$ и $u(0, 1) \neq *$ или $u(1, 0) \neq *$. По леммам 8 и 9 получаем, что $[T_{01}^2 \cup \{u\}] = T_{01}^2 \cup T_{0*,1,*}^*$ или $[T_{01}^2 \cup \{u\}] = T_{01}^2 \cup T_{0*,1,*}^{*-}$, а значит $T_{01}^2 \cup T_{0*,1,*}^* \subseteq K$ или $T_{01}^2 \cup T_{0*,1,*}^{*-} \subseteq K$.

Лемма 3 говорит, что $[T_{01}^2 \cup \{h_{16}\}] = T_{01}^*$, а значит $T_{01}^* \subseteq K$ и $[T_{01}^2 \cup \{h_{17}\}] = T_{01}^-$ и поэтому $T_{01}^- \subseteq K$.

References

- [1] Alekseev V.B., Voronenko A.A. On some closed classes in partial two-valued logic, *Discrete Math. Appl.*, 4:5 (1994), Pp. 401–419. Zbl 0818.06013
- [2] Badmaev S.A., Dugarov A.E., Fomina I.V., Sharankhaev I.K., On some intervals in the lattice of ultraclones of rank 2, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 18:2 (2021), Pp. 1210–1218. Zbl 7440274
- [3] Couceiro M., Haddad L., Scholzel K., Waldhauser T. A Solution to a Problem of D. Lau: Complete Classification of Intervals in the Lattice of Partial Boolean Clones // *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 2017, 28 (1), pp.47-58
- [4] Haddad L.; Lau D.; Rosenberg I. Intervals of partial clones containing maximal clones // *J. Autom. Lang. Comb.*, 2006, V. 11, No. 4, Pp. 399-421.
- [5] Khaltanova S.Yu., On two isomorphic intervals in the lattice of ultraclones on two-elements set, *Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat.*, 7 (2014), Pp. 133–140. Zbl 1333.08004
- [6] Khaltanova S.Yu. On clones of ultrafunctions preserving zero and one, *Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics*, 1 (2012), Pp. 93–98.
- [7] Lau D. *Function algebras on finite sets. A basic course on many-valued logic and clone theory.* Berlin: Springer-Verlag, 2006. 668 p.
- [8] Pantelev V.I. A completeness criterion for extendable Boolean functions // *Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, No. 2 (68), 2009.
- [9] Pantelev V.I., Khaltanova S.Yu. On some intervals in the lattice of clones of partial ultrafunctions, *Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat.*, 2010. Vol. 3, No. 4, Pp. 80–87.
- [10] Pantelev V.I., Taglasov E.S. ES_I -closure of rank 2 multi-functions: completeness criterion, classification and types of bases. *Intelligent Systems. Theory and Applications*, 2021, vol. 25, no. 2, Pp. 55–80.
- [11] Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic / E. L. Post // *Annals of Math. Studies.* – Princeton: Univ. Press, 1941. – Vol. 5. – 122 p.
- [12] Strauch B. Die Menge $\mathcal{M}(M \cap T_0 \cap T_1)$. Preprint Universitat Rostock, Juni 1995, 16 p.
- [13] Strauch B. On partial classes containing all monotone and zero-preserving total Boolean functions. *Math. Log. Quart.* 43, Pp. 510–524.

VLADIMIR INNOKENT'YEVICH PANTELEEV
DORZHI BANZAROV BURYAT STATE UNIVERSITY,
24A, SMOLINA STR.,
670000, ULAN-UDE, RUSSIA
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGIES, IRKUTSK STATE
UNIVERSITY,
K. MARX ST, 1,
664000, IRKUTSK, RUSSIA
Email address: vl.panteleyev@gmail.com

SOELMA YUR'EVNA HALTANOVA
DORZHI BANZAROV BURYAT STATE UNIVERSITY,
24A, SMOLINA STR.,
670000, ULAN-UDE, RUSSIA
Email address: soelabad@mail.ru