

Рецензия на статью  
“ON FAMILIES OF SPECIAL OBJECTS OF COMPLETE AND  
e-COMPLETE NUMBERINGS”  
by M.KH. FAIZRAHMANOV

В статье установлены некоторые новые нетривиальные результаты о полных и e-полных нумерациях. К сожалению, автор, видимо, не знаком с некоторыми более ранними работами, а именно

- 1) Селиванов В.Л. О структуре степеней обобщенных индексных множеств. Алгебра и логика. т. 21 (1982), 472–491,
- 2) Селиванов В.Л. Иерархии гиперарифметических множеств и функций. Алгебра и логика. т. 22 (1983), 666–692,
- 3) Селиванов В.Л. Предполные нумерации. Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Том 157 (2018). С. 106–134,

из которых некоторые его результаты легко следуют и в которых изучены свойства операций пополнения, часть из которых была позднее переоткрыта в [10,17].

В разделе 2 работы 1) определены операции пополнения  $p_a$  ( $p_a(\nu)$  совпадает с  $\nu_a$  в рецензируемой работе, а  $\varkappa$  — с  $\varphi$ ) и установлено, что на полурешетке всех нумераций подмножеств данного множества они задают операторы замыкания со свойством дискретности  $p_a(\nu) \leq p_b(\mu) \rightarrow p_a(\nu) \leq \mu$  при  $a \neq b$ , и что полные нумерации с точностью до эквивалентности совпадают с нумерациями вида  $p_a(\nu)$  (см. предложение 1 в работе 1) и его следствие). Из этих свойств теорема 1 рецензируемой работы и два его следствия вытекают короткими очевидными рассуждениями (например, п. 1) теоремы 1 получается так: если бы  $\nu_b = p_b(\nu)$  была полной относительно  $a$ , то  $p_a(p_b(\nu)) \equiv p_b(\nu)$ , откуда  $p_a(p_b(\nu)) \leq \nu$ , откуда  $p_a(p_b(\nu)) \equiv \nu$ , а значит  $\nu$  полна относительно  $a$  в противоречии с предположением.

В разделе 2 работы 2) операции пополнения  $p_a$  релятивизованы к любому оракулу  $h$  (релятивизованные операции обозначены  $p_a^h$ ) и установлены свойства этих релятивизованных операций (и некоторых их расширений), также имеющие отношение к рецензируемой работе. Например, из этих свойств сразу следует ответ на вопрос А.И. Мальцева о числе особых объектов (так, нумерация  $p_0^{\emptyset}(N)$  множества  $\{0, 1\}$ , т.е.  $m$ -полное в  $\Sigma_2^0$

множество, полна относительно обоих элементов  $0,1$ ). Из них также сразу следует п. 2) теоремы 2 рецензируемой работы (в качестве  $\nu$  можно взять  $p_A^{\theta'}(\mu)$ , где  $A$  — наименьшее по включению множество в  $\mathcal{A}$ ). Кстати, пункты 1) и 2) теоремы 2 лучше переставить, поскольку п. 1) в одну сторону следует из п. 2).

Рецензируемая статья содержит интересные результаты об особых объектах  $\epsilon$ -полных нумераций (теоремы 6 и 7 с нетривиальными доказательствами). На мой взгляд, можно сократить начало раздела 6, где короче было бы просто определить  $\epsilon$ -полные нумерации с данным особым объектом условием, что дополнение креативного множества  $\epsilon$ -сводится к индексному множеству этого объекта.

Считаю, что работа может быть принята к печати после переработки в соответствии со сделанными замечаниями и дополнительного рецензирования. Закончу указанием опечаток и стилистических погрешностей:

1) Если автор учтет замечания рецензента, нужно будет также в соответствии с ними переработать введение и аннотацию.

2) Когда автор пишет о проблеме Мальцева для  $\epsilon$ -полных нумераций, лучше бы писать что-то вроде “аналог вопроса Мальцева для  $\epsilon$ -полных нумераций”, поскольку вопрос формулировался не для  $\epsilon$ -полных нумераций.

3) В доказательстве п. 1) теоремы 2 во фразе “ternary computable functions” надо убрать последнее  $s$ .

4) Фразу “follows from the following” перед формулировками теорем 4 и 5 легко заменить на стилистически более удачную.