S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 517.55
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 32A60

О РЕКУРРЕНТНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ σ-СТЕПЕННЫХ СУММ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕАЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Е.К. Мышкина

Представлено П.П. Петровым

Abstract: Systems of non-algebraic equations may have infinite number of common zeroes, therefore their power sums are usually considered with negative exponents. Under certain conditions on a system the series obtained can be computed as integrals over local cycles. Such integrals are called pseudopower or σ-power sums. Similar to algebraic case, there are recurrent relations between them, which are analogues of the classical Newton identities.

Analogues of the Newton identities are necessary for generalization of the L.A. Aizenberg elimination method based on the multidimensional logarithmic residue formula.

In some cases σ-power sums and relations between them are known. In this paper we consider systems of functions holomorphic in a neighborhood of the origin such that lower homogeneous terms of their Taylor expansions at the origin admit common monomial factors. For such systems we compute σ-power sums and establish recurrent relations between them.

Keywords: power sums of roots, holomorphic functions, systems of equations.

Myshkina, E.K., On Recurrent Formulas for σ-Power Sums for Solutions to Systems of Non-Algebraic Equations.

Автор использовал финансовую поддержку РНФ, Правительства Красноярского края и Красноярского краевого фонда науки (проект 25–21–20054).

Поступила 25 августа 2025 г., опубликована 31 декабря 2025 г.

1 Введение

Классические рекуррентные формулы Ньютона связывают коэффициенты многочлена со степенными суммами его корней (см., например, [7, § 11]). Пусть многочлен $P(z)$ степени m с комплексными коэффициентами имеет вид

$$P(z) = z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_{m-1} z + b_m.$$

Обозначим через $z_1, z_2, \ldots, z_m$ его корни с учетом кратностей. Тогда степенная сумма S_k, $k \in \mathbb{N}$ корней многочлена $P(z)$ определяется как

$$S_k = z_1^k + \ldots + z_m^k.$$

Степенная сумма S_0 полагается равной m.

Справедливы следующие рекуррентные формулы Ньютона

$$S_j + S_{j-1} b_1 + \cdots + S_1 b_{j-1} + j b_j = 0, \text{ если } 1 \leq j \leq m,$$
$$S_j + S_{j-1} b_1 + \cdots + S_{j-n} b_m = 0, \text{ если } j > m.$$

Л.А. Айзенберг существенно использовал эти формулы при построении своего метода исключения неизвестных из систем алгебраических уравнений (см. [1, Глава IV]), основанного на использовании формулы многомерного логарифмического вычета. Для обобщения метода исключения неизвестных Л.А. Айзенберга на случай систем трансцендентных уравнений необходим аналог формул Ньютона для них.

Для систем алгебраических уравнений аналоги формул Ньютона были получены в [2]. Для целых функций одного комплексного переменного тоже известно обобщение формул Ньютона [10]. Нужно отметить, что в этом случае вместо степенных сумм нулей целых функций берутся степени их обратных величин, поскольку, как правило, нулей бесконечно много, и их обычные степенные суммы являются расходящимися рядами. Отсюда и название таких сумм – псевдостепенные или σ-степенные.

Рассмотрим простейшую систему трансцендентных уравнений вида

$$f_1(z) = ... = f_n(z) = 0,$$

где голоморфные в окрестности начала координат пространства $\mathbb{C}^n$ функции f_j от n комплексных переменных $z = (z_1, \ldots, z_n)$ имеют там разложение вида

$$f_j(z) = z^{\gamma_j} + Q_j(z),\ j = 1, \ldots, n,$$

где $Q_j(z)$ — ряд Тейлора с мономами, общая степень которых (по совокупности переменных) больше, чем степень младшего монома z^{γ_j}. Здесь $\gamma_j = (\gamma_j^1, \ldots, \gamma_j^n)$ — вектор показателей степени, и запись z^{γ_j} обозначает произведение

$$z_1^{\gamma_j^1} z_2^{\gamma_j^2} \cdots z_n^{\gamma_j^n}.$$

Далее мы будем использовать эту запись и для других мультииндексов. Кроме того, положим $|\gamma_j| := \sum_k \gamma_j^k$, и будем называть мультииндекс неотрицательным, если все его компоненты неотрицательны, и положительным, если все его компоненты неотрицательны и хотя бы один из них строго больше нуля. Специальный мультииндекс $(1, 1, \ldots, 1)$ будем обозначать символом $\mathbf{I}$.

В случае, когда младшая однородная часть разложения в нуле каждой функции f_j является мономом, то есть

$$f_j(z) = z^{\gamma_j} + Q_j(z),$$

и при некоторых условиях дополнительных условиях на f в работе [6] удалось связать степенные суммы (с отрицательными показателями) общих нулей этой системы с интегралами вида

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \frac{1}{z^{\beta+\mathbf{I}}} \frac{df}{f}$$

по остову поликруга $\Gamma = \{|z_j| = r_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ для некоторых мультииндексов β. В работе [3] для этих интегралов были получены аналоги рекуррентных формул Ньютона.

Для более сложных систем уравнений с левой частью вида

$$f_j(z) = P_j(z) + Q_j(z),\ j = 1, \ldots, n,$$

где младшая однородная часть разложения $f_j(z)$ уже является однородным многочленом $P_j(z)$, связь специальных интегралов со степенными суммами нулей системы была установлена в [5], а аналоги рекуррентных формул Ньютона для этих интегралов были найдены в [4]. Там же подобные интегралы получили название σ-степенных сумм.

В данной статье мы рассматриваем σ-степенные суммы для более сложных систем уравнений специального вида и устанавливаем рекуррентные соотношения между ними. Статья продолжает цикл работ А.М. Кытманова и автора по исследованию свойств степенных сумм корней систем неалгебраических уравнений.

2 σ-степенные суммы

Рассмотрим в окрестности начала координат многомерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ систему уравнений

$$f_1(z) = ... = f_n(z) = 0,$$

где $f_1(z),\ f_2(z), \ldots,\ f_n(z)$ – функции голоморфные в окрестности начала координат.

Предположим, что младшие однородные части разложений этих функций в ряды Тейлора в окрестности нуля допускают выделение мономиального общего сомножителя $z^{\gamma_j} = z_1^{\gamma_j^1} \ldots z_n^{\gamma_j^n}$, то есть имеют вид

$$f_j(z) = z^{\gamma_j} P_j(z) + Q_j(z),$$

где $z^{\gamma_j}P_j(z)$ – младшая однородная часть разложения Тейлора, $Q_j(z)$ – остаток ряда Тейлора. Степень всех мономов (по совокупности переменных), входящих в P_j, обозначим m_j. В функциях Q_j степени каждого из мономов строго больше, чем $m_j + |\gamma_j|$.

Тогда рассматриваемая система уравнений примет вид

$$f_j(z) = z^{\gamma_j}P_j(z) + Q_j(z) = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Будем предполагать, что эта система имеет в начале координат изолированный нуль.

Предположим дополнительно, что система многочленов $P_1(z), \ldots, P_n(z)$ невырожденная, то есть ее общим нулем служит только начало координат. Тогда по теореме Гильберта о нулях (см., например, [14]) существует матрица A

$$A = \|a_{jk}(z)\|^n_{j,k=1,\ldots,n},$$

состоящая из многочленов $a_{jk}(z)$ таких, что для некоторых натуральных чисел s_j

$$z_j^{s_j} = \sum_{k=1}^n a_{jk}(z)P_k(z), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

По теореме Маколея [13] можно выбрать $s_j \le m_1 + \ldots + m_n - n + 1$. Также, можно считать, что многочлены $a_{jk}(z)$ однородные, поэтому их степень равна $s_j - m_k$.

Из соотношений (2) получаем

$$z_j^{s_j} \cdot z^{\sum_l \gamma_l} = \sum_{k=1}^n a_{jk}(z) z^{\sum_{l\neq k}\gamma_l} \cdot z^{\gamma_k}P_k(z).$$

Обозначим

$$a_{jk}(z) \cdot z^{\sum_{l\neq k}\gamma_l} \text{ через } b_{jk}(z), \text{ и} \tag{3}$$

$$z_j^{s_j} \cdot z^{\sum_l \gamma_l} \text{ через } z^{\beta_j}. \tag{4}$$

Отметим здесь, что многочлены $b_{jk}(z)$ однородные, их степени равны

$$s_j - m_k + \sum_{l\neq k}|\gamma_l|, \tag{5}$$

степень монома z^{β_j} равна

$$\beta_j = \left(\sum_l \gamma_l^1, \ldots, s_j + \sum_l \gamma_l^j, \ldots, \sum_l \gamma_l^n\right),$$

а по совокупности переменных она равна

$$|\beta_j| = s_j + \sum_l |\gamma_l|. \tag{6}$$

В новых обозначениях получаем

$$z^{\beta_j} = \sum_k b_{jk}(z) z^{\gamma_k} P_k(z).$$

Положим теперь
$$F_j(z) = z^{\beta_j} + q_j(z),$$
где
$$q_j(z) = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}(z) Q_k(z), \quad j = 1, \ldots, n.$$
Получаем, что $F = Bf$, где B – матрица из многочленов $b_{jk}(z)$. При этом каждый ненулевой моном в q_j имеет степень по совокупности переменных строго больше, чем
$$s_j - m_k + \sum_{l\neq k} |\gamma_l| + m_k + |\gamma_k| = s_j + \sum_{l} |\gamma_l| = |\beta_j|; \tag{7}$$
таким образом, z^{β_j} в $F_j(z)$ – это младший моном.

Рассмотрим специальный аналитический полиэдр
$$D_f(r) = D_f(r_1, \ldots, r_n) = \{z \in U : |f_j(z)| < r_j,\ j = 1, \ldots, n\},$$
с остовом
$$\Gamma_f(r) = \{z \in U : |f_j(z)| = r_j,\ j = 1, \ldots, n\},$$
где U – ограниченная окрестность нуля, а $r_1, \ldots, r_n$ — положительные числа. В силу того, что начало координат является изолированным корнем системы (1), компоненты вектора параметров r и окрестность нуля U можно выбрать настолько малыми, что замыкание полиэдра и его остов являются компактными множествами (см. [9, Глава II]). Кроме этого, остов $\Gamma_f(r)$ является гладким компактным циклом [1, Лемма 4.4] для почти всех r.

Рассмотрим сначала случай, когда система уравнений $F(z) = 0$ так же имеет изолированный нуль в начале координат. Используя формулу преобразования вычета Гротендика (см. [11]), для малых r и неотрицательных мультииндексов α мы получим
$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_f(r)} \frac{z^\alpha \cdot \Delta_f\, dz}{f_1 \ldots f_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_F(r')} \frac{z^\alpha \cdot \det B \cdot \Delta_f\, dz}{F_1 \ldots F_n},$$
где Δ_f – якобиан системы $f_1, \ldots, f_n$, $\Gamma_F(r')$ – остов полиэдра $D_F(r') = \{z : |F_j(z)| < r'_j,\ j = 1, \ldots, n\}$. Вектор r' выбирается так, чтобы в полиэдр $D_F(r')$ попадал только изолированный нуль системы $F(z)$ в начале координат. В этом случае цикл $\Gamma_F(r')$ так же является гладким компактным циклом.

Выберем теперь цикл $\Gamma_\varepsilon = \{z : |z^{\beta_j}| = \varepsilon_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ с $\varepsilon_j > 0$ достаточно малыми, чтобы на Γ_ε выполнялись неравенства $|z^{\beta_j}| > |q_j(z)|$, $j = 1, \ldots, n$, что всегда возможно в силу соотношения их степеней (подобная ситуация подробно исследована в [5, Раздел 1]). Цикл Γ_ε также является компактным, и по лемме А.П. Южакова о смещенном остове (см. [1, Лемма 4.9]) в множестве

$$\overline{D_F(r')} \setminus \left\{ z\colon \prod_j F_j(z) = 0 \right\}$$

циклы Γ_ε и $\Gamma_F(r')$ гомологичны для всех достаточно малых r'. Этого достаточно, чтобы получить равенство интегралов

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_F(r')} \frac{z^\alpha \det B \cdot \Delta_f dz}{F_1 \dots F_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{z^\alpha \det B \cdot \Delta_f dz}{F_1 \dots F_n}.$$

Цикл Γ_ε совпадает с остовом поликруга $\{|z_j| = \delta_j\}$ для некоторого выбора положительных параметров δ_j. Действительно, прологарифмировав равенства $|z^{\beta_j}| = \varepsilon_j$, мы получим линейную систему уравнений на логарифмы $|z_j|$. Матрица коэффициентов этой системы имеет вид

$$\operatorname{diag}(s_1, \dots, s_n) + (1, 1, \dots, 1)^T \cdot \left(\sum_l \gamma_l^1, \sum_l \gamma_l^2, \dots, \sum_l \gamma_l^n \right).$$

Определитель матрицы такого вида равен (см. [12, формула 0.8.5.11])

$$s_1 \dots s_n \left(1 + \sum_l \left(\frac{\gamma_l^1}{s_1} + \dots + \frac{\gamma_l^n}{s_n} \right) \right).$$

Все величины γ_l^k в этом выражении неотрицательные, а s_j – строго положительные. Поэтому определитель линейной системы отличен от нуля, а система имеет единственное решение – все логарифмы $|z_j|$ выражаются в виде линейных комбинаций логарифмов ε_j, то есть $|z_j|$ являются мономами от ε_j, которые и можно взять за δ_j. Далее по тексту этот остов поликруга $\{|z_j| = \delta_j\}$ будем обозначать Γ.

Тогда рассматриваемый интеграл равен

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{z^\alpha \det B \cdot \Delta_f dz}{F_1 \dots F_n}.$$

По теореме о логарифмическом вычете [1, Теорема 4.5] этот интеграл равен сумме значений монома z^α в нулях системы уравнений $F(z) = 0$ в поликруге с остовом Γ, и для положительных α равен нулю.

Для мультииндексов α имеющих координаты разных знаков этот интеграл называется σ-степенной суммой и уже не обязательно равен нулю. В работе [4] он рассматривался для более простых систем (все γ_j равны нулю).

В случае, когда система уравнений $F(z) = 0$ имеет неизолированный нуль в начале координат, применение формулы преобразования вычета и леммы о смещенном остове невозможно. Следуя [4], мы рассмотрим σ-степенные суммы

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{\det B \cdot \Delta_f dz}{z^\alpha \cdot F} \tag{8}$$

и соотношения между ними для систем вида (1) в общем случае.

3 Свойства σ-степенных сумм

Лемма 1. *Если* $|\alpha| < 0$*, то* $\sigma_\alpha = 0$*. Если* $|\alpha| = 0$*, то*

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \mu_0(f) \text{ для } \alpha = (0, \ldots, 0), \\ \sigma_\alpha = 0 \text{ для } \alpha \neq (0, \ldots, 0), \end{cases}$$

где $\mu_0(f)$ *– кратность изолированного нуля в начале координат системы (1).*

Доказательство. Разложим функцию

$$\frac{1}{F_j(z)} = \frac{1}{z^{\beta_j} + q_j(z)}$$

на Γ в ряд геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{F_j(z)} = \frac{1}{z^{\beta_j}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{q_j(z)}{z^{\beta_j}} \right)^p. \tag{9}$$

Тогда

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \sum_{|I| \geq 0} (-1)^{|I|} \frac{\det B \cdot \Delta_f \cdot q_1^{i_1} \cdots q_n^{i_n} dz}{z^\alpha \cdot z^{\sum_j \beta_j} \cdot z^{i_1 \beta_1} \ldots z^{i_n \beta_n}}. \tag{10}$$

В этой формуле $I = (i_1, \ldots, i_n)$ – неотрицательный целочисленный мультииндекс длины n.

Ясно, что этот интеграл равен коэффициенту при мономе $\frac{1}{z_1 \ldots z_n}$ степени $-n$ подынтегрального выражения. Заметим, что степени ненулевых мономов в разложении в ряд якобиана отображения f не меньше, чем произведение степеней младших однородных частей всех функций минус n, то есть не меньше, чем

$$\sum_j |\gamma_j| + \sum_j m_j - n.$$

Согласно (5) степень $\det B$ равна

$$\sum_j s_j - \sum_j m_j + (n-1) \sum_j |\gamma_j|.$$

Таким образом, с учетом (7), в каждом слагаемом подынтегрального выражения степень ненулевых слагаемых в числителе не меньше, чем

$$\sum_j s_j + n \sum_j |\gamma_j| - n + \sum_j i_j (|\beta_j| + 1),$$

тогда как степень знаменателя равна (с учетом (6))

$$|\alpha| + \sum_j s_j + n \sum_j |\gamma_j| + \sum_j i_j |\beta_j|.$$

Отсюда мы получаем, что степень ненулевых слагаемых в подынтегральном выражении не меньше, чем $-n + |I| - |\alpha|$.

Если $|\alpha| < 0$, то ясно, что коэффициент при $\frac{1}{z_1 \dots z_n}$ нулевой.

Если $|\alpha| = 0$, то ненулевой ответ мы можем получить только от слагаемого, соответствующего $I = (0, \dots, 0)$. В случае $\alpha = (0, \dots, 0)$ интеграл $\sigma_{(0,\dots,0)}$ равен

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{\det B \cdot \Delta_f dz}{F_1 \dots F_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\det B \cdot \Delta_f dz}{F_1 \dots F_n} = \\ = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_F} \frac{\det B \cdot \Delta_f dz}{F_1 \dots F_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_f} \frac{\Delta_f dz}{f_1 \dots f_n}.$$

Последний интеграл равен кратности изолированного нуля в начале координат $\mu_0(f)$ системы (1) (см. [1, §22]). Отметим, что согласно [8] $\mu_0(f) \geq \prod_j (m_j + |\gamma_j|)$.

Рассмотрим теперь случай $\alpha \neq (0, \dots, 0)$. Мономы из числителя имеют степень, больше либо равную $\sum_j s_j + n \sum_j |\gamma_j| - n$, тогда как степень знаменателя равна $\sum_j s_j + n \sum_j |\gamma_j|$. В мультииндекс α входит хотя бы одна отрицательная координата, поэтому в знаменателе не могут быть все z_j, а значит, $\sigma_\alpha = 0$. $\square$

4 Рекуррентные формулы для σ-степенных сумм

Введем обозначение для неотрицательных мультииндексов δ:

$$J_\delta^j = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{\det B \cdot \Delta_f dz}{z^\delta \cdot F_{j+1} \cdots F_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{\det B \cdot F_1 \cdots F_j \cdot \Delta_f dz}{z^\delta \cdot F}$$

для $j = 1, \dots, n$. Заметим, что при сделанных обозначениях $\sigma_\alpha = J_\alpha^0$.

Для того, чтобы иметь возможность оперировать с коэффициентами функций f_j, F_j и $\det B$ запишем их разложения в степенные ряды (в окрестности начала координат):

$$f_j(z) = z^{\gamma_j} P_j(z) + Q_j(z) = \sum_{|\alpha| \geq m_j + |\gamma_j|} a_\alpha^j z^\alpha,$$

$$\det B = \sum_{|\alpha| = |s| - |m| + (n-1) \sum_k |\gamma_k|} b_\alpha z^\alpha,$$

$$F_j(z) = z^{\beta_j} + q_j(z) = \sum_{|\alpha| \geq s_j + \sum_k |\gamma_k|} c_\alpha^j z^\alpha.$$

Предложение 1. *Для любого j, $0 \le j \le n$, справедлива формула*

$$J_\delta^j = \sum_{|\alpha^1| \ge m_1 + |\gamma_1|} \cdots \sum_{|\alpha^n| \ge m_n + |\gamma_n|} a^1_{\alpha^1} \cdots a^n_{\alpha^n} \Delta_{\alpha^1 \dots \alpha^n} \times$$

$$\times \mathfrak{M}\left[\sum_{p_{j+1} + \dots + p_n \le |\delta| - j \sum_k |\gamma_k| - s_1 - \dots - s_j} \frac{(-1)^{p_{j+1} + \dots + p_n} \cdot z^{\sum_k \alpha^k} \cdot q_{j+1}^{p_{j+1}} \cdots q_n^{p_n}}{z^\delta \cdot z^{(p_{j+1}+1)\beta_{j+1}} \dots z^{(p_n+1)\beta_n}} \right],$$

где $\mathfrak{M}[\cdot]$ – линейный функционал, сопоставляющий многочлену Лорана $[\cdot]$ его свободный член.

Доказательство. Выпишем сначала якобиан отображения f. Используя результат [3, Лемма 1], получим

$$\Delta_f = \frac{1}{z_1 \cdots z_n} \cdot \sum_{|\alpha^1| \ge m_1 + |\gamma_1|} \cdots \sum_{|\alpha^n| \ge m_n + |\gamma_n|} a^1_{\alpha^1} \cdots a^n_{\alpha^n} \cdot z^{\alpha^1} \cdots z^{\alpha^n} \cdot \Delta_{\alpha^1 \dots \alpha^n},$$

где через $\Delta_{\alpha^1 \dots \alpha^n}$ обозначен определитель

$$\Delta_{\alpha^1 \dots \alpha^n} = \det(\alpha^1 \dots \alpha^n),$$

а $\alpha^j = (\alpha^j_1, \dots, \alpha^j_n)$, $j = 1, \dots, n$.

Тогда

$$J_\delta^j = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{\det B \cdot \Delta_f dz}{z^\delta \cdot F_{j+1} \cdots F_n} =$$

$$= \sum_{|\alpha^1| \ge m_1 + |\gamma_1|} \cdots \sum_{|\alpha^n| \ge m_n + |\gamma_n|} a^1_{\alpha^1} \cdots a^n_{\alpha^n} \Delta_{\alpha^1 \dots \alpha^n} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{z^{\sum_k \alpha^k} \det B}{z^{\delta + \mathbf{I}} \cdot F_{j+1} \cdots F_n} \, dz.$$

На Γ функции F раскладываются в ряд геометрической прогрессии по формуле (9), поэтому

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{z^{\sum_k \alpha^k} \det B}{z^{\delta + \mathbf{I}} \cdot F_{j+1} \cdots F_n} \, dz =$$

$$= \sum_{p_{j+1}=0}^\infty \cdots \sum_{p_n=0}^\infty (-1)^{p_{j+1} + \dots + p_n} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{z^{\sum_k \alpha^k} \cdot q_{j+1}^{p_{j+1}} \cdots q_n^{p_n} \cdot \det B}{z^{\delta + \mathbf{I}} \cdot z^{(p_{j+1}+1)\beta_{j+1}} \dots z^{(p_n+1)\beta_n}} dz.$$

Последнее выражение представляет собой конечную сумму. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим разность степеней мономов в числителе и знаменателе подынтегрального выражения – она не меньше, чем

$$\sum_k |\alpha^k| + (|\beta_{j+1}| + 1) p_{j+1} + \dots + (|\beta_n| + 1) p_n + |s| - |m| + (n-1) \sum_k |\gamma_k| -$$

$$- |\delta| - n - (p_{j+1} + 1)|\beta_{j+1}| - (p_n + 1)|\beta_n| =$$

$$= \sum_k |\alpha^k| - |\delta| - n + p_{j+1} + \dots + p_n + |s| - |m| + (n-1) \sum_k |\gamma_k| - |\beta_{j+1}| - \dots - |\beta_n|.$$

Учитывая определение β_j и ограничения на α^k в δ_f, получаем, что рассматриваемая разность степеней больше или равна

$$s_1 + \cdots + s_j + p_{j+1} + p_n + j \sum_k |\gamma_k| - |\delta| - n.$$

Ненулевой вклад в интеграл могут дать только мономы, имещие степень $-n$, а значит, ненулевыми могут быть только слагаемые, для которых

$$p_{j+1} + p_n \leq |\delta| - j \sum_k |\gamma_k| - s_1 - \cdots - s_j.$$

Поэтому

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{z^{\sum_k \alpha^k} \det B}{z^{\delta+\mathbf{I}} \cdot F_{j+1} \cdots F_n}\, dz =$$
$$= \sum_{\substack{p_{j+1}+\cdots+p_n \leq \\ \leq |\delta| - j\sum_k |\gamma_k| - s_1 - \cdots - s_j}} (-1)^{p_{j+1}+\cdots+p_n} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{z^{\sum_k \alpha^k} \cdot q_{j+1}^{p_{j+1}} \cdots q_n^{p_n} \cdot \det B}{z^{\delta+\mathbf{I}} \cdot z^{(p_{j+1}+1)\beta_{j+1}} \ldots z^{(p_n+1)\beta_n}} dz.$$

По теореме о вычетах каждый интеграл в этой сумме равен коэффициенту при $\frac{1}{z_1 \ldots z_n}$, следовательно

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{z^{\sum_k \alpha^k} \det B}{z^{\delta+\mathbf{I}} \cdot F_{j+1} \cdots F_n}\, dz =$$
$$= \mathfrak{M} \left[\sum_{\substack{p_{j+1}+\cdots+p_n \leq \\ \leq |\delta| - j\sum_k |\gamma_k| - s_1 - \cdots - s_j}} \frac{(-1)^{p_{j+1}+\cdots+p_n} \cdot z^{\sum_k \alpha^k} \cdot q_{j+1}^{p_{j+1}} \cdots q_n^{p_n}}{z^{\delta} \cdot z^{(p_{j+1}+1)\beta_{j+1}} \ldots z^{(p_n+1)\beta_n}} \right],$$

где $\mathfrak{M}[\cdot]$ – линейный функционал, сопоставляющий многочлену Лорана $[\cdot]$ его свободный член. □

Замечание. В формулировке [3, Лемма 4] и аналогичных результатах её обобщающих присутствует опечатка – лишний $\mathbf{I}$ в показателе степени в знаменателе.

Замечание. Прямое вычисление выражения (10) для $I = (0, \ldots, 0)$ и $\alpha = (0, \ldots, 0)$ в Лемме 1 дает следующее выражение для $\mu_0(f)$ в виде коэффициента ряда Лорана:

$$\mu_0(f) = \mathfrak{M} \left[\frac{\det B \cdot \Delta_f}{z^{\sum_j \beta_j - \mathbf{I}}} \right].$$

Вычислим теперь интеграл J_δ^j иным способом:

$$J_\delta^j = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma \frac{\det B\cdot F_1\cdots F_j\cdot\Delta_f}{z^\delta\cdot F}dz =$$
$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_\Gamma \frac{\sum\limits_{|\alpha^1|,\dots,|\alpha^j|\geq 0} c^1_{\alpha^1}\cdot z^{\alpha^1}\cdots c^j_{\alpha^j}\cdot z^{\alpha^j}\cdot\det B\cdot\Delta_f}{z^\delta\cdot F}dz =$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{|\alpha^1|,\dots,|\alpha^j|\geq 0} c^1_{\alpha^1}\cdots c^j_{\alpha^j}\int\limits_\Gamma \frac{\det B\cdot\Delta_f}{z^{\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^j}\cdot F}dz =$$
$$= \sum_{|\alpha^1|,\dots,|\alpha^j|\geq 0} c^1_{\alpha^1}\cdots c^j_{\alpha^j}\cdot\sigma_{\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^j}.$$

Используя результат Леммы 1, получаем

$$J_\delta^j = \sum_{|\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^j|>0} c^1_{\alpha^1}\cdots c^j_{\alpha^j}\cdot\sigma_{\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^j} + \sum_{\delta=\alpha^1+\dots+\alpha^j} c^1_{\alpha^1}\cdots c^j_{\alpha^j}\cdot\mu_0(f).$$

Первая сумма в этом равенстве равна

$$\sum_{s_1+\dots+s_j+j\sum_k|\gamma_k|\leq|\alpha^1+\dots+\alpha^j|\leq|\delta|} c^1_{\alpha^1}\cdots c^j_{\alpha^j}\cdot\sigma_{\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^j} =$$
$$\sum_{|\alpha^1+\dots+\alpha^j|=s_1+\dots+s_j+j\sum_k|\gamma_k|} c^1_{\alpha^1}\cdots c^j_{\alpha^j}\cdot\sigma_{\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^j} +$$
$$\sum_{s_1+\dots+s_j+j\sum_k|\gamma_k|<|\alpha^1+\dots+\alpha^j|\leq|\delta|} c^1_{\alpha^1}\cdots c^j_{\alpha^j}\cdot\sigma_{\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^j},$$

при этом от суммы для $|\alpha^1+\dots+\alpha^j| = s_1+\dots+s_j+j\sum_k|\gamma_k|$ остается только одно слагаемое, соответствующее младшим степеням рядов для F_k, то есть $\sigma_{\delta-s-j\sum_k\gamma_k}$.

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 1. *Для системы уравнений (1)*

$$f_j(z) = z^{\gamma_j}P_j(z) + Q_j(z) = 0, \quad j = 1,\dots,n$$

с изолированным нулем в начале координат и невырожденной системой многочленов $P_1(z), \ldots, P_n(z)$ справедливы следующие аналоги рекуррентных формул Ньютона:

$$\sigma_{\delta-s-j\sum_k \gamma_k} + \sum_{s_1+\cdots+s_j+j\sum_k |\gamma_k|<|\alpha^1+\cdots+\alpha^j|\le|\delta|} c^1_{\alpha^1}\cdots c^j_{\alpha^j}\cdot\sigma_{\delta-\alpha^1-\cdots-\alpha^j}+$$
$$+\sum_{\delta=\alpha^1+\cdots+\alpha^j} c^1_{\alpha^1}\cdots c^j_{\alpha^j}\cdot\mu_0(f) = \sum_{|\alpha^1|\ge m_1+|\gamma_1|}\cdots\sum_{|\alpha^n|\ge m_n+|\gamma_n|} a^1_{\alpha^1}\cdots a^n_{\alpha^n}\Delta_{\alpha^1\ldots\alpha^n}\times$$
$$\times\mathfrak{M}\left[\sum_{p_{j+1}+\cdots+p_n\le|\delta|-j\sum_k|\gamma_k|-s_1-\cdots-s_j} \frac{(-1)^{p_{j+1}+\cdots+p_n}\cdot z^{\sum_k \alpha^k}\cdot q_{j+1}^{p_{j+1}}\cdots q_n^{p_n}}{z^\delta\cdot z^{(p_{j+1}+1)\beta_{j+1}}\ldots z^{(p_n+1)\beta_n}}\right],$$

где $\mathfrak{M}[\cdot]$ – линейный функционал, сопоставляющий многочлену Лорана $[\cdot]$ его свободный член.

Замечание. По сравнению с предыдущими работами в этом направлении уравнения системы (1) имеют более сложный вид. Рекуррентные соотношения статьи [4] следуют из полученного в Теореме 1 выражения — для этого достаточно положить в нем все γ_j равными нулю.

Системы, рассмотреные в данной статье, и в статье [3] не сводятся друг к другу из-за наложенного нами ограничения о невырожденности системы многочленов $P_1(z), \ldots, P_n(z)$.

References

[1] Aizenberg L.A., Yuzhakov A.P. *Integral representations and residues in multidimensional complex analysis.* Transl. Math. Monogr., 58. AMS, 1983, 283 p.

[2] Aizenberg L.A., Kytmanov A.M. Multidimensional analogues of Newton's formulas for systems of nonlinear algebraic equations and some of their applications, *Siberian Math. J.*, 1981, vol. 22, no. 2, pp. 180–189.

[3] Kytmanov A.A. Analogs of recurrent Newton formulas. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2009, vol. 53, no. 10, pp. 34–44. https://doi.org/10.3103/S1066369X09100053

[4] Kytmanov A.M. On analogues of Newton recurrent formulas for systems of transcendental equations. *Siberian Math. J.*, 2025, vol. 66, no. 1, pp. 43–56. (in Russian) https://doi.org/10.33048/smzh.2025.66.106

[5] Kytmanov A.M., Myshkina E.K. Residue integrals and Waring formulas for algebraical and transcendental systems of equations. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2019, vol. 63, no. 5, pp. 36–50. https://doi.org/ 10.3103/S1066369X19050049

[6] Kytmanov A.M., Potapova Z.E. Formulas for determining power sums of roots of systems of meromorphic functions. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2005, vol. 49, no. 8, pp. 36–45.

[7] Prasolov V.V. *Polynomials.* Springer, 2009, 314 p.

[8] Yuzhakov A.P., Tsikh A.K. The multiplicity of the zero of a system of holomorphic functions. *Siberian Math. J.*, 1978, vol. 19, no. 3, pp. 489–492. https://doi.org/10.1007/BF01875302

[9] Tsikh A.K. *Multidimensional residues and their applications.* Transl. Math. Monogr., 103. AMS, 1992, 188 p.

[10] Bykov V.I., Kytmanov A.M., Lazman M.Z. *Elimination methods in polynomial computer algebra.* Dodrecht-Boston-Basel, Kluwer Academic Publishers, 1998, 237 p.

[11] Griffiths F., Harris J. *Principles of algebraic geometry.* New York, Wiley, 2011, 832 p.
[12] Horn R.A., Johnson C.R. *Matrix Analysis.* Cambridge, Camb. Univ. Press, 1985, 576 p.
[13] Macaulay F.S. *Algebraic theory of modular systems.* Cambridge, Camb. Univ. Press, 1916, 112 p.
[14] van der Waerden B.L. *Algebra. Vol. II.* New York, Springer, 2003, 284 p.

Evgeniya Konstantinovna Myshkina
Siberian Federal University,
Institute of Mathematics and Computer Science,
pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
Email address: elfifenok@mail.ru