S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 512.643, 519.173
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 15A27, 05C12

ГРАФ ω-КОММУТИРОВАНИЙ АЛГЕБРЫ МАТРИЦ НАД ПОЛЕМ

О.В. Маркова

Abstract: The paper is devoted to the ω-commuting digraph of the full matrix algebra $M_n(\mathbb{F})$ over a field $\mathbb{F}$, where $\omega \in \mathbb{F}$ is different from 0 and ± 1. If $n = 2$ it is shown that the ω-commuting graph is disconnected and is a union of one strongly connected component of diameter 4 and several strongly connected components of diameter 2. If $n \geq 3$ and the field is algebraically closed the ω-commuting graph is strongly connected and has diameter 4. Also it is shown that for all $n \geq 2$ the connected components and their diameters in the underlying undirected graph are the same as in the directed case.
Статья посвящена орграфу ω-коммутирований полной матричной алгебры $M_n(\mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$, где коэффициент $\omega \in \mathbb{F}$ отличен от 0 и ± 1. При $n = 2$ показано, что граф ω-коммутирований несвязен и является объединением одной сильно связной компоненты диаметра 4 и нескольких сильно связных компонент диаметра 2. При $n \geq 3$ и алгебраически замкнутом поле граф ω-коммутирований сильно связен и имеет диаметр 4. Также показано, что для всех $n \geq 2$ связные компоненты и их диаметры в основном неориентированном графе такие же, как и в ориентированном случае.

Markova, O.V., The ω-commuting graph of the matrix algebra over a field.

Исследования автора поддержаны Московским центром фундаментальной и прикладной математики МГУ имени М. В. Ломоносова по соглашению № 075-15-2025-345.

Keywords: relation graphs for rings, orthogonality graph, ω-commuting graph, matrix algebra.
графы отношений в кольцах, граф ортогональности, граф ω-коммутирований, матричная алгебра.

1 Введение

Бинарные отношения на ассоциативных кольцах, в частности, на матричном кольце, являются важным предметом исследований современной математики, активно используемым в многочисленных приложениях. Эффективным способом изучения заданного отношения является рассмотрение так называемого *графа отношения*, вершинами которого являются элементы некоторого подмножества кольца, при этом две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда рассматриваемые элементы кольца состоят в отношении. В последнее время интенсивно изучаются граф отношения коммутирвания, граф делителей нуля и граф отношения ортогональности, см. [1]–[6], [8]–[9], [11], [20] и их библиографию. Заметим, что для симметричных отношений, например, коммутативности или ортогональности, естественно рассматривать обычные (неориентированные) графы, в то время как для несимметричных отношений более естественным является построение ориентированных графов (орграфов). В данной работе мы, в частности, определяем связь между изучением графов ω-коммутирования и ортогональности, поэтому будем использовать оба подхода.

Всюду в статье $M_n(\mathbb{F})$ обозначает алгебру матриц размера $n \times n$ над полем $\mathbb{F}$.

Определение 1. *При фиксированном $\omega \in \mathbb{F}$ говорят, что матрицы A, B из $M_n(\mathbb{F})$* коммутируют с точностью до множителя ω *или* ω-коммутируют, *если $AB = \omega BA$.*

Отметим, что при $\omega = 1$ отношение 1-коммутативности является коммутативностью в классическом смысле, поэтому ω-коммутативность как отношение обобщает коммутативность. Случаи $\omega = \pm 1$ являются особыми, поскольку для этих и только для этих значений параметра ω отношение ω-коммутативности симметрично. Другой особый случай — это $\omega = 0$. Соотношение $AB = 0BA = O$ означает, что матрицы A и B являются делителями нуля. Исследование ω-коммутирующих матриц проводится с самых разных точек зрения, см., например, обзор [17] о возможных нормальных формах для ω-коммутирующих пар матриц, [12]–[13] об аналогах теоремы о двойном централизаторе относительно этого соотношения, [14]–[15] о связи с порождающими множествами и их числовыми характеристиками. Более того, это соотношение актуально и для разнообразных приложений, например, в квантовой физике, см. классические монографии [10, 18] и их библиографию, в теории представлений аффинных алгебр Гекке, см. [19], и в теории кодирования [7].

Отношения коммутативности, ω-коммутативности и свойство быть делителями нуля тесно связаны с отношением ортогональности. Напомним, что

Определение 2. *Элементы r, s кольца R называются* ортогональными*, если $rs = sr = 0$.*

Очевидно, что ортогональные элементы — это как двусторонние делители нуля, так и коммутирующие элементы кольца. Связь с соотношением ω-коммутативности в матричной алгебре описывается следующим образом.

Замечание 1. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\omega \in \mathbb{F}$, $\omega \neq 0, \pm 1$ и $n \geq 2$. Для матриц $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, если одновременно A и B ω-коммутируют: $AB = \omega BA$, и B и A ω-коммутируют: $BA = \omega AB$, то $AB = \omega^2 AB$, $\omega^2 \neq 1$, следовательно, $AB = BA = O$. Таким образом, пары ортогональных матриц — это в точности те пары, для которых отношение ω-коммутативности симметрично.*

Изучение графа отношения ω-коммутрования для матричной алгебры над полем было начато П. Раджой и С. Ваезпуром в работе [21].

Определение 3 ([21])**.** *Для поля $\mathbb{F}$, $\omega \in \mathbb{F}$ и $n \geq 2$,* граф ω-коммутирования *множества $M_n(\mathbb{F})$, обозначаемый через $\Delta_\omega(M_n(\mathbb{F}))$, представляет собой ориентированный граф, множество вершин которого состоит из всех нескалярных матриц A, таких, что A и ωA имеют общее собственное значение, и для любых двух вершин A и B, $A \to B$ является дугой тогда и только тогда, когда A и B ω-коммутируют.*

Если $\mathcal{X}$ — подмножество $M_n(\mathbb{F})$, то $\Delta_\omega(\mathcal{X})$ обозначает индуцированный ориентированный подграф $\Delta_\omega(M_n(\mathbb{F}))$ на пересечении $\mathcal{X}$ и множества вершин $\Delta_\omega(M_n(\mathbb{F}))$.

В [21] авторы нашли несколько условий, гарантирующих сильную связность графа $\Delta_\omega(M_n(\mathbb{F}))$. Также были исследованы индуцированные ориентированные подграфы на множествах всех приводимых, треугольных, необратимых, идемпотентных и диагональных матриц из $M_n(\mathbb{F})$. Приведём результаты, относящиеся к графу ω-коммутирований полной матричной алгебры.

Случай $\omega = 0$ полностью решён, кроме того он выделяется отдельно и в отношении связности, и по значению диаметра.

Теорема 1 ([21, следствие 2.6])**.** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $n \geq 2$. Тогда орграф $\Delta_0(M_n(\mathbb{F}))$ сильно связен и $\operatorname{diam}(\Delta_0(M_n(\mathbb{F}))) = 2$.*

Для произвольных $\omega \in \mathbf{F}$ и $n \geq 3$ получены следующие результаты.

Теорема 2 ([21, следствие 2.18])**.** *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле, $\omega \in \mathbb{F}$ и $n \geq 3$. Тогда орграф $\Delta_\omega(M_n(\mathbb{F}))$ сильно связен.*

Теорема 3 ([21, теорема 2.21]). *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и пусть $n \geq 3$. Если $\omega \in \mathbb{F}^*$ не является корнем из единицы, то орграф $\Delta_\omega(M_n(\mathbb{F}))$ сильно связен и* $\operatorname{diam}(\Delta_\omega(M_n(\mathbb{F}))) \leq 6$.

В данной работе продолжено исследование структуры и диаметра графа ω-коммутирований полной матричной алгебры над полем. В нашем исследовании мы исключим $\omega = 0$ и симметричные случаи $\omega = \pm 1$, определяющие неориентированные графы отношений коммутативности и антикоммутативности. Это условие накладывает ограничение на мощность основного поля, а именно $|\mathbb{F}| \geq 4$. Далее мы рассматриваем произвольные поля, удовлетворяющие этому ограничению. Предполагается уточнить утверждения теорем 2 и 3 относительно значения диаметра графа ω-коммутирований, а именно, показать что в случае алгебраически замкнутых полей диаметр равен 4. Кроме того, мы исследуем не только ориентированный граф ω-коммутирований, но и его основной граф, полученный заменой всех дуг орграфа неориентированными рёбрами, и покажем совпадение значений диаметров в ориентированном и неориентированном случаях.

Наша работа построена следующим образом. Раздел 2 содержит основные определения и некоторые вспомогательные результаты, касающиеся теории графов и ω-коммутирующих матриц. В разделе 3 показано, что для произвольного поля граф ω-коммутирований алгебры $M_2(\mathbb{F})$ несвязен и представляет собой объединение одной сильно связной компоненты диаметра 4 и нескольких сильно связных компонент диаметра 2 (Теорема 4). В разделе 4 для всех $n \geq 3$ и алгебраически замкнутых полей установлено, что граф ω-коммутирований алгебры $M_n(\mathbb{F})$ сильно связен и имеет диаметр 4 (Теорема 7). Также показано, что для всех $n \geq 2$ компоненты связности и их диаметры в основном неориентированном графе такие же, как и в ориентированном случае.

2 Основные определения

Всюду в статье $M_n(\mathbb{F})$ обозначает алгебру матриц порядка n над полем $\mathbb{F}$, $T_n(\mathbb{F})$ обозначает подалгебру верхнетреугольных матриц в $M_n(\mathbb{F})$, $\mathbb{F}^n$ обозначает пространство столбцов высоты n над полем $\mathbb{F}$.

Через E_{ij} обозначим матричную единицу с 1 на позиции (i, j) и нулями во всех остальных местах. Через E_n, или E, если размер матриц виден из контекста, обозначим единичную матрицу в $M_n(\mathbb{F})$; через O_n, или O, если размер ясен из контекста, обозначим нулевую матрицу в $M_n(\mathbb{F})$, а через $O_{k\times m}$ — прямоугольную нулевую матрицу размера $k \times m$. Через $J_n(\lambda)$ обозначим верхнетреугольную жорданову клетку размера n с собственным значением λ.

Для $A \in M_n(\mathbb{F})$ через A^T будем обозначать транспонированную матрицу. Также для подмножества $\mathcal{X} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ положим $\mathcal{X}^T = \{X^T | X \in \mathcal{X}\}$.

Напомним некоторые определения из теории графов. Понятия теории графов, используемые в этой статье, можно найти, например, в [16, Глава 2].

Определение 4. Ориентированный граф *(или кратко* орграф Δ *— это упорядоченная пара $\Delta = (V, A)$, где V — непустое множество вершин, а A — (возможно, пустое) множество объектов, называемых* дугами *(или* направленными рёбрами*), вида $u \to v$, где u и v — два элемента из множества вершин V графа Δ. Отличие от* обычного *или* неориентированного графа $\Gamma = (V, E)$ *состоит в том, что последний определяется в терминах неупорядоченных пар вершин, которые обычно называются* рёбрами. *Мы не допускаем, чтобы граф имел кратные дуги или рёбра, но при этом петли допустимы.*

Определение 5. Симметричный орграф *— это орграф, в котором для каждой дуги $u \to v$, соответствующая обратная дуга $v \to u$ также принадлежит ему, т.е. другими словами все рёбра встречаются дважды, по одному в каждом направлении.*

Определение 6. *Используя приведённое выше определение, можно преобразовать любой неориентированный граф $\Gamma = (V, E)$ в симметричный орграф $D\Gamma$ с тем же множеством вершин V, превратив каждое ребро $v - u$ в две дуги $u \to v$ и $v \to u$.*

Обратно, для любого орграфа Δ можно рассмотреть неориентированный основной граф $U\Delta$*, полученный заменой всех дуг графа неориентированными рёбрами (при этом если для пары вершин u, v в орграфе было две дуги $u \to v$ и $v \to u$, то в основном графе остаётся оно ребро $u - v$).*

Определение 7. Маршрут M *в обычном графе Γ — это последовательность вершин и рёбер $v_0, e1, v_1, e_2, \dots e_k, v_k$, члены которой являются попеременно вершинами и рёбрами, такая, что для любых i, $1 \le i \le k$, ребро e_i равно $v_{i-1} - v_i$. Число k называется* длиной M. *Граф называется* связным*, если из любой вершины можно построить маршрут в любую другую вершину графа, в противном случае он называется* несвязным графом. Расстояние $\mathrm{d}\,(u, v)$ *между двумя вершинами u и v в графе Γ — это длина кратчайшего пути между ними. Если u и v недостижимы друг из друга, полагаем $\mathrm{d}\,(u, v) = \infty$. Также по определению предполагается, что $\mathrm{d}\,(u, u) = 0$ для любой вершины u.* Диаметр $\operatorname{diam}\Gamma$ *графа Γ — это супремум расстояний между вершинами для всех пар вершин в графе.*

Определение 8. *В ориентированном графе Δ* направленный маршрут *или* путь P *— это последовательность $v_0, a_1, v_1, a_2, \dots a_k, v_k$, члены которой являются попеременно вершинами и дугами, такая, что для любого i, $1 \le i \le k$, дуга a_i равна $v_{i-1} \to v_i$. Число k называется* длиной P. *В ориентированном графе Δ полагаем, что вершина u* соединена *с вершиной v, если существует направленный путь из u в v. Для двух* *вершин u и v в ориентированном графе Δ* расстояние *между u и v, обозначаемое как $\mathrm{d}\,(u,v)$, равно длине кратчайшего ориентированного пути из u в v, если такой путь существует; в противном случае полагают, что $\mathrm{d}\,(u,v)=\infty$.* Диаметр *ориентированного графа Δ определяется как $\operatorname{diam}\Delta=\sup\{\mathrm{d}\,(u,v)|u,v$ являются различными вершинами$\Delta\}$.*

Определение 9. *В ориентированном графе Δ упорядоченная пара вершин (u,v) называется* сильно связной*, если путь ведёт из u в v. В противном случае упорядоченная пара называется* слабо связной*, если u в v можно связать маршрутом в основном графе после замены всех ориентированных рёбер неориентированными. В противном случае упорядоченная пара называется* несвязной*.*

Определение 10. Сильно связный орграф *— это ориентированный граф, в котором каждая упорядоченная пара вершин сильно связна. В противном случае он называется* слабо связным графом*, если каждая упорядоченная пара вершин слабо связна. В противном случае он называется* несвязным графом*.*

Определение 11. Связная компонента *графа Γ — это его максимальный связный подграф. Аналогично,* связная компонента *орграфа Δ — это максимальный сильно связный подграф графа Δ.*

Определение 12. *Граф $\Gamma_1=(V_1,E_1)$ называется* изоморфным *графу $\Gamma_2=(V_2,E_2)$, если существует биекция множеств вершин $\varphi: V_1\to V_2$, обладающая следующим свойством: если в графе Γ_1 есть ребро из вершины u в вершину v, то в графе Γ_2 есть ребро из вершины $\varphi(u)$ в вершину $\varphi(v)$, и наоборот — если в графе Γ_2 есть ребро из вершины x в вершину y, то в графе Γ_1 должно быть ребро из вершины $\varphi^{-1}(x)$ в вершину $\varphi^{-1}(y)$. В случае ориентированного графа эта биекция также должна сохранять ориентацию ребра.*

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей.

Обозначение 1. *Для подмножества $\mathcal{X}$ кольца R для краткости $\mathcal{X}\backslash\{0\}$ обозначим за $\mathcal{X}^0$*

Напомним, что элемент a кольца R называется *левым (правым) делителем нуля*, если в R существует ненулевой элемент b, такой что $ab=0$ (соответственно, $ba=0$). Элемент, являющийся одновременно левым и правым делителем нуля, называется *двусторонним делителем нуля.*

Обозначение 2. *Через $O_R(\mathcal{X})$, где $\mathcal{X}$ — подмножество R, мы обозначаем множество элементов кольца R, ортогональных каждому элементу из $\mathcal{X}$.*

Замечание 2. *Нулевой элемент $0\in R$ ортогонален каждому элементу кольца. Напротив, если элемент $r\in R$ не является ни левым, ни правым делителем нуля, то не существует ненулевого элемента $x\in R$, такого, что $xr=rx=0$, следовательно, не существует ненулевых* *элементов R, ортогональных r. В связи с этим мы априори удаляем из вершин графа ортогональности* 0 *и элементы, не делящие ноль хотя бы с одной стороны.*

Определение 13 ([9, определение 2.15])**.** *Для каждого кольца R определим неориентированный* граф ортогональности $O(R)$ *такой, что его вершины — все двусторонние делители нуля R, и ребро между парой вершин существует тогда и только тогда, когда они ортогональны.*

Если $\mathcal{X}$ — подмножество R, то $O(\mathcal{X})$ обозначает индуцированный подграф $O(R)$ на пересечении $\mathcal{X}$ и множества двусторонних делителей нуля R.

Для установления дальнейшей взаимосвязи между графами ω-коммутирования и ортогональности, используя определение 6, введём

Определение 14. Ориентированный граф ортогональности $DO(R)$ *кольца R — орграф, вершинами которого являются все двусторонние делители нуля R, а дуги (u, v) и (v, u) между парами вершин существуют тогда и только тогда, когда u и v ортогональны.*

Граф $DO(R)$ является симметричным орграфом. Для подмножества $\mathcal{X}$ матричной алгебры $M_n(\mathbb{F})$ и коэффициента $\omega \in \mathbb{F}$, $\omega \neq 0, \pm 1$ орграф $DO(\mathcal{X})$ является максимальным симметричным подграфом орграфа ω-коммутирований $\Delta_\omega(\mathcal{X})$.

Определение 15. *Для заданных коэффициента $\omega \in \mathbb{F}$ и подмножества $\mathcal{X} \in M_n(\mathbb{F})$ определим* обобщённый централизатор

$$\mathcal{C}^\omega(\mathcal{X}) = \bigcap_{A \in \mathcal{X}} \mathcal{C}^\omega(A),$$

где

$$\mathcal{C}^\omega(A) = \{B \in M_n(\mathbb{F}) : AB = \omega BA\}.$$

Заметим, что для любой матрицы A-вершины графа $\Delta_\omega(M_n(\mathbb{F}))$ все ненулевые матрицы из $\mathcal{C}^\omega(A)$ — это в точности те вершины, в которые из A выходят дуги, а все ненулевые матрицы из $\mathcal{C}^{\omega^{-1}}(A)$ — это в точности те вершины, дуги из которых заканчиваются в A.

Напомним техническое утверждение о явном строении обобщённого централизатора жордановой матрицы из работы [13], которое неоднократно будет использовано в данной статье.

Предложение 1 ([13, Предложение 7])**.** *Пусть $\mathbb{F}$ — поле, $\omega \in \mathbb{F}$, $\omega \neq 0, 1$. Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$ — жорданова матрица вида $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$, где $A_i = J_{n_i}(\lambda_i)$ — жорданова клетка (числа λ_i могут совпадать). Рассмотрим матрицу $X \in M_n(\mathbb{F})$, $AX = \omega XA$. Разобьём X на m^2 блоков X_{kl} размеров $n_k \times n_l$ в соответствии с блочным разбиением A. Тогда*

1. $X_{rs}=0$ *если* $r=s$ *и* $\lambda_r\neq 0$*, или если* $r\neq s$ *и* $\lambda_r\neq\omega\lambda_s$*;*
2. если $\lambda_r=0$*, то*

$$X_{rr}=\begin{pmatrix} y_{r,r;1} & y_{r,r;2} & y_{r,r;3} & \dots & y_{r,r;n_r}\\ 0 & \omega y_{r,r;1} & \omega y_{r,r;2} & \dots & \omega y_{r,r;n_r-1}\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & & \omega^{n_r-2}y_{r,r;1} & \omega^{n_r-2}y_{r,r;2}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega^{n_r-1}y_{r,r;1}\end{pmatrix};$$

3. если $\lambda_r=\omega\lambda_s$*, то*

$$X_{rs}=\begin{pmatrix} 0 & \dots & y_{r,s;1} & y_{r,s;2} & \dots & y_{r,s;n_r}\\ 0 & 0 & 0 & \omega y_{r,s;1} & \dots & \omega y_{r,s;n_r-1}\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \omega^{n_r-1}y_{r,s;1}\end{pmatrix},\ n_r<n_s.$$

$$X_{rs}=\begin{pmatrix} y_{r,s;1} & y_{r,s;2} & \dots & y_{r,s;n_s}\\ 0 & \omega y_{r,s;1} & \ddots & \omega y_{r,s;n_s-1}\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots\\ 0 & 0 & & \omega^{n_s-1}y_{r,s;1}\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix},\ n_r\geq n_s.$$

Предложение 2. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— поле,* $\omega\in\mathbb{F}$*,* $\omega\neq 0,\pm1$*,* $n\geq 2$*. Для произвольной* $A\in M_n(\mathbb{F})$ *справедливо равенство* $\mathcal{C}^{\omega^{-1}}(A^T)=\mathcal{C}^{\omega}(A)^T$*.*

Доказательство. Если верно равенство $AB=\omega BA$, то после применения действия транспонирования получим $B^TA^T=\omega A^TB^T$, или $A^TB^T=\omega^{-1}B^TA^T$. □

Предложение 3. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— поле,* $\omega\in\mathbb{F}$*,* $\omega\neq 0,\pm1$*,* $n\geq 2$*. Для произвольной* $A\in M_n(\mathbb{F})$ *верно, что* $\mathcal{C}^{\omega}(A)\neq 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{C}^{\omega^{-1}}(A)\neq 0$*.*

Доказательство. Матричное уравнение $AX=\omega XA$ эквивалентно однородной системе линейных уравнений с неизвестными-элементами X и коэффициентами, которые линейно выражаются через элементы A и число ω. Размерность пространства решений такой системы уравнений не меняется при расширении поля коэффициентов, поэтому можем считать, что поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. Если $J\in M_n(\mathbb{F})$ — жорданова нормальная форма матрицы A, $J=C^{-1}AC$, то после сопряжения равенства $AX=\omega XA$, получим $J(C^{-1}XC)=\omega(C^{-1}XC)J$, $C^{-1}XC\in\mathcal{C}^{\omega}(J)$ тогда и только тогда, когда $X\in\mathcal{C}^{\omega}(A)$. Следовательно, $\dim\mathcal{C}^{\omega}(A)=\dim\mathcal{C}^{\omega}(J)$.

Из предложения 1 следует, что для жордановой матрицы J размерность $\dim \mathcal{C}^{\omega}(J) > 0$ тогда и только тогда, когда у J есть собственное число 0, либо пара собственных чисел λ и $\omega\lambda$. В этом случае $\lambda = \omega^{-1}(\omega\lambda)$, поэтому в силу того же утверждения, $\dim \mathcal{C}^{\omega^{-1}}(J) > 0$. $\square$

3 Случай алгебры матриц порядка 2

Для графа ω-коммутирований случай матричной алгебры второго порядка отличается от общего случая тем, что основной граф является несвязным независимо от поля. В данном разделе мы опишем компоненты связности и определим их диаметры как для орграфа $\Delta_\omega(M_2(\mathbb{F}))$, так и для основного графа $U\Delta_\omega(M_2(\mathbb{F}))$.

Лемма 1. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\omega \in \mathbb{F} \setminus \{0, \pm 1\}$. Рассмотрим множества $N, R \subset M_2(\mathbb{F})$:*

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big| \, 0 \neq a \in \mathbb{F} \right\} \bigcup \bigcup_{0 \neq \alpha \in \mathbb{F}} \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha a & a \\ -\alpha^2 a & \alpha a \end{pmatrix} \Big| \, 0 \neq a \in \mathbb{F} \right\},$$

$$R = \bigcup_{0 \neq \alpha \in \mathbb{F}} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ b & \omega\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & \omega\alpha \end{pmatrix} \Big| \, b \in \mathbb{F} \right\} \bigcup$$

$$\bigcup_{0 \neq \alpha \in \mathbb{F}} \left\{ \begin{pmatrix} \omega\alpha & 0 \\ b & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega\alpha & b \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \Big| \, b \in \mathbb{F} \right\}$$

$$\bigcup \bigcup_{0 \neq \alpha \in \mathbb{F}} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha b^{-1}(\omega a - \omega + a - a^2) & \alpha(\omega + 1 - a) \end{pmatrix} \Big| \, 1 \neq a \in \mathbb{F}, 0 \neq b \in \mathbb{F} \right\}.$$

Тогда
1. множество N состоит из всех ненулевых нильпотентных матриц из $M_2(\mathbb{F})$;
2. множество R состоит из всех невырожденных матриц $A \in M_2(\mathbb{F})$, для которых A и ωA имеют общее собственное число.

Доказательство. 1. Пусть $A \in M_2(\mathbb{F})$, $A \neq O$ — нильпотентная матрица. В силу вырожденности A имеем $\mathrm{rk} A = 1$. Если в A есть нулевая строка или столбец, то вместе с условием нильпотентности, это даёт, что A — нильтреугольная. По построению ясно, что все ненулевые верхне- и нижне-нильтреугольные матрицы в N содержатся. Теперь пусть в матрице A нет нулей. Тогда $A = \begin{pmatrix} c & d \\ kc & kd \end{pmatrix}$, $c, d, k \neq 0$. Имеем $A^2 = \begin{pmatrix} c^2 + kcd & cd + kd^2 \\ k(c^2 + kcd) & k(cd + kd^2) \end{pmatrix} = 0$. Отсюда следует, что $c + kd = 0$, $c = -kd$, $A = \begin{pmatrix} -kd & d \\ -k^2 d & kd \end{pmatrix} \in N$. Такими матрицами исчерпывается всё множество N.

2. Пусть $A \in M_2(\mathbb{F})$ — невырожденная матрица, для которой A и ωA имеют общее собственное число (возможно в алгебраическом замыкании

$\bar{\mathbb{F}}$). Если A невырожденная матрица порядка 2 и её собственными числами являются λ и $\omega\lambda$, то их сумма $(\omega+1)\lambda$ — это след матрицы A. Значит, $(\omega+1)\lambda \in \mathbb{F}$. Поскольку по условию $\omega \neq -1$, то отсюда следует, что $\lambda \in \mathbb{F}$ и матрица A диагонализируема над $\mathbb{F}$.

Если у матрицы $A \in M_2(\mathbb{F})$ элемент $a_{12} = 0$, то она нижнетреугольная, поэтому на диагонали расположены её собственные числа λ и $\omega\lambda$. В этом случае либо $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ b & \omega\lambda \end{pmatrix}$, либо $A = \begin{pmatrix} \omega\lambda & 0 \\ b & \lambda \end{pmatrix}$ и в обоих случаях $A \in R$. При условии $a_{21} = 0$ доказательство аналогично. Пусть теперь $a_{12}a_{21} \neq 0$. Рассмотри сперва матрицу A с собственными числами 1 и ω. Обозначим для краткости a_{11} за a, a_{12} за b, $b \neq 0$. Тогда $a + a_{22} = \mathrm{tr}A = \omega + 1$, откуда $a_{22} = \omega + 1 - a$. Также по условию $\omega = \det A = \omega a + a - a^2 - ba_{21}$. Следовательно, $a_{21} = b^{-1}(\omega a - \omega + a - a^2)$. Такая матрица A содержится в R (это матрица $\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha b^{-1}(\omega a - \omega + a - a^2) & \alpha(\omega + 1 - a) \end{pmatrix}$ при $\alpha = 1$). Действие умножения на α доказывает утверждение для матриц A с собственными числами α и $\omega\alpha$. $\square$

Лемма 2. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\omega \in \mathbb{F} \setminus \{0, \pm 1\}$. Рассмотрим множества $N, R \subset M_2(\mathbb{F})$, определённые в лемме 1, и $V = N \bigcup R$. Тогда*
1. множество V является компонентой связности основного графа $U\Delta_\omega(M_2(\mathbb{F}))$;
2. основной граф $U\Delta_\omega(V)$ имеет диаметр 4; 3. орграф $\Delta_\omega(V)$ сильно связен и имеет диаметр 4.

Доказательство. I. По определению вершинами графа $\Delta_\omega(M_2(\mathbb{F}))$ являются все такие ненулевые матрицы $A \in M_2(\mathbb{F})$, для которых A и ωA имеют общее собственное число (возможно в алгебраическом замыкании $\bar{\mathbb{F}}$). Матрицы множества R удовлетворяют этому условию по построению. Вырожденные матрицы всегда удовлетворяют этому условию для всех $n \geq 2$, значит матрицы из множества N также являются вершинами графа $\Delta_\omega(M_2(\mathbb{F}))$. Покажем, что в графе $U\Delta_\omega(M_2(\mathbb{F}))$ матрицы из V не соединены рёбрами ни с какими матрицами вне V.

Поскольку сопряжение сохраняет спектр, жорданову нормальную форму, нильпотентность матрицы и её индекс нильпотентности, то множества N и R замкнуты относительно сопряжения, т.к. они содержит все матрицы соответствующих типов.

Любая нильпотентная матрица $A \in N$ сопряжена в $M_2(\mathbb{F})$ с жордановой матрицей $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, т.е. $A = C^{-1}JC$ для некоторой обратимой $C \in M_2(\mathbb{F})$. Согласно пункту 2 предложения 1 получаем, что

$$\mathcal{C}^{\omega}(J) = \left\{ T_{y,z} = \begin{pmatrix} y & z \\ 0 & \omega y \end{pmatrix} \,\middle|\, y, z \in \mathbb{F} \right\},$$

$$\mathcal{C}^{\omega^{-1}}(J) = \left\{ \begin{pmatrix} y & z \\ 0 & \omega^{-1} y \end{pmatrix} \,\middle|\, y, z \in \mathbb{F} \right\}$$

и по построению $\mathcal{C}^{\omega}(J)^0, \mathcal{C}^{\omega^{-1}}(J)^0 \subset V$. Значит, $\mathcal{C}^{\omega}(A)^0 = C^{-1}\mathcal{C}^{\omega}(J)^0 C \subset V$ и $\mathcal{C}^{\omega^{-1}}(A)^0 = C^{-1}\mathcal{C}^{\omega^{-1}}(J)^0 C \subset V$. Это означает, что концы всех дуг, выходящих из вершины A, и начала всех дуг, заканчивающихся в вершине A, лежат в V.

Аналогично, любая матрица $A \in M_2(\mathbb{F})$ с собственными числами λ и $\omega\lambda$ сопряжена в $M_2(\mathbb{F})$ с жордановой диагональной матрицей $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \omega\lambda \end{pmatrix}$, $A = C^{-1}DC$ для некоторой обратимой $C \in M_2(\mathbb{F})$. Тогда из пункта 3 предложения 1 получаем, что

$$\mathcal{C}^{\omega}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, u \in \mathbb{F} \right\},$$

$$\mathcal{C}^{\omega^{-1}}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, u \in \mathbb{F} \right\},$$

и $\mathcal{C}^{\omega}(D)^0, \mathcal{C}^{\omega^{-1}}(D)^0 \subset N$. Значит, $\mathcal{C}^{\omega}(A)^0 = C^{-1}\mathcal{C}^{\omega}(D)^0 C \subset N \subset V$ и $\mathcal{C}^{\omega^{-1}}(A)^0 = C^{-1}\mathcal{C}^{\omega^{-1}}(D)^0 C \subset N \subset V$.

Таким образом, в обоих случаях матрицу A можно соединить дугами только с некоторыми матрицами из множества V.

Далее мы покажем, что любые две вершины из V можно соединить ориентированным путём длины, не превосходящей 4.

II. Поскольку множество V состоит из двух типов матриц — нильпотентных и обратимых, возможны следующие 3 случая для пар вершин, между которыми необходимо построить путь.

1. Как начальная вершина A_1, так и конечная A_2 являются нильпотентными матрицами.

Как отмечено в пункте I, $A_1 = C_1^{-1}JC_1$ для некоторой обратимой $C_1 \in M_2(\mathbb{F})$. Поэтому если построить путь $J \to B_1 \to \ldots \to B_k \to A$, $B_1, \ldots, B_k \in V$, $A \in N$ — произвольная, то найдётся и путь $A_1 \to C_1^{-1}B_1C_1 \to \ldots \to C_1^{-1}B_kC_1 \to C_1^{-1}AC_1$, причём $C_1^{-1}B_iC_1 \in V$ для всех обратимых матриц C_1 и всех $i = 1, \ldots, k$, и существует A, для которой $A_2 = C_1^{-1}AC_1$ (см. пункт I).

Если $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T_{0,a}$, $a \neq 0, 1$ (в обозначениях из пункта I), то имеем дугу $J \to A$, т.е. ориентированный путь длины 1.

Далее рассмотрим матрицу $T_{y,z} \in \mathcal{C}^{\omega}(J)$, у которой $y \neq 0$. В силу линейности соотношения ω-коммутирования имеем $\mathcal{C}^{\omega}(T_{y,z}) = \mathcal{C}^{\omega}(T_{1,zy^{-1}})$, поэтому достаточно рассмотреть матрицы $T_{1,z}$, $z \in \mathbb{F}$. При $z = 0$ матрица $T_{1,0}$ является диагональной и $T_{1,0} = D$, поэтому $\mathcal{C}^{\omega}(T_{1,0}) = \mathcal{C}^{\omega}(D)$. Отсюда для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$, находим путь $J \to T_{1,0} \to A$ длины 2.

С другой стороны, если $z \neq 0$, то матрица $T_{1,0} = D$ является жордановой нормальной формой матрицы $T_{1,z}$. В качестве матрицы, осуществляющей подобие, подходит $P = \begin{pmatrix} -z(\omega-1)^{-1} & z(\omega-1)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_{1,z} = PT_{1,0}P^{-1}$. Вычислим $P\mathcal{C}^{\omega}(T_{1,0})P^{-1}$. Имеем

$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} zu(\omega-1)^{-1} & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(\omega-1)z^{-1} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -u & zu(\omega-1)^{-1} \\ -u(\omega-1)z^{-1} & u \end{pmatrix}.$$

Пусть $S_{u,z} = \begin{pmatrix} -u & zu(\omega-1)^{-1} \\ -u(\omega-1)z^{-1} & u \end{pmatrix}$. Полагая $a = (S_{u,z})_{12} = zu(\omega-1)^{-1}$, $\alpha = (\omega-1)z^{-1}$, получаем,

$$(S_{u,z})_{22} = \alpha a,\ (S_{u,z})_{11} = -(S_{u,z})_{22} = -\alpha a,\ (S_{u,z})_{21} = \alpha(S_{u,z})_{11} = -\alpha^2 a.$$

Таким образом, $S_{u,z} = \begin{pmatrix} -\alpha a & a \\ -\alpha^2 a & \alpha a \end{pmatrix}$, при этом когда параметр z пробегает все ненулевые числа из $\mathbb{F}$, учитывая, что $\omega \neq 1$, коэффициенту $\alpha = (\omega-1)z^{-1} \neq 0$ тоже можно придать любое значение. Более того, от u значение α не зависит. Тогда при фиксированном z, когда u пробегает все ненулевые числа из $\mathbb{F}$, коэффициент $a = zu(\omega-1)^{-1}$ также принимает любое ненулевое значение независимо от α. Таким образом, мы построили пути длины 2 вида $J \to T_{1,z} \to S_{u,z}$ во все нильпотентные матрицы из V, у которых нет нулевых элементов.

2. Начальная вершина A_1 — нильпотентная матрица, конечная вершина A_2 — обратимая. Аналогично доказанному в пункте II.1, будем строить путь, в предположении, что $A_1 = J$. Обобщённый ω-централизатор матрицы J содержит все обратимые матрицы вида $\begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & \omega\alpha \end{pmatrix}$, и из обратимых матриц только такие, поэтому для таких матриц есть пути из J длины 1. При $a \neq 0$ по линейности имеем $\mathcal{C}^{\omega}(aJ) = \mathcal{C}^{\omega}(J)$. Тогда путь из J в A_2 с начальным ребром $J \to aJ$ никогда не будет кратчайшим. Следовательно, учитывая рассуждения пункта II.1, рассматриваем начало пути вида $J \to T_{1,z} \to S_{u,z}$. При этом все матрицы $S_{u,z}$— нильпотентные, и из $T_{1,z}$ никаких других рёбер не выходит, значит длина пути всегда будет не меньше 3.

По доказанному выше, $\dim \mathcal{C}^{\omega}(S_{u,z}) = \dim \mathcal{C}^{\omega}(J) = 2$, при этом из $S_{u,z}$ есть рёбра либо в нильпотентные матрицы, кратные $S_{u,z}$, и никакой путь с таким ребром не является кратчайшим, либо в обратимые матрицы, которые мы сейчас опишем. Из пункта 1 предложения 1 получаем, что $\mathcal{C}^{\omega}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} \omega y' & 0 \\ v & y' \end{pmatrix} \middle| y', v \in \mathbb{F}\right\}$. При $z = 0$ полагая $y' = \alpha, v = b$ имеем пути $J \to T_{1,0} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \omega\alpha & 0 \\ b & \alpha \end{pmatrix}$ длины 3. Пусть теперь

$z \neq 0$. Поскольку $S_{u,z} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, при этом в более кратких обозначениях $P = \begin{pmatrix} -p & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $p = z(\omega - 1)^{-1}$. Сначала вычисляем

$$P \begin{pmatrix} \omega y' & 0 \\ 0 & y' \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -p\omega y' & py' \\ 0 & y' \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \omega y' & py'(1-\omega) \\ 0 & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega y' & -y'z \\ 0 & y' \end{pmatrix}.$$

Если взять $y' = \alpha$, $z = -b\alpha^{-1}$, то построены пути $J \to T_{1,z} \to S_{1,z} \to \begin{pmatrix} \omega\alpha & b \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ длины 3.

Теперь рассмотрим случай $v \neq 0$, $v' = v(y')^{-1}$. Непосредственно вычисляем

$$P \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ v' & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} p(v' - \omega) & p \\ v' & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \omega - v' & p(1 + v' - \omega) \\ -v'p^{-1} & v' + 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \omega - v' & z((\omega-1)^{-1}v' - 1) \\ -v'p^{-1} & v' + 1 \end{pmatrix}.$$

Если $v' = \omega - 1$, то $\begin{pmatrix} \omega - v' & z((\omega-1)^{-1}v' - 1) \\ -v'p^{-1} & v' + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z^{-1}(\omega-1)^2 & \omega \end{pmatrix}$. Выбирая $y' = \alpha$, $z = -\alpha b^{-1}(\omega - 1)^2$, получаем пути

$$J \to T_{1,z} \to S_{1,z} \to \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ b & \omega\alpha \end{pmatrix}$$

длины 3. Остался случай $v' \neq \omega - 1$. Пусть $a = \omega - v'$, тогда вместе с v' коэффициент a пробегает все возможные значения из $\mathbb{F}$. При заданных ограничениях элемент $b = z((\omega-1)^{-1}v' - 1) \neq 0$, и при фиксированном v' ему можно придать любое ненулевое значения засчёт выбора значения z. Таким образом мы получили произвольную невырожденную матрицу с собственными числами 1 и ω первой строкой (a, b). Следовательно, построены пути

$$J \to T_{1,z} \to S_{1,z} \to \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ b^{-1}(\omega a - \omega + a - a^2) & (\omega + 1 - a) \end{pmatrix}$$

длины 3.

3. Начальная вершина A_1 — обратимая матрица, конечная вершина A_2 — произвольная. Согласно доказанному в пункте 3, $\mathcal{C}^\omega(A_1)^0 \subset N$. Берём произвольную матрицу $B_1 \in \mathcal{C}^\omega(A_1)^0$. Тогда либо сразу $B_1 = A_2$ и построен путь из A_1 в A_2 длины 1, либо по доказанному в пунктах II.1 и II.2 нильпотентную матрицу B_1 возможно соединить с A_2 путём, длина которого не превосходит 3, и, добавляя к нему начальное ребро $A_1 \to B_1$, построен путь из A_1 в A_2 длины не более 4.

Следовательно, орграф $\Delta_\omega(V)$ сильно связен и имеет диаметр, не превосходящий 4, откуда также следует, что основной граф $U\Delta_\omega(V)$ является связным и его диаметр не превосходит 4. Вместе с доказанным в пункте I, отсюда получается утверждение 1.

III. Для доказательства утверждения 3 осталось показать существование вершин A_1, $A_2 \in V$, для которых $\mathrm{d}(A_1, A_2) = 4$ в $\Delta_\omega(V)$. Возьмём $A_1 = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega & \omega+1 \end{pmatrix} \in V$. Напомним, что $\mathcal{C}^\omega(D) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, u \in \mathbb{F} \right\}$, $\mathcal{C}^\omega\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} \omega y' & 0 \\ v & y' \end{pmatrix} \,\middle|\, y', v \in \mathbb{F} \right\}$. Эти множества по построению не содержат A_2, значит, $\mathrm{d}(A_1, A_2) > 2$. Используя рассуждения пункта (2), ребро, соединяющее вершины вида $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u' & 0 \end{pmatrix}$ можно сократить. Следовательно, начало кратчайшего пути из A_1 в A_2 будет иметь вид $A_1 \to B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix} \to B_2 = \begin{pmatrix} \omega y' & 0 \\ v & y' \end{pmatrix}$, где $uy' \neq 0$. При этом условии матрица B_2 — обратима, значит, по доказанному в пункте 3, $\mathcal{C}^\omega(B_2)^0 \subset N$. Это означает, что $\mathrm{d}(A_1, A_2) \neq 3$, т.е. $\mathrm{d}(A_1, A_2) \geq 4$.

IV. Для доказательства утверждения 2 покажем, что для вершин A_1, A_2 из пункта III $\mathrm{d}(A_1, A_2) = 4$ и в основном графе $U\Delta_\omega(V)$. Напомним, что $\mathcal{C}^{\omega^{-1}}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, u \in \mathbb{F} \right\}$, поэтому на расстоянии 1 от A_1 в графе $U\Delta_\omega(V)$ находятся нильпотентные матрицы с тремя нулевыми элементами и только они. Посмотрим, с чем они соединены:

$$\mathcal{C}^\omega\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} \omega y' & 0 \\ v & y' \end{pmatrix} \,\middle|\, y', v \in \mathbb{F} \right\},$$

$$\mathcal{C}^{\omega^{-1}}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} y' & 0 \\ v & \omega y' \end{pmatrix} \,\middle|\, y', v \in \mathbb{F} \right\},$$

$$\mathcal{C}^\omega\left(\begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} y' & v \\ 0 & \omega y' \end{pmatrix} \,\middle|\, y', v \in \mathbb{F} \right\},$$

$$\mathcal{C}^{\omega^{-1}}\left(\begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} \omega y' & v \\ 0 & y' \end{pmatrix} \,\middle|\, y', v \in \mathbb{F} \right\}.$$

Эти множества по построению не содержат A_2, значит, $\mathrm{d}(A_1, A_2) > 2$ и в графе $U\Delta_\omega(V)$.

С другой стороны, $\mathcal{C}^\omega(A_2)^0, \mathcal{C}^{\omega^{-1}}(A_2) \subset N$. Используя рассуждения пункта II.2, ребро, соединяющее вершины вида $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u' & 0 \end{pmatrix}$ можно сократить. Следовательно, начало кратчайшего маршрута из A_1 в A_2 будет иметь вид $A_1 - B_1 - B_2$, где $B_1 \in N$, $B_2 \in R$ — треугольная обратимая матрица. При этом по доказанному в пункте I, $\mathcal{C}^\omega(B_2)^0, \mathcal{C}^{\omega^{-1}}(B_2)^0 \subset N$. Это означает, что $\mathrm{d}(A_1, A_2) \neq 3$, т.е. $\mathrm{d}(A_1, A_2) = 4$. $\square$

Теорема 4. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Пусть $\omega \in \mathbb{F} \setminus \{0, \pm 1\}$. Тогда 1. основной граф $U\Delta_\omega(M_2(\mathbb{F}))$ несвязен и является объединением своих связных подграфов, заданных следующими множествами вершин:*

- *множество*
$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigm| 0 \neq a \in \mathbb{F} \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Bigm| 0 \neq b \in \mathbb{F} \right\};$$

- *для каждого* $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$ *множество*
$$V_{2,\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} c & c\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigm| 0 \neq c \in \mathbb{F} \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & -d/\alpha \end{pmatrix} \Bigm| 0 \neq d \in \mathbb{F} \right\};$$

- *для каждого* $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$ *множество*
$$V_{3,\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c\alpha \end{pmatrix} \Bigm| 0 \neq c \in \mathbb{F} \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} d & 0 \\ -d/\alpha & 0 \end{pmatrix} \Bigm| 0 \neq d \in \mathbb{F} \right\};$$

- *для каждых* $0 \neq \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq \beta$, *множество*
$$V_{4,\alpha,\beta} = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha a & a \\ -\alpha\beta a & \beta a \end{pmatrix} \Bigm| 0 \neq a \in \mathbb{F} \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} -\beta b & b \\ -\alpha\beta b & \alpha b \end{pmatrix} \Bigm| 0 \neq b \in \mathbb{F} \right\}.$$

- *множество*
$$V_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigm| 0 \neq a \in \mathbb{F} \right\} \bigcup \bigcup_{0 \neq \alpha \in \mathbb{F}} \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha a & a \\ -\alpha^2 a & \alpha a \end{pmatrix} \Bigm| 0 \neq a \in \mathbb{F} \right\}$$
$$\bigcup \bigcup_{0 \neq \alpha \in \mathbb{F}} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ b & \omega\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & \omega\alpha \end{pmatrix} \Bigm| b \in \mathbb{F} \right\}$$
$$\bigcup \bigcup_{0 \neq \alpha \in \mathbb{F}} \left\{ \begin{pmatrix} \omega\alpha & 0 \\ b & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega\alpha & b \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \Bigm| b \in \mathbb{F} \right\}$$
$$\bigcup \bigcup_{0 \neq \alpha \in \mathbb{F}} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha b^{-1}(\omega a - \omega + a - a^2) & \alpha(\omega + 1 - a) \end{pmatrix} \Bigm| a \in \mathbb{F}, 0 \neq b \in \mathbb{F} \right\};$$

2. множества вершин V_1, $V_{2,\alpha}$, $V_{3,\alpha}$ и $V_{4\alpha,\beta}$ состоят из вырожденных диагонализируемых матриц;
3. множество V_5 состоит из всех ненулевых нильпотентных матриц и всех невырожденных матриц A, для которых A и ωA имеют общее собственное число;
4. подграфы орграфа $\Delta_\omega(M_2(\mathbb{F}))$, индуцированные множествами вершин V_1, $V_{2,\alpha}$, $V_{3,\alpha}$, $V_{4\alpha,\beta}$ и V_5 являются сильно связными;
5. диаметр компоненты связности, отвечающей каждому из множеств вершин V_1, $V_{2,\alpha}$, $V_{3,\alpha}$ и $V_{4\alpha,\beta}$, равняется 2;
6. диаметр компоненты связности, отвечающей множеству вершин V_5, равняется 4.

Доказательство. 1. Сначала покажем, что любая пара перечисленных в лемме множеств не пересекается. Множества V_1, $V_{2,\alpha}, V_{3,\alpha}$, и $V_{4\alpha,\beta}$ состоят из вырожденных матриц, которые являются вершинами графа ортогональности $O(M_2(\mathbb{F}))$, поэтому для них утверждение верно согласно

[9, лемма 4.1]. Рассмотрим матрицы из множества $V_5 = N \cup R$. Матрицы из подмножества N лежат в других компонентах связности графа ортогональности $O(M_2(\mathbb{F}))$, поэтому в этом случае также применимо утверждение [9, лемма 4.1]. Для остальных матриц из множества V_5, т.е. из множества R, в лемме 1 показана их обратимость, поэтому они не принадлежат ни одному из множеств V_1, $V_{2,\alpha}, V_{3,\alpha}$, и $V_{4\alpha,\beta}$, состоящих из вырожденных матриц.

Теперь покажем, что все вершины графа $\Delta_\omega\left(M_2\left(\mathbb{F}\right)\right)$ попадают в одно из перечисленных выше множеств. По определению вершинами графа $\Delta_\omega\left(M_2\left(\mathbb{F}\right)\right)$ являются такие матрицы $A \in M_2(\mathbb{F})$, для которых A и ωA имеют общее собственное число (возможно в алгебраическом замыкании $\bar{\mathbb{F}}$). Все вырожденные матрицы удовлетворяют этому условию для всех $n \geq 2$. Все ненулевые вырожденные матрицы из $M_2(\mathbb{F})$ являются также вершинами графа ортогональности $O(M_2(\mathbb{F}))$, и то, что они перечислены в утверждении пункта 1, следует [9, лемма 4.1]. Для невырожденных матриц утверждение следует из лемм 1–2.

3 и 6. Доказано в леммах 1–2.

2. Все нильпотентные и обратимые матрицы содержатся в V_5, значит, в остальных компонентах содержатся вырожденные ненильпотентные матрицы. В случае порядка 2 они диагонализируемы над любым полем $\mathbb{F}$.

4 и 5. Жорданова нормальная форма любой матрицы из множеств V_1, $V_{2,\alpha}$, $V_{3,\alpha}$ и $V_{4\alpha,\beta}$ является диагональной матрицей вида $D = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ для какого-то $\delta \neq 0$, $\delta \in \mathbb{F}$. Согласно предложению 1 получаем, что $\mathcal{C}^\omega(D) = \mathcal{C}^{\omega^{-1}}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \middle| \, \varepsilon \in \mathbb{F} \right\}$, $\dim \mathcal{C}^\omega(D) = 1$. В частности, это значит, что $\mathcal{C}^\omega(D) = O(D)$. Аналогично из предложения 1 следует, что для произвольного ненулевого $\varepsilon \in \mathbb{F}$ $\mathcal{C}^\omega\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\right) = \mathcal{C}^{\omega^{-1}}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\right) = \mathbb{F}D$. Эти рассуждения позволяют заключить, что множество вершин V_1 действительно является компонентой связности в графе $U\Delta_\omega(M_2(\mathbb{F}))$ и $U\Delta_\omega(V_1) = O(V_1)$, а тогда орграф $\Delta_\omega(V_1)$ является сильно связным симметричным графом. Из условия симметричности получаем, что

$$\operatorname{diam} \Delta_\omega(V_1) = \operatorname{diam} U\Delta_\omega(V_1) = \operatorname{diam} DO(V_1) = \operatorname{diam} O(V_1).$$

По условию на поле получаем, что $|\mathbb{F}| > 3$, поэтому из [9, лемма 4.1] следует равенство $\operatorname{diam} O(V_1) = 2$.

При этом множества $V_{2,\alpha}$, $V_{3,\alpha}$, $V_{4\alpha,\beta}$ получаются из V_1 с помощью сопряжения в $M_2(\mathbb{F})$, т.е. найдутся такие невырожденные матрицы $C_{2,\alpha}, C_{3,\alpha}$, $0 \neq \alpha \in F$, $C_{4,\alpha,\beta}$, для каждых $0 \neq \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq \beta$, что $V_{i,\alpha} = C_{i,\alpha}^{-1} V_1 C_{i,\alpha}$, $i = 2, 3$ и $V_{4,\alpha,\beta} = C_{4,\alpha,\beta}^{-1} V_1 C_{4,\alpha,\beta}$. Любое действие сопряжения как изоморфизм матричной алгебры сохраняет отношения ω-коммутирования и ортогональности, поэтому мы также имеем изоморфизм графов $\Delta_\omega(V_1) \cong \Delta_\omega(V_{2,\alpha_2}) \cong \Delta_\omega(V_{3,\alpha_3}) \cong \Delta_\omega(V_{4,\alpha_4,\beta_4})$ для всех

$0 \neq \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_4 \in \mathbb{F}$, $\alpha_4 \neq \beta_4$. Значит и их диаметры совпадают с диаметром графа $O(V_1)$ и равны 2.

□

4 Диаметр графа ω-коммутирваний для алгебр матриц порядков $n \geq 3$

Теорема 5 ([21, Теорема 2.2])**.** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\omega \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ и $n \geq 3$. Рассмотрим множество $\mathcal{A}_n$ всех необратимых матриц в $M_n(\mathbb{F})$. Тогда* $\operatorname{diam} \Delta_\omega(\mathcal{A}_n) = 4$.

Теорема 6 ([9, Теорема 4.5])**.** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $n \geq 3$. Тогда граф ортогональности $O(M_n(\mathbb{F}))$ связен и* $\operatorname{diam} O(M_n(\mathbb{F})) = 4$.

Следствие 1. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $n \geq 3$. Тогда ориентированный граф ортогональности $DO(M_n(\mathbb{F}))$ сильно связен и* $\operatorname{diam} DO(M_n(\mathbb{F})) = 4$.

Лемма 3. *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле, $n \geq 3$ и $\omega \in \mathbb{F} \setminus \{0, \pm 1\}$. Рассмотрим матрицу $A \in M_n(\mathbb{F})$ с ненулевым обобщённым централизатором $\mathcal{C}^\omega(A)$. Тогда $\mathcal{C}^\omega(A)$ содержит матрицу ранга* 1.

Доказательство. Поскольку подобные матрицы имеют одинаковый ранг, достаточно доказать результат для жордановых матриц.

Предположим, что $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$ —- жорданова матрица, где $A_i = J_{n_i}(\lambda_i)$ жордановы клетки, как в предложении 1. Тогда из условия $\mathcal{C}^\omega(A) \neq \{O\}$ следует, что либо $\lambda_i = 0$ для некоторого $i = 1, \ldots, m$, либо $\lambda_r = \omega \lambda_s$ для некоторых $r, s = 1, \ldots, m$.

Рассмотрим матрицу $X \in \mathcal{C}^\omega(A)$ и разобьем её на m^2 блоков X_{kl} в соответствии с блочной структурой A.

Поскольку порядок жордановых клеток может быть выбран произвольно, в первом случае можно без ограничения общности считать, что $i = 1$. Положим все блоки X_{kl} равными нулю, за исключением блока X_{11}. Для X_{11} выберем его параметры $y_{1,1;j}$, определенные в предложении 1, следующим образом: $y_{1,1;1} = y_{1,1;2} = \ldots = y_{1,1;n_1-1} = 0$, $y_{1,1;n_1} = 1$. Тогда $X_{11} = E_{1,n_1}$ и $\mathrm{rk} X = \mathrm{rk} X_{11} = 1$.

Во втором случае можно без ограничения общности считать, что $r = 1, s = 2$. Положим все блоки X_{kl} равными нулю, за исключением блока X_{12}. Определим $n' = \min\{n_1, n_2\}$. Для X_{12} выберем параметры $y_{1,2;j}$, определённые в предложении 1, следующим образом: $y_{1,2;1} = y_{1,2;2} = \ldots = y_{1,2;n'1} = 0$, $y_{1,2;n'} = 1$. Тогда $X_{12} = E_{1,n'}$ и $\mathrm{rk} X = \mathrm{rk} X_{12} = 1$. □

Замечание 3. *Лемма 3 для незамкнутых полей в общем случае не выполняется. Например, рассмотрим вещественную матрицу*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

и $\omega = 2$. *Непосредственным вычислением получаем, что*

$$\mathcal{C}^2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & 0 \\ -x_{32} & x_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big| \; x_{31}, x_{32} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Соответственно, все ненулевые матрицы из $\mathcal{C}^2(A)$ *имеют ранг* 2.

Лемма 4. *Пусть в поле* $\mathbb{F}$ *содержится более* 5 *элементов. Для любых* $n \geq 3$ *и* $\omega \in \mathbb{F} \setminus \{0, \pm 1\}$ *выполнена оценка* $\operatorname{diam}(U\Delta_\omega(M_n(\mathbb{F}))) \geq 4$.

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно предъявить пару матриц $A, B \in U\Delta_\omega(M_n(\mathbb{F}))$, для которых $\mathrm{d}\,(A, B) \geq 4$. Построим матрицы основываясь на примере порядка 2 из леммы 2. Возьмём $A_2 = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega & \omega + 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F})$.

По условию на мощность поля найдётся коэффициент

$$\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0, 1, \omega, \omega^{-1}, \omega^2\}.$$

Положим

$$A = \begin{pmatrix} A_2 & O_{2\times(n-2)} \\ O_{(n-2)\times 2} & \alpha E_{n-2} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} B_2 & O_{2\times(n-2)} \\ O_{(n-2)\times 2} & \alpha E_{n-2} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}).$$

По построению матрицы A, B невырождены и имеют собственные числа $1, \omega$, следовательно, являются вершинами графа $U\Delta_\omega(M_n(\mathbb{F}))$.

Поскольку матрица A — диагональная, то она жорданова, и к ней применимо предложение 1. Получаем $\mathcal{C}^\omega(A) = \mathbb{F}E_{12}$, $\mathcal{C}^{\omega^{-1}}(A) = \mathbb{F}E_{21}$. Матричная единица E_{12} также является жордановой матрицей, поэтому ввиду предложения 1 имеем

$$\mathcal{C}^\omega(E_{12}) =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} u & v & u_1 & \dots & u_{n-2} \\ 0 & \omega u & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_1 & x_{11} & \dots & x_{1,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & v_{n-2} & x_{n-2,1} & \dots & x_{n-2,n-2} \end{pmatrix} \Bigg| \, u, v, u_i, v_i, x_{i,j} \in \mathbb{F}, i, j = 1, \dots, n-2 \right\},$$

$$\mathcal{C}^{\omega^{-1}}(E_{12}) =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \omega u & v & u_1 & \dots & u_{n-2} \\ 0 & u & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_1 & x_{11} & \dots & x_{1,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & v_{n-2} & x_{n-2,1} & \dots & x_{n-2,n-2} \end{pmatrix} \Bigg| \, u, v, u_i, v_i, x_{i,j} \in \mathbb{F}, i, j = 1, \dots, n-2 \right\}.$$

Для матричной единицы E_{21} описание обобщённого централизатора получаем из предложения 2: $\mathcal{C}^\omega(E_{21}) = \mathcal{C}^{\omega^{-1}}(E_{12})^T$, $\mathcal{C}^{\omega^{-1}}(E_{21}) =$

$\mathcal{C}^\omega(E_{12})^T$. Непосредственно из строения левых верхних 2 на 2 блоков видно, что ни один из рассмотренных шести обобщённых централизаторов не содержит матрицу B, поэтому $\mathrm{d}\,(A,B) > 2$. Покажем, что $\mathrm{d}\,(A,B) > 3$. От противного, предположим, что $\mathrm{d}\,(A,B) = 3$. Это означает, что найдётся ненулевая матрица $C \in \mathcal{C}^\omega(E_{12}) \cup \mathcal{C}^{\omega^{-1}}(E_{12}) \cup \mathcal{C}^\omega(E_{21}) \cup \mathcal{C}^{\omega^{-1}}(E_{21})$, для которой $CB = \omega BC$, либо $CB = \omega^{-1}BC$.

Матрица B по построению является блочной матрицей порядка 2. Рассмотрим матрицу C в таком же блочном разбиении:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}.$$

Пусть $\gamma \in \{\omega, \omega^{-1}\}$. Тогда уравнение $CB = \gamma BC$ принимает вид

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_2 & O \\ O & \alpha E \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} B_2 & O \\ O & \alpha E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}.$$

Оно эквивалентно системе из четырёх уравнений для блоков:

$$\begin{cases} C_{11}B_2 = \gamma B_2 C_{11} \\ \alpha C_{12} = \gamma B_2 C_{12} \\ C_{21}B_2 = \gamma\alpha C_{21} \\ \alpha C_{22} = \gamma\alpha C_{22} \end{cases}.$$

Последнее уравнение равносильно равенству $(\gamma - 1)\alpha C_{22} = O$. Из него следует, что $X = O$, поскольку $\alpha \neq 0$ и $\gamma = \omega^{\pm 1} \neq 1$. Из третьего уравнения получаем $C_{21}(B_2 - \gamma\alpha E_2) = O$. Коэффициент α подобран таким образом, что $\gamma\alpha = \omega^{\pm 1}\alpha \neq 1, \omega$, поэтому матрица $B_2 - \gamma\alpha E$ невырождена. Значит, $_{21} = O$. Аналогично, из второго уравнения получаем $(B_2 - \gamma^{-1}\alpha E_2)C_{12} = O$ и $C_{12} = O$, т.к. $\gamma^{-1}\alpha \neq 1, \omega$. Таким образом, если $C \neq O$, то $C_{11} \neq O$. В этом случае получился бы путь вида $A_2 - E_{12} - C_{11} - B_2$, или $A_2 - E_{21} - C_{11} - B_2$, длины 3 в графе $U\Delta_\omega(M_2(\mathbb{F}))$, что противоречит пункту IV доказательства леммы 2.

Полученное противоречие доказывает, что $\mathrm{d}\,(A,B) \geq 4$. □

Следствие 2. *Пусть в поле $\mathbb{F}$ содержится более 5 элементов. Для любых $n \geq 3$ и $\omega \in \mathbb{F} \setminus \{0, \pm 1\}$ выполнена оценка* $\mathrm{diam}\,(\Delta_\omega(M_n(\mathbb{F}))) \geq 4$.

Лемма 5. *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле. Для любых $n \geq 3$ и $\omega \in \mathbb{F} \setminus \{0, \pm 1\}$ орграф $\Delta_\omega(M_n(\mathbb{F}))$ сильно связен и имеет диаметр, не превосходящий 4.*

Доказательство. Сильная связность орграфа $\Delta_\omega(M_n(\mathbb{F}))$ была установлена в теореме 2, но без оценки на диаметр.

Для доказательства оценки $\mathrm{diam}\,\Delta_\omega(M_n(\mathbb{F})) \leq 4$ рассмотрим произвольную пару вершин A, B орграфа $\Delta_\omega(M_n(\mathbb{F}))$ и покажем, что $\mathrm{d}\,(A,B) \leq 4$. Отметим, что для вырожденных матриц A, B оценка $\mathrm{d}\,(A,B) \leq 4$ следует как из теоремы 5, так и из теоремы 6. Обобщим её на произвольные вершины графа $\Delta_\omega(M_n(\mathbb{F}))$.

Согласно предложению 3 ω- и ω^{-1}-обобщённые централизаторы матриц ненулевые одновременно. Тогда по лемме 3 найдутся матрицы $A' \in \mathcal{C}^{\omega}(A)$ и $B' \in \mathcal{C}^{\omega^{-1}}(B)$ ранга 1. Рассуждая как в доказательстве [21, теоремы 2.2], заметим, что найдутся ненулевые столбцы $W, Z \in \mathbb{F}^n$ такие, что $A'W = B'W = 0$ и $Z^T A' = Z^T B' = 0$. Полагая $M = WZ^T$, получим $A'M = O = \omega M A'$ и $MB' = O = \omega B' M$. Следовательно, существует ориентированный путь $A \to A' \to M \to B' \to B$ длины 4 в графе $\Delta_\omega(M_n(\mathbb{F}))$. □

Объединяя леммы 4 and 5 и следствие 2, получаем основной результат.

Теорема 7. *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле. Для любых $n \geq 3$ и $\omega \in \mathbb{F} \setminus \{0, \pm 1\}$ орграф $\Delta_\omega(M_n(\mathbb{F}))$ сильно связен и имеет диаметр 4. При этом диаметр основного графа $U\Delta_\omega(M_n(\mathbb{F}))$ также равен 4.*

References

[1] A. Abdollahi, *Commuting graphs of full matrix rings over finite fields*, Linear Algebra Appl., **428** (2008), 2947–2954.

[2] S. Akbari, M. Ghandehari, M. Hadian, A. Mohammadian, *On commuting graphs of semisimple rings*, Linear Algebra Appl., **390** (2004), 345–355.

[3] S. Akbari, A. Mohammadian, *Zero-divisor graphs of non-commutative rings*, J. Algebra, **296**:2 (2006), 462–479.

[4] S. Akbari, H. Bidkhori, A. Mohammadian, *Commuting graphs of matrix algebras*, Commun. Algebra **36** (2008), 4020–4031.

[5] S. Akbari, A. Mohammadian, H. Radjavi, P. Raja, *On the diameters of commuting graphs*, Linear Algebra Appl. **418** (2006), 161–176.

[6] S. Akbari, P. Raja, *Commuting graphs of some subsets in simple rings*, Linear Algebra Appl. **416** (2006), 1038–1047.

[7] A. Alahmadi, S.P. Glasby, Ch.E. Praeger, P. Solé, B. Yildiz, *Twisted centralizer codes*, Linear Algebra Appl. 524 (2017), 235–249.

[8] D. F. Anderson, P. S. Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring*, J. Algebra **217** (1999), 434–447.

[9] B.R. Bakhadly, A.E. Guterman, O.V. Markova, *Graphs defined by orthogonality*, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 428 (2014), 49–80.

[10] N. Chriss, V. Ginzburg, *Representation Theory and Complex Geometry*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1997.

[11] D. Dolžan, D. Kokol Bukovšek, B. Kuzma, P. Oblak, *On diameter of the commuting graph of a full matrix algebra over a finite field*, Finite Fields Appl., **37** (2016) 36–45.

[12] A. Guterman, G. Dolinar, B. Kuzma, O. Markova, *Extremal generalized centralizers in matrix algebras*, Comm. in Algebra, **46**:7 (2018), 3147–3154.

[13] A. Guterman, G. Dolinar, B. Kuzma, O. Markova, *Double centralizing theorem with respect to q-commutativity relation*, J. Algebra Appl., **18**:1 (2019), 1950003–1–1950003–15.

[14] A.E. Guterman, O.V. Markova, V. Mehrmann, *Lengths of quasi-commutative pairs of matrices*, Linear Algebra Appl. **498** (2016), 450–470.

[15] A.E. Guterman, O.V. Markova, V. Mehrmann, *Length realizability for pairs of quasi-commuting matrices*, Linear Algebra Appl. **568** (2019), 135–154.

[16] F. Harary, *Graph Theory*, Addison Wesley, 1969.

[17] O. Holtz, V. Mehrmann, H. Schneider, *Potter, Wielandt, and Drazin on the Matrix Equation $AB = \omega BA$: New Answers to Old Questions*, Amer. Math. Monthly **111**:8 (2004) 655–667.

[18] C. Kassel, *Quantum Groups*, Graduate Texts in Mathematics, **155**, Springer-Verlag, New York, 1995.

[19] Yu.I. Manin, *Quantum groups and non-commutative geometry*, CRM, Montréal, 1988.

[20] O.V. Markova, D.Yu. Novochadov, *Orthogonality graphs of direct sums of rings and semisimple Artinian rings*, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **514** (2022), 138–166.

[21] P. Raja, S.M. Vaezpour, *On ω-commuting graphs and their diameters*, Math. Nachr. **284**:5-6 (2011), 781–789.

Olga Victorovna Markova
M.V. Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gory, 1,
119991, Moscow, Russia;
Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics,
119991, Moscow, Russia
Email address: ov_markova@mail.ru