S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 519.17
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 05E30

О ДВУДОЛЬНЫХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ НЕБОЛЬШИХ ДИАМЕТРОВ

А. А. Махнев
В. В. Биткина
А. А. Токбаева

Представлено А.А. Махневым

Abstract: In the class of bipartite distance-regular graphs of diameter $5 \leq d \leq 7$, the following feasible intersection arrays exist: $\{k, k-1, k-c, c, 1; 1, c, k-c, k-1, k\}$, where $k = r(r^2+3r+1)$, $c = r(r+1)$, the bipartite double of the Krein graph $Kre(r)$ $\{55, 54, 50, 5, 1; 1, 5, 50, 54, 55\}$, $\{7, 6, 6, 5, 4, 3; 1, 1, 2, 3, 4, 7\}$, and $\{7, 6, 6, 5, 2, 1, 1; 1, 1, 2, 5, 6, 6, 7\}$.

Since the Krein graph $Kre(r)$ does not exist for $r = 3$ and $r = 4$, distance-regular graphs with intersection arrays $\{57, 56, 45, 12, 1; 1, 12, 45, 56, 57\}$, $\{116, 115, 96, 20, 1; 1, 20, 96, 115, 116\}$ do not exist (Theorem 1). J. Koolen proved that a graph with intersection array $\{7, 6, 6, 5, 4, 3; 1, 1, 2, 3, 4, 7\}$ does not exist.

The graph with intersection array $\{7, 6, 6, 5, 2, 1, 1; 1, 1, 2, 5, 6, 6, 7\}$ is a 2-cover of an unknown near 7-gon and has an antipodal quotient with intersection array
$\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$. A. Makhnev, V. Bitkina and A. Gutnova proved that a graph with intersection array $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ does not exist.

A. A. Makhnev, V. V. Bitkina, A. A. Tokbaeva On bipartite graphs of diameter $5 \leq d \leq 7$.

© 2025 А. А. Махнев, В. В. Биткина, А. А. Токбаева.

Исследование выполнено при поддержке Естественно научного фонда Китая (проект № 12171126) и гранта Лаборатории инженерного моделирования и статистических вычислений провинции Хайнань.

Поступила ? ???? 2025 г., опубликована ? ???? 2025 г.

Hence, a distance-regular graph with intersection array $\{7, 6, 6, 5, 2, 1, 1; 1, 1, 2, 5, 6, 6, 7\}$ does not exist (Theorem 2).

The paper also studies the problem of existence of a graph with intersection array $\{26, 25, 24, 2, 1; 1, 2, 24, 25, 26\}$.

Keywords: bipartite graph, distacne regular graph, triple intersection numbers, association scheme

1 Введение

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, и каждое ребро из Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (через $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$(если $d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем (μ-) λ-*подграфом.*

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, ..., b_{d-1}; c_1, ..., c_d\}$, если значения $b_i = b_i(u, w)$ и $c_i = c_i(u, w)$ не зависит от выбора вершин u, w на расстоянии i. Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Числа пересечений графа p^l_{ij} и параметры Крейна q^l_{ij} определены в [1] (стр. 43 и 48 соответственно).

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра d. Для $i \in \{1, 2, ..., d\}$ граф Γ_i определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u, w смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u, w) = i$. Для $I \subset \{1, 2, ..., d\}$ граф Γ_I определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u, w смежны в Γ_I тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u, w) \in I$.

В классе двудольных дистанционно регулярных графов
диаметра $5 \leq d \leq 7$ имеются допустимые массивы пересечений: $\{k, k -$

0

$1, k-c, c, 1; 1, c, k-c, k-1, k\}$, где $k = r(r^2+3r+1)$, $c = r(r+1)$ (двудольное удвоение графа Крейна $Kre(r)$), $\{55, 54, 50, 5, 1; 1, 5, 50, 54, 55\}$, $\{7, 6, 6, 5, 4, 3; 1, 1, 2, 3, 4, 7\}$ и $\{7, 6, 6, 5, 2, 1, 1; 1, 1, 2, 5, 6, 6, 7\}$.

Теорема 1. *Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений* $\{57, 56, 45, 12, 1; 1, 12, 45, 56, 57\}$ *и* $\{116, 115, 96, 20, 1; 1, 20, 96, 115, 116\}$ *не существуют.*

Граф Крейна $Kre(r)$ не существует при $r = 3$ [4] и $r = 4$ [5]. Отсюда следует теорема 1.

Предложение 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{7, 6, 6, 5, 4, 3; 1, 1, 2, 3, 4, 7\}$ *не существует.*

Дж. Кулен [2] доказал, что граф с массивом пересечений $\{7, 6, 6, 5, 4, 3; 1, 1, 2, 3, 4, 7\}$ не существует.

Теорема 2. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{7, 6, 6, 5, 2, 1, 1; 1, 1, 2, 5, 6, 6, 7\}$ *не существует.*

Граф с массивом пересечений $\{7, 6, 6, 5, 2, 1, 1; 1, 1, 2, 5, 6, 6, 7\}$ является двудольным удвоением неизвестного почти 7-угольника [1, chapter 4.2D] и имеет антиподальное частное с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$. А. Махнев, В. Биткина и А. Гутнова [3] доказали, что граф с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ не существует. Теорема 2 доказана.

Найдем параметры недвудольного сильно регулярного графа Γ без треугольников с $\mu = 5$. Такой граф имеет степень $k = r^2 + 5r + 5$ для некоторого целого числа r, $v - k - 1 = (r^2+5r+5)(r^2+5r+4)/5$. Γ имеет собственные значения $r, -(r+5)$, причем кратность r равна $(r+4)(r^2 + 5r+5)(r^2+6r+10)/(10r+25)$. Отсюда $2r+5$ делит $15(r+2)(7r+20)$ и 75. Поэтому $2r+5 \in \{15, 25, 75\}$ и $r \in \{5, 10, 35\}$. Но в случае $r = 35$ число $5(70+5)$ не делит $(r+4)(r^2+5r+5)(r^2+6r+10) = 39 \cdot 1405 \cdot 1445$, а в случае $r = 10$ число $5(20+5)$ не делит $14 \cdot 155 \cdot 170$. Отсюда Γ имеет параметры (650,55,0,5)

Теорема 3. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{55, 54, 50, 5, 1; 1, 5, 50, 54, 55\}$. *Тогда* $\Gamma_{1,3}$ – *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{649, 648, 1; 1, 648, 649\}$.

2 Тройные числа пересечений

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d, то $\left\{ {u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right\}$ — множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$, $\left[{u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right] = |\left\{ {u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right\}|$. Числа $\left[{u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\left[{u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right]$ будем писать $[r_1 r_2 r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $W = d(u,v)$, $U = d(v,w)$, $V = d(u,w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x,u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h] = \delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU}\delta_{jV}$, где δ – символ Кронекера.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$, и сосчитав число вершин всех расстояний от третьей, получим:

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{d}[ljh] = p^U_{jh} - [0jh] \\ \sum\limits_{l=1}^{d}[ilh] = p^V_{ih} - [i0h] \\ \sum\limits_{l=1}^{d}[ijl] = p^W_{ij} - [ij0] \end{cases} \qquad (*)$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i-j| > W$ или $i + j < W$ имеем $p^W_{ij} = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, ..., d\}$.

Положим $S_{ijh}(u,v,w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri}Q_{sj}Q_{th}\left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix}\right]$. Если параметр Крейна $q^h_{ij} = 0$, то $S_{ijh}(u,v,w) = 0$ [7].

3 Свойства графа с массивом пересечений $\{55, 54, 50, 5, 1; 1, 5, 50, 54, 55\}$

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{55, 54, 50, 5, 1; 1, 5, 50, 54, 55\}$. Антиподальное частное графа Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(650, 55, 0, 5)$. Далее, Γ имеет $1 + 55 + 594 + 594 + 55 + 1 = 1300$ вершины, спектр:

$$55^1, 10^{220}, 5^{429}, -5^{429}, -10^{220}, -55^1$$

и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 220 & 429 & 429 & 220 & 1 \\ 1 & 40 & 39 & -39 & -40 & -1 \\ 1 & \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{10}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{10}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{13}{3} & \frac{10}{3} & -1 \\ 1 & -40 & 39 & 39 & -40 & 1 \\ 1 & -220 & 429 & -429 & 220 & -1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Числа пересечений графа Γ равны:*
$p^1_{11} = 0$, $p^1_{12} = 54$, $p^1_{23} = 540$, $p^1_{34} = 54$, $p^1_{45} = 1$,
$p^2_{11} = 5$, $p^2_{12} = 0$, $p^2_{13} = 50$, $p^2_{22} = 543$, $p^2_{24} = 50$, $p^2_{33} = 543$, $p^2_{35} = 1$, $p^2_{44} = 5$,
$p^3_{12} = 50$, $p^3_{23} = 543$, $p^3_{34} = 50$, $p^3_{25} = 1$,
$p^4_{13} = 54$, $p^4_{15} = 1$, $p^4_{22} = 540$, $p^4_{15} = 1$, $p^4_{24} = 54$, $p^4_{33} = 540$,
$p^5_{14} = 55$, $p^5_{23} = 594$.

Доказательство. Прямые вычисления. □

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $\{ijl\} = \left\{ {uvw \atop ijl} \right\}$, $[ijl] = \left[{uvw \atop ijl} \right]$. Положим $\Sigma = \Gamma_2(u)$, $\Lambda = \Sigma_2$. Тогда Λ — регулярный граф степени $p^2_{22} = 543$ на $k_2 = 594$ вершинах.

Лемма 2. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = 2, d(v,w) = 4$. *Тогда тройные числа пересечений равны:*
$[113] = [131] = 5$, $[133] = 45$;
$[222] = 494$, $[224] = [242] = 49$;
$[313] = [331] = 49$, $[333] = 494$, $[315] = [351] = 1$;
$[422] = 45$, $[424] = [442] = 5$;
$[533] = 1$.

Доказательство. Упрощение формул из предыдущего раздела. □

Для числа ребер d между $\Lambda(v)$ и $\Lambda - (\{v\} \cup \Lambda(v))$ в графе Λ верно равенство $d = 494 \cdot 50 = 24700$.

С другой стороны, $d = 543(542 - \lambda)$, где λ — среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$. Поэтому $542 - \lambda = 45.488$ и $\lambda = 496.512$.

Лемма 3. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 2$. *Тогда тройные числа пересечений равны:*
$[111] = -r_1 + 5$, $[113] = [131] = r_1$, $[133] = -r_1 + 50$;
$[222] = r_1 + 492$, $[224] = [242] = -r_1 + 50$, $[244] = r_1$;
$[311] = r_1$, $[313] = [331] = -r_1 + 50$, $[333] = r_1 + 492$, $[334] = [343] = (4r_1 - 72)/5$, $[324] = [342] = -r_1 + 27$, $[335] = [353] = 1$;
$[422] = -r_1 + 50$, $[424] = [442] = r_1$, $[444] = -r_1 + 5$;
$[533] = 1$,
где $0 \le r_1 \le 5$.

Доказательство. Упрощение формул из предыдущего раздела. □

По лемме 3 получим $492 \le [222] = r_1 + 492 \le 497$.

Найдем параметры графа $\Gamma_{1,3}$. Имеем $v = 1300$, $k = k_1 + k_3 = 55 + 594 = 649$, $\lambda = 0$ (т.к. $p^1_{11} = p^1_{13} = p^1_{33} = p^3_{13} = p^3_{33} = 0$), $\mu = 648$ (т.к. $p^2_{11} + 2p^2_{13} + p^2_{33} = 5 + 2 \cdot 50 + 543$ и $2p^4_{13} + p^4_{33} = 2 \cdot 54 + 540$). Итак, $\Gamma_{1,3}$ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{649, 648, 1; 1, 648, 649\}$.

Теорема 3 доказана.

References

[1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1989, 495 pp.

[2] J. Koolen, *A new condition for distance-regular graphs*, European Journal of Combinatorics, **13** (1992), 63–64.

[3] A. Makhnev, V. Bitkina, A. Gutnova, *Distance-regular graphs with intersection arrays* $\{7,6,6;1,1,2\}$ *and* $\{42,30,2;1,10,36\}$ *do not exist*, Vladikavkaz Mathematical Journal, **23**:4 (2021), 68–76.

[4] A. Gavrilyuk, A. Makhnev, *On Krein graphs without triangles*, Doklady Mathematics, **72** (2005), 591–594.
[5] A. Makhnev, *Krein graph $Kre(4)$ does not exist*, Doklady Mathematics, **475**:3 (2017), 251–253.
[6] J. Vidali, *Using symbolic computation to prove nonexistence of distance-regular graphs*, Electronic Journal of Combinatorics, **25**:4 (2018), 1–10.
[7] K. Coolsaet, A. Jurisich, *Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, **115** (2008), 1086–1095.

Makhnev Aleksandr Alekseevich
Hainan University, Haikou, China;
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
str. S.Kovalevskaya, 16, 620990, Yekaterinburg, Russia
Email address: makhnev@imm.uran.ru

Bitkina Viktoriya Vasil'evna
North Ossetian State University after Kosta Levanovich Khetagurov,
str. Vatutina stk, 46, Vladikavkaz, 362025, Russia
Email address: bviktoriyav@mail.ru .

Tokbaeva Al'bina Aniurovna
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,
str. Chernyshevsky, 175, 360004, Nalchik, Russia
Email address: : tok2506@mail.