

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЭЙЛЕРОВЫ ОРИЕНТАЦИИ  
ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВС.В. АВГУСТИНОВИЧ, И.С. БЫКОВ, А.Л. ПЕРЕЖОГИН,  
А.С. КРИВОНОГОВА*Представлено П.П. ПЕТРОВЫМ*

**Abstract:** In this paper, we consider the achievability of the maximum and minimum numbers of occurrences of 3-circuits in Eulerian orientations of complete graphs missing a transitive subset of edges: complete graphs with an even number of vertices and a perfect matching removed, and those with an odd number of vertices and a Hamiltonian cycle removed. For each of these families of digraphs, we obtain upper and lower estimates for the number of 3-circuits and prove their achievability. Previously, orientations that are extreme with respect to the number of 4-circuit occurrences have been investigated in [1].

**Keywords:** Eulerian orientation of graph, circuit, tournament.

## 1 Введение

В самом общем виде рассматриваемая задача формулируется следующим образом. Для произвольного семейства графов (в нашем случае –

---

AVGUSTINOVICH, S.V., BYKOV, I.S., PEREZHOGIN, A.L., KRIVONOGOVA A.S.  
EXTREME EULERIAN ORIENTATIONS OF CIRCULANT GRAPHS.

© 2023 АВГУСТИНОВИЧ С.В., БЫКОВ И.С., ПЕРЕЖОГИН А.Л., КРИВОНОГОВА А.С. .

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0017).

*Поступила 1 января 2024 г., опубликована 31 декабря 2024 г.*

ориентированных эйлеровых) определить, на каких представителях семейства достигает максимума или минимума число вхождений некоторого фиксированного фрагмента (например, 3-контура). Довольно часто удастся не только найти значение этого экстремума, но и охарактеризовать те графы, на которых он достигается [1]. Экстремальные графы при этом обычно обладают характерными свойствами совершенных структур [2, 3] и получаются друг из друга свитчингами. Минимальными нетривиальными фрагментами являются трехвершинные. В неориентированном случае они изучались в [4, 5].

Ориентацией графа  $G$  назовем орграф, получаемый из  $G$  заменой каждого ребра  $uv$  на ровно одну из дуг  $uv$  или  $vu$ . Две ориентации одного графа назовем эквивалентными, если изоморфны соответствующие орграфы. Ориентация полного графа называется турниром. Ориентация графа  $G$  называется эйлеровой, если в каждой вершине полустепень исхода равна полустепени захода. Для связного графа  $G$  существует эйлерова ориентация тогда и только тогда, когда  $G$  является эйлеровым. Через  $O(G)$  обозначим множество всех эйлеровых ориентаций графа  $G$ . Например,  $O(K_{2n+1})$  — это множество эйлеровых турниров на  $(2n+1)$ -ой вершине.

Любые три вершины произвольного турнира либо образуют ориентированный 3-цикл (контур), либо антиконтур. Хорошо известно, что число 3-контуров в произвольном турнире однозначно определено набором полустепеней исхода и захода вершин этого графа [1]. Это, в частности, означает, что в эйлеровых турнирах число 3-контуров не зависит от выбора турнира. Для произвольной дуги  $e$  орграфа  $H$  обозначим через  $f_a(H, e)$  количество 3-контуров, проходящих через нее. Данный инвариант зачастую позволяет разбить все дуги турнира на орбиты (классы эквивалентности) относительно его группы автоморфизмов. В работе охарактеризованы классы эйлеровых ориентаций некоторых графов, на которых функция  $f_a(H, e)$  достигает экстремальных распределений по дугам  $H$ .

Ранее исследовались ориентации, экстремальные по числу вхождений 4-контуров [1]. Также представляет интерес экстремальное поведение неориентированных графов с фиксированным числом ребер и максимальным числом вхождений индуцированных  $K_{1,2}$  [5].

В работе изучаются минимальные и максимальные распределения 3-контуров, проходящих через различные множества дуг произвольного эйлерова турнира. Доказано, что среди эйлеровых ориентаций полного графа с удаленным гамильтоновым циклом максимальное число 3-контуров достигается с точностью до эквивалентности на циркулянтной ориентации, в которой гамильтонов цикл расположен на периферии графа, а все дуги ориентированы по часовой стрелке. Для полного графа с

четным числом вершин и удаленным паросочетанием получен аналогичный результат. Паросочетание в этом случае состоит из ребер, соединяющих диаметрально противоположные вершины, а максимум и минимум числа 3-контуров достигается сразу на целых семействах ориентаций.

## 2 Ориентации циркулянтов

Согласно [1] через  $f_a(H)$  обозначим количество 3-контуров в орграфе  $H$ .

Обозначим через  $K_{2n} \setminus M$  полный граф с удаленным совершенным паросочетанием, а через  $K_{2n+1} \setminus C$  полный граф с удаленным гамильтоновым циклом.

Выходящей окрестностью  $N^+(v)$  вершины  $v$  в ориентации  $H$  графа  $G$  будем называть множество вершин, в которые ведут дуги, начинающиеся в  $v$ . Аналогично определяется входящая окрестность  $N^-(v)$ . Для любой дуги  $e = uv$  орграфа  $H$  имеем

$$f_a(H, e) = |N^+(v) \cap N^-(u)|. \quad (1)$$

**Предложение 1.** Для любой дуги  $e$  эйлеровой ориентации  $T \in O(K_{2n+1})$  верны неравенства

$$1 \leq f_a(T, e) \leq n. \quad (2)$$

*Доказательство.* Пусть  $e = uv$ . Верхняя оценка следует из равенства

$$|N^+(v)| = |N^-(u)| = n.$$

Для доказательства нижней оценки остается заметить, что

$$|N^+(v) \cup N^-(u)| \leq |V(T) \setminus \{v, u\}| = 2n - 1. \quad (3)$$

□

**Предложение 2.** Если для дуги  $e = uv$  эйлеровой ориентации  $T \in O(K_{2n+1})$  имеем  $f_a(T, e) = 1$ , то справедливы равенства

$$|N^+(v) \cap N^+(u)| = |N^-(v) \cap N^-(u)| = n - 1.$$

*Доказательство.* Поскольку  $|N^+(v) \cap N^-(u)| = 1$ , то  $|N^+(v) \cup N^-(u)| = 2n - 1$ . □

Согласно [1] количество 3-контуров в произвольной эйлеровой ориентации  $T \in O(K_{2n+1})$  равно

$$f_a(T) = \frac{2n+1}{3} \binom{n+1}{2}. \quad (4)$$

Из (4) непосредственно следует следующее утверждение.

**Предложение 3.** Для любой эйлеровой ориентации  $T \in O(K_{2n+1})$  верно

$$\sum_{e \in T} f_a(T, e) = (2n+1) \binom{n+1}{2}. \quad (5)$$

Через  $C_N(d_1, \dots, d_p)$ ,  $0 < d_1 < \dots < d_p < N/2$ , обозначим неориентированный циркулянтный граф на  $N$  вершинах  $\{0, \dots, N-1\}$ , в котором две вершины  $i$  и  $j$  соединены ребром тогда и только тогда, когда

$$\min(|i-j|, N-|i-j|) \in \{d_1, \dots, d_p\}.$$

Иными словами, если вершины расположить по циклу, то ребром соединяем вершины, между которыми расстояние по циклу (расстояние) равно  $d_k$  для некоторого  $k$ .

Через  $C_N(d_1, \dots, d_p; t_1, \dots, t_p)$ ,  $t_i \in \{-1, +1\}$ , обозначим эйлерову ориентацию графа  $C_N(d_1, \dots, d_p)$ , в которой дуга между вершинами на расстоянии  $d_k$  ориентирована по часовой стрелке, если  $t_k = +1$ , и против часовой стрелки, если  $t_k = -1$ . Заметим, что

$$C_{2n+1}(1, \dots, n; t_1, \dots, t_n) \in O(K_{2n+1}),$$

$$C_{2n}(1, \dots, n-1; t_1, \dots, t_{n-1}) \in O(K_{2n} \setminus M).$$

**Предложение 4.** Для  $T = C_{2n+1}(1, \dots, n; +1, \dots, +1)$  значения  $f_a(T, e)$  на каждой дуге  $e$ , соединяющей вершины на расстоянии  $p$ , принимает значение  $p$ .

Это легко следует из простого факта, что число целочисленных решений уравнения  $x+y+z = 2n+1$  при фиксированных  $x$  и  $n$  с ограничением  $0 < y, z \leq n$  равно  $x$ .

### 3 Турниры с выделенным гамильтоновым циклом

В данном разделе дается характеристика турниров, у которых ребрам некоторого гамильтонова контура соответствует экстремальное значение параметра  $f_a(T, e)$ .

**Теорема 1.** Пусть в турнире  $T \in O(K_{2n+1})$  для каждой дуги  $e$  некоторого гамильтонова контура значение  $f_a(T, e)$  равно 1. Тогда выполняется  $T \simeq C_{2n+1}(1, \dots, n; +1, \dots, +1)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим гамильтонов контур  $C = v_0, v_1, \dots, v_{2n}$  такой, что

$$f_a(T, v_i v_{i+1}) = 1, \quad 0 \leq i \leq 2n.$$

Здесь и далее индексы берутся по модулю  $2n+1$ . Покажем, что такой гамильтонов контур задает нумерацию вершин, при которой  $T = C_{2n+1}(1, \dots, n; +1, \dots, +1)$ . В силу транзитивности  $C$  достаточно доказать

$$\begin{aligned} N^+(v_0) &= \{v_j \mid 1 \leq j \leq n\} \\ N^-(v_0) &= \{v_j \mid n+1 \leq j \leq 2n\}. \end{aligned} \tag{6}$$

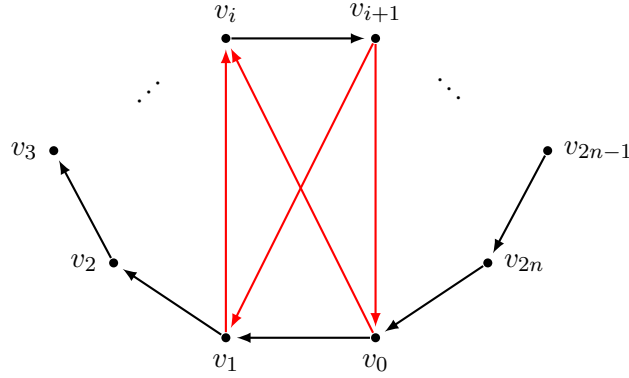


РИС. 1. Если  $i \in S_+$  и  $(i+1) \in S_-$ , то  $f_a(T, v_i v_{i+1}) > 1$ .

Для дуги  $v_0 v_1$  множество индексов  $\{2, \dots, 2n\}$  разобьем на множества

$$\begin{aligned} S_1 &= \{j \mid v_j \in N^+(v_0) \cap N^-(v_1)\}, \\ S_0 &= \{j \mid v_j \in N^-(v_0) \cap N^+(v_1)\}, \\ S_+ &= \{j \mid v_j \in N^+(v_0) \cap N^+(v_1)\}, \\ S_- &= \{j \mid v_j \in N^-(v_0) \cap N^-(v_1)\}. \end{aligned}$$

Поскольку  $f_a(T, v_i v_{i+1}) = 1$ , то из Предложения 2 имеем

$$|S_1| = 0, \quad |S_0| = 1, \quad |S_+| = |S_-| = n - 1. \quad (7)$$

Заметим, что

$$\text{если } i \in S_+, \text{ то } (i+1) \notin S_-. \quad (8)$$

Иначе  $f_a(T, v_i v_{i+1}) > 1$  (Рис. 1).

Поскольку  $v_2 \in N^+(v_1)$ , то  $2 \in S_0 \cup S_+$ . Если  $2 \in S_0$ , то дуга  $v_1 v_2$  принадлежит 3-контуре  $v_0, v_1, v_2$ . Следовательно,  $v_3 \in N^+(v_1)$  и  $3 \in S_+$ , что противоречит (7) и (8). Таким образом,  $2 \in S_+$ . Из (7) и (8) имеем

$$\begin{aligned} S_0 &= \{n+1\}, \\ S_+ &= \{2, 3, \dots, n\}, \\ S_- &= \{n+2, n+3, \dots, 2n\}. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следует (6).  $\square$

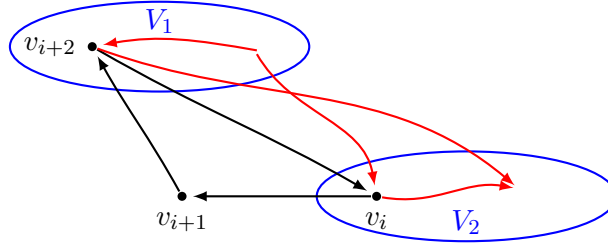
**Теорема 2.** Пусть в турнире  $T \in O(K_{2n+1})$  для каждой дуги  $e$  некоторого гамильтонова контура значение  $f_a(T, e)$  равно  $n$ . Тогда выполняется  $T \simeq C_{2n+1}(1, \dots, n; +1, \dots, +1)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим гамильтонов контур  $C = v_0, v_1, \dots, v_{2n}$  такой, что

$$f_a(T, v_i v_{i+1}) = n, \quad 0 \leq i \leq 2n.$$

Из (1)

$$|N^-(v_i) \cap N^+(v_{i+1})| = n.$$


 Рис. 2. Через дугу  $v_{i+2}v_i$  проходит ровно один контур.

Тогда множество  $N^-(v_i)$  равно множеству  $N^+(v_{i+1})$ . Обозначим его через  $V_1$ . Очевидно, что  $v_{i+2} \in V_1$ . Аналогично, поскольку  $|N^-(v_{i+1}) \cap N^+(v_{i+2})| = n$ , то  $N^-(v_{i+1}) = N^+(v_{i+2}) = V_2$ , и  $v_i \in V_2$ . Получили разбиение  $V(T) = V_1 \cup V_2 \cup \{v_{i+1}\}$  (Рис. 2).

В силу эйлеровости турнира

$$N^-(v_{i+2}) = V(T) \setminus (V_2 \cup \{v_{i+2}\}) = (V_1 \cup \{v_{i+1}\}) \setminus \{v_{i+2}\}.$$

Аналогично

$$N^+(v_i) = V(T) \setminus (V_1 \cup \{v_i\}) = (V_2 \cup \{v_{i+1}\}) \setminus \{v_i\}.$$

Следовательно, через дугу  $v_{i+2}v_i$  проходит ровно один контур (Рис. 2).

Таким образом, для каждой дуги  $e$  гамильтонова контура

$$v_0, v_{-2}, v_{-4}, \dots, v_2$$

значение  $f_a(T, e)$  равно 1. По Теореме 1 выполняется

$$T \simeq G_{2n+1}(1, \dots, n; +1, \dots, +1).$$

□

#### 4 Эйлеровы ориентации полного графа с удаленным гамильтоновым циклом

Рассмотрим гамильтонов контур  $C = v_0, v_1, \dots, v_{2n}$  в эйлеровом турнире  $T \in O(K_{2n+1})$ . Для каждой вершины  $v_i$  рассмотрим систему треугольников  $U_i = (q_1^i, \dots, q_{2n-1}^i)$ , где  $q_s^i = v_i, v_{i+s}, v_{i+s+1}$ . Таким образом, множестве  $U_0 \cup \dots \cup U_{2n+1}$  является множеством всех треугольников в  $T$ , имеющих общее с  $C$  ребро.

По построению справедливы следующие два предложения (Рис. 3).

**Предложение 5.**

$$U_i \cap U_j = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } \min(|i-j|, 2n+1-|i-j|) \neq 2; \\ v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, & \text{если } j = i+2. \end{cases}$$

**Предложение 6.** Если в  $U_i$  треугольник  $q_s^i$  является контуром,  $s \leq 2n-2$ , то  $q_{s+1}^i$  не является контуром.

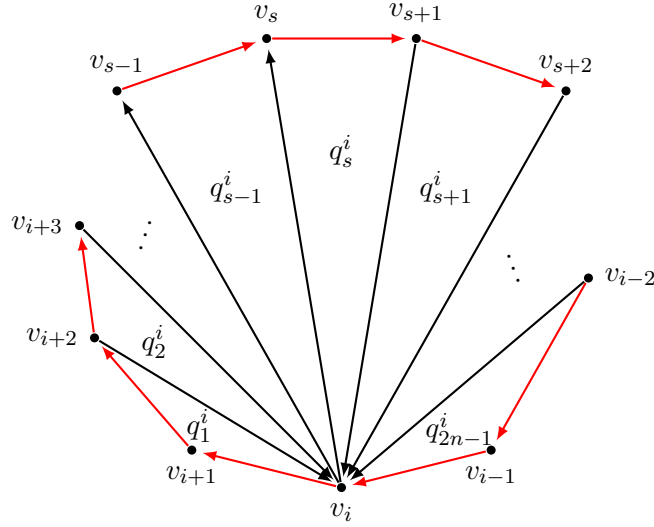


Рис. 3. Система треугольников  $U_i$ . Треугольники  $q_1^i$  и  $q_s^i$  являются контурами

Обозначим через  $f_a(T, C)$  количество 3-контуров в множестве  $U_0 \cup \dots \cup U_{2n+1}$ . Таким образом, это количество 3-контуров в турнире  $T$ , имеющих хотя бы одну общую дугу с гамильтоновым контуром  $C$ .

**Предложение 7.**

$$2n + 1 \leq f_a(T, C) \leq (n - 1)(2n + 1).$$

*Доказательство.* Заметим, что треугольник  $q_s^i$  является контуром тогда и только тогда, когда  $v_{i+s} \in N^+(v_i)$  и  $v_{i+s+1} \in N^-(v_i)$ . Поскольку  $v_{i+1} \in N^+(v_i)$  и  $v_{i-1} \in N^-(v_i)$ , то по крайней мере один контур в  $U_i$  есть (Рис. 3). Причем если  $q_1^i$  — контур, то будет по крайней мере еще один переход от исходящей из  $v_i$  дуги к входящей, а, следовательно, еще один контур. Аналогично, если  $q_{2n-1}^i$  является контуром, то контуров не менее двух. Следовательно, по Предложению 5 имеем  $f_a(T, C) \geq 2n + 1$ .

По Предложению 6 если в  $U_i$  больше  $(n - 1)$  контуров, то их  $n$  штук, и среди них есть  $q_1^i$  и  $q_{2n-1}^i$ , которые по Предложению 5 также входят в  $U_{i+2}$  и  $U_{i-2}$  соответственно. Следовательно,  $f_a(T, C) \leq (n - 1)(2n + 1)$ .  $\square$

**Теорема 3.** Для любой ориентации  $D \in O(K_{2n+1} \setminus C)$  число 3-контуров в ней удовлетворяет неравенствам

$$(2n + 1) \left( \frac{(n + 1)n}{6} - (n - 1) \right) \leq f_a(D) \leq (2n + 1) \left( \frac{(n + 1)n}{6} - 1 \right).$$

*Доказательство.* Любая ориентация  $D \in O(K_{2n+1} \setminus C)$  получается из некоторого эйлера турнира  $T \in O(K_{2n+1})$  удалением гамильтонова

контура  $C = v_0, v_1, \dots, v_{2n}$ . В силу (4) имеем

$$f_a(D) = f_a(T) - f_a(T, C) = \frac{2n+1}{3} \binom{n+1}{2} - f_a(T, C). \quad (9)$$

Следовательно, искомые неравенства следуют из Предложения 7.  $\square$

**Теорема 4.** *Существует и единственная с точностью до разворота всех дуг ориентация  $D \in O(K_{2n+1} \setminus C)$ , для которой справедливо равенство*

$$f_a(D) = (2n+1) \left( \frac{(n+1)n}{6} - (n-1) \right). \quad (10)$$

*Доказательство.* Пусть для  $D \in O(K_{2n+1} \setminus C)$  верно (10). Тогда его можно дополнить гамильтоновым контуром  $C = v_0, v_1, \dots, v_{2n}$  до турнира  $T$ . По Предложению 7 для  $C$  верно

$$f_a(T, C) = (n-1)(2n+1). \quad (11)$$

Как было показано в доказательстве Предложения 7, каждая система треугольников  $U_i$  в сумму (11) числа всех 3-контуров, имеющих общую дугу с  $C$ , вносит вклад не больше  $(n-1)$ . А следовательно, для достижения равенства должна вносить ровно  $(n-1)$ . Это возможно в двух случаях: когда в  $U_i$  контурами являются  $n$  треугольников  $q_1^i, q_3^i, q_5^i, \dots, q_{2n-1}^i$ , либо когда в  $U_i$  контурами являются  $(n-1)$  треугольник  $q_2^i, q_4^i, q_6^i, \dots, q_{2n}^i$ .

Из Предложения 5 следует, что если для некоторой вершины  $v_i$  система треугольников  $U_i$  содержит  $n$  контуров, то и система  $U_{i+2}$  тоже содержит  $n$  контуров. Поскольку вершин в графе нечетное число, то тогда для любой вершины  $v_i$  система треугольников  $U_i$  содержит  $n$  контуров. Таким образом, для нумерации вершин, заданной гамильтоновым контуром  $C$ , имеем

$$D = C_{2n+1}(2, \dots, n; -1, +1, -1, +1, \dots). \quad (12)$$

Причем по Предложению 4 и Теореме 2 эта ориентация эквивалентна ориентации  $C_{2n+1}(1, \dots, n-1; +1, \dots, +1)$ , которая получается из турнира  $C_{2n+1}(1, \dots, n; +1, \dots, +1)$  удалением дуг, соединяющих вершины на расстоянии  $n$ .

Остается случай, когда для любой вершины  $v_i$  система  $U_i$  содержит  $(n-1)$  контур. Это полностью определяет ориентацию  $D$ , которая равна  $C_{2n+1}(2, \dots, n; +1, -1, +1, -1, \dots)$  и получается из (12) разворотом всех дуг.  $\square$

**Теорема 5.** *Существует и единственная с точностью до разворота всех дуг ориентация  $D \in O(K_{2n+1} \setminus C)$ , что*

$$f_a(D) = (2n+1) \left( \frac{(n+1)n}{6} - 1 \right). \quad (13)$$

*Доказательство.* Пусть для  $D \in O(K_{2n+1} \setminus C)$  верно (13). Тогда  $D$  можно дополнить гамильтоновым контуром  $C = v_0, v_1, \dots, v_{2n}$  до турнира  $T$ . По Предложению 7 для  $C$  верно

$$f_a(T, C) = (2n + 1).$$

Из Предложений 6 и 5 для любой вершины  $v_i$  система треугольников  $U_i$  содержит один или два контура, причем, если один, то это  $q_n^i$ , а если два, то  $q_1^i$  и  $q_{2n-1}^i$ . Следовательно, если для всех  $i$  система  $U_i$  содержит один контур, то любая дуга  $e$  гамильтонова контура  $C$  удовлетворяет равенству  $f_a(T, e) = 1$ , и по Теореме 1 и Предложению 4

$$D = C_{2n+1}(2, \dots, n; +1, \dots, +1). \quad (14)$$

и получается из турнира  $C_{2n+1}(1, \dots, n; +1, \dots, +1)$  удалением дуг, соединяющих вершины на расстоянии 1.

Если же найдется такое  $i$ , что система  $U_i$  содержит два контура, то  $U_{i+2}$  тоже содержит два контура, а следовательно, в силу нечетности числа вершин, все  $U_j$  содержат два контура. Это полностью определяет ориентацию  $D$ , которая равна  $C_{2n+1}(2, \dots, n; -1, \dots, -1)$  и получается из (14) разворотом всех дуг.  $\square$

## 5 Эйлеровы ориентации полного графа с удаленным паросочетанием

Вершину  $v$  в  $H \in O(K_{2n} \setminus M)$  назовём противоположной для  $u$ , если  $v$  и  $u$  не смежны в  $H$ . Таким образом все вершины в  $H$  разбиваются на пары противоположных вершин. Будем считать, что все вершины пронумерованы от 0 до  $2n - 1$ ,  $v_i$  и  $v_{i+n}$  — противоположные вершины для всех  $i \in \{0, \dots, n - 1\}$ .

**Теорема 6.** Для ориентации  $H \in O(K_{2n} \setminus M)$  следующие оценки справедливы и достижимы:

$$\begin{aligned} 2 \binom{n}{3} \leq f_a(H) &\leq 2 \binom{n+1}{3}, \text{ если } n \text{ — нечетно;} \\ 2 \binom{n}{3} \leq f_a(H) &\leq \frac{(n-2)n(n+2)}{3}, \text{ если } n \text{ — четно.} \end{aligned}$$

Для доказательства Теоремы 6 потребуется ряд вспомогательных утверждений. Обозначим через  $r_i$  количество дуг, ведущих из  $N^+(v_i)$  в  $N^-(v_i)$ . Тогда очевидно, что

$$f_a(H) = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{2n-1} r_i. \quad (15)$$

Количество дуг внутри множества  $N^+(v_i)$  обозначим через  $s_i$ , а количество дуг из  $N^+(v_i)$  в  $v_{i+n}$  — через  $w_i$ . Нетрудно видеть, что

$$r_i + s_i + w_i = (n - 1)^2. \quad (16)$$

**Лемма 1.** Для любой ориентации  $H \in O(K_{2n} \setminus M)$  выполнено

$$f_a(H) \geq 2 \binom{n}{3}.$$

*Доказательство.* Заметим, что  $s_i \leq \binom{n-1}{2}$  и  $w_i \leq n-1$ . Тогда из (16) следует

$$r_i \geq (n-1)^2 - (n-1) - \binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Отсюда, используя (15) получаем

$$f_a(H) = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{2n-1} r_i \geq \frac{1}{3} \cdot 2n \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 2 \binom{n}{3}.$$

□

**Лемма 2.** Для любой ориентации  $H \in O(K_{2n} \setminus M)$  выполнено

$$f_a(H) \leq 2 \binom{n+1}{3}.$$

*Доказательство.* Заметим, что  $s_i \geq \binom{n-1}{2} - \frac{n-1}{2}$  и  $w_i \geq 0$ . Тогда из (16) следует

$$r_i \leq (n-1)^2 - \left( \binom{n-1}{2} - \frac{n-1}{2} \right) = \frac{(n-1)(n+1)}{2}.$$

Отсюда, используя (15) получаем

$$f_a(H) = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{2n-1} r_i \leq \frac{1}{3} \cdot 2n \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{2} = 2 \binom{n+1}{3}.$$

□

Заметим, что при четном  $n$  каждое из множеств  $N^+(v_i)$  и  $N^-(v_i)$  содержит нечетное число вершин. Отсюда следует

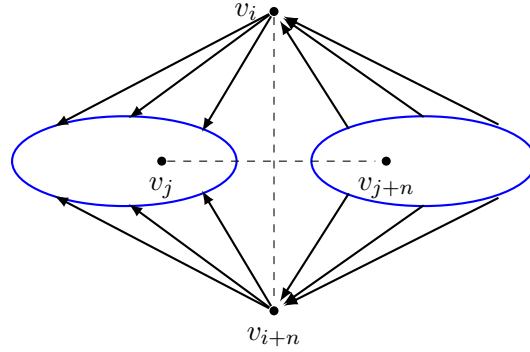
**Предложение 8.** Для любого чётного  $n$  для любой ориентации  $H \in O(K_{2n} \setminus M)$  для фиксированного  $i$  существует хотя бы одна пара противоположных вершин  $v_j$  и  $v_{j+n}$  таких, что одна из них принадлежит  $N^+(v_i)$ , а вторая  $N^-(v_i)$ .

**Лемма 3.** Для любого чётного  $n$  для любой ориентации  $H \in O(K_{2n} \setminus M)$  выполнено

$$f_a(H) \leq \frac{(n-2)n(n+2)}{3}.$$

*Доказательство.* Поскольку при четном  $n$  число  $\frac{n-1}{2}$  не целое, то нижнюю оценку для  $s_i$  из доказательства Леммы 2 можно усилить следующим образом:

$$s_i \geq \binom{n-1}{2} - \frac{n-2}{2}.$$

Рис. 4.  $w_i = 0$ ,  $\varphi(i) = j$ 

Таким образом, используя (16), получаем верхнюю оценку:

$$\begin{aligned}
 f_a(H) &\leq \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{2n-1} r_i = \frac{1}{3} ((n-1)^2 - s_i - w_i) \leq \\
 &\leq \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{2n-1} \left( (n-1)^2 - \left( \binom{n-1}{2} - \frac{n-2}{2} \right) - w_i \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left( 2n \cdot \frac{n^2-2}{2} - \sum_{i=0}^{2n-1} w_i \right). \tag{17}
 \end{aligned}$$

Докажем, что  $\sum_{i=0}^{2n-1} w_i \geq 2n$ .

Заметим, что

$$\begin{aligned}
 n-1 &= |N^+(v_i)| = |(N^+(v_i) \cap N^+(v_{i+n}))| + w_i = \\
 &= |N^+(v_{i+n})| = |(N^+(v_i) \cap N^+(v_{i+n}))| + w_{i+n}.
 \end{aligned}$$

Поэтому для пары противоположных вершин  $v_i$  и  $v_{i+n}$  справедливо

$$w_i = w_{i+n} \tag{18}$$

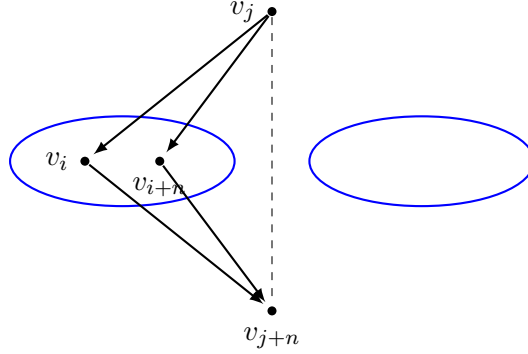
Пусть  $\mathcal{I}_0 = \{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid w_i = 0\}$ , а  $\mathcal{I}'_0 = \{i+n \mid i \in \mathcal{I}_0\}$ . Таким образом, для любого  $j \notin \mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}'_0$  имеем

$$w_j \geq 1. \tag{19}$$

По Предложению 8 для каждого  $i \in \mathcal{I}_0$  будет существовать  $j$  такое, что

$$v_j \in N^+(v_i) \cap N^+(v_{i+n}), \quad v_{j+n} \in N^-(v_i) \cap N^-(v_{i+n}). \tag{20}$$

Рассмотрим отображение  $\varphi$ , которое любому  $i \in \mathcal{I}_0$  ставит в соответствие некоторое  $j$ , удовлетворяющее (20) (Рис. 4). Обозначим  $\mathcal{M} =$


 Рис. 5.  $i \in \varphi^{-1}(j)$ 

$\varphi(\mathcal{I}_0)$ , а  $\mathcal{M}' = \{i + n \mid i \in \mathcal{M}\}$ . Нетрудно видеть, что

$$|\mathcal{M}| = |\mathcal{M}'| \leq |\mathcal{I}_0|. \quad (21)$$

Пусть теперь  $\mathcal{R} = \{0, \dots, 2n - 1\} \setminus (\mathcal{M} \cup \mathcal{M}' \cup \mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_0')$ . Из (19) получаем неравенство

$$\sum_{i \in \mathcal{R}} w_i \geq |\mathcal{R}|. \quad (22)$$

Имеем разбиение  $\{0, \dots, 2n - 1\} = \mathcal{I}_0 \sqcup \mathcal{I}_0' \sqcup \mathcal{M} \sqcup \mathcal{M}' \sqcup \mathcal{R}$ . Из (21) получаем, что

$$|\mathcal{R}| \geq 2n - 4|\mathcal{I}_0|. \quad (23)$$

Пусть  $j \in \mathcal{M}$ . Тогда для любого  $i \in \varphi^{-1}(j)$  получаем  $v_i, v_{i+n} \in N^-(v_j) \cap N^+(v_{j+n})$  (Рис. 5). Следовательно  $w_j \geq 2|\varphi^{-1}(j)|$ . Значит,

$$\sum_{j \in \mathcal{M}} w_j \geq 2|\mathcal{I}_0|. \quad (24)$$

В результате, в силу (18), (22), (23), (24), имеем:

$$\sum_{i=0}^{2n-1} w_i = \sum_{i \in \mathcal{M}} w_i + \sum_{i \in \mathcal{M}'} w_i + \sum_{i \in \mathcal{R}} w_i = 2 \sum_{i \in \mathcal{M}} w_i + \sum_{i \in \mathcal{R}} w_i \geq 4|\mathcal{I}_0| + |\mathcal{R}| \geq 2n.$$

Подставляя полученную оценку в (17), получаем

$$f_a(H) \leq \frac{1}{3} \left( 2n \cdot \frac{n^2 - 2}{2} - \sum_{i=0}^{2n-1} w_i \right) \leq \frac{(n-2)n(n+2)}{3}.$$

□

Для эйлеровых ориентаций вида  $C_{2n}(d_1, \dots, d_{n-1}; t_1, \dots, t_{n-1})$  введём обозначение

$$\Delta(C_{2n}(d_1, \dots, d_{n-1}; t_1, \dots, t_{n-1})) = |\{(i, j) \mid i < j, d_i + d_j = n, t_i \neq t_j\}|.$$

**Предложение 9.**

$$0 \leq \Delta(C_{2n}(1, \dots, n-1; t_1, \dots, t_{n-1})) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

и существуют наборы  $t_1, \dots, t_{n-1}$ , на которых достигаются нижняя и верхняя оценки.

Нетрудно видеть, что нижняя оценка достигается на любом наборе, в котором все  $t_i$  принимают одно и то же значение. Верхняя оценка достигается на любом антисимметричном наборе  $t_1, \dots, t_{n-1}$ . Например,

$$t_1, \dots, t_{n-1} = \underbrace{-1, \dots, -1}_{\frac{n-1}{2}}, \underbrace{+1, \dots, +1}_{\frac{n-1}{2}}$$

для нечётного  $n$ , и

$$t_1, \dots, t_{n-1} = \underbrace{-1, \dots, -1}_{\frac{n-2}{2}}, -1, \underbrace{+1, \dots, +1}_{\frac{n-2}{2}}$$

для чётного.

**Лемма 4.** Пусть  $T = C_{2n}(1, \dots, n-1; t_1, \dots, t_{n-1})$ . Тогда

$$f_a(T) = \begin{cases} 2\binom{n+1}{3} - 2n(\frac{n-1}{2} - \Delta(T)), & n - \text{нечетно}; \\ 2\binom{n+1}{3} - (2n(\frac{n-2}{2} - \Delta(T)) + n), & n - \text{четно}. \end{cases}$$

*Доказательство.* Для каждого  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  добавим в ориентацию  $T$  дугу из  $v_i$  в  $v_{i+n}$ . Получим турнир  $T'$ , для которого

$$\deg_+ v_i = \begin{cases} n, & i \in \{0, \dots, n-1\}; \\ n-1, & i \in \{n, \dots, 2n-1\}. \end{cases}$$

По [1] имеем:

$$f_a(T') = \binom{2n}{3} - \sum_{i=0}^{2n-1} \binom{\deg_+ v_i}{2} = \binom{2n}{3} - n \binom{n}{3} - n \binom{n-1}{3} = 2 \binom{n+1}{3}.$$

Каждая добавленная дуга может образовать в  $T'$  3-контур только с парой дуг, соединяющих вершины на расстояниях равных  $j$  и  $n-j$  для некоторого  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ . Если  $t_j \neq t_{n-j}$ , то добавленная дуга  $(v_i, v_{i+n})$  не образует 3-контур с дугами длин  $j$  и  $n-j$ . Иначе, добавленная дуга образует ровно 2 3-контур с дугами этих длин (кроме случая когда для четного  $n$  и  $j = n/2$  будет получаться один 3-контур).

Таким образом, для нечетного  $n$  каждая добавленная дуга образует  $2(\frac{n-1}{2} - \Delta(T))$  3-контуров. Для четного  $n$  — образует  $(1 + 2(\frac{n-1}{2} - \Delta(T)))$  3-контуров.  $\square$

Из Лемм 1, 2, 3, 4 и Предложения 9 напрямую следует доказательство теоремы 6.

## References

- [1] Perezhogin A. L., Bykov I. S., Avgustinovich S. V., [Small length circuits in Eulerian orientations of graphs](#), *Siber. Electr. Math. Reports*. 14 (2024) , 370-382.
- [2] Kireeva T. E., [Perfect orientation colorings of cubic graphs](#), *Siber. Electr. Math. Reports*. 15 (2018) , 1353-1360.
- [3] Taranenko A. A., [Algebraic properties of perfect structures](#). *Linear Algebra Appl.* 607 (2020), 286-306.
- [4] Пяткин А. В., Черных О. И., [О максимальном числе открытых треугольников в графах с одинаковым числом вершин и рёбер](#). *Дискретный анализ и исследование операций*, 29, 1, 46-55 (2022)
- [5] Pyatkin A. V., [On the maximum number of open triangles in graphs with few edges](#), *J. Appl. Industr. Math.*, 18:3 (2024), 516–520.

SERGEI VLADIMIROVICH AVGUSTINOVICH  
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,  
 PR. КОПТУГА, 4,  
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*E-mail address:* [avgust@math.nsc.ru](mailto:avgust@math.nsc.ru)

IGOR SERGEEVICH BYKOV  
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,  
 PIROGOVA STR., 1,  
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*E-mail address:* [igor.s.bykov@yandex.ru](mailto:igor.s.bykov@yandex.ru)

ALEKSEI L'VOVICH PEREZHOGIN  
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,  
 PR. КОПТУГА, 4,  
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*E-mail address:* [pereal@math.nsc.ru](mailto:pereal@math.nsc.ru)

ALENA SERGEEVNA KRIVONOGOVA  
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,  
 PIROGOVA STR., 1,  
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*E-mail address:* [k.alena.s.610@gmail.com](mailto:k.alena.s.610@gmail.com)