

Работа посвящена поиску эйлеровых ориентацией полных графов  $K_n$  с выкинутым гамильтоновым циклом (для нечетного  $n$ ) или паросочетанием (для четного  $n$ ), максимизирующих или минимизирующих число 3-контуров. Для всех четырех рассматриваемых случаев найдены границы на число контуров и доказана их достижимость.

Наиболее существенные замечания к работе касаются прозрачности изложения доказательств основных результатов. А именно, необходимо прояснить следующие моменты:

1. Добавить краткое обоснование для предложения 1.
2. Добавить, что предложение 2 вытекает из формулы выше.
3. В доказательстве теоремы 1:
  - Почему нет еще одного множества  $S$ , в которое бы входили номера вершин  $v_j \in N^+(v_0) \cap N^-(v_1)$ ?
  - Почему в (6) верно, что  $|S_+| = |S_-|$ ?
  - Добавить, по возможности, иллюстрацию к доказательству теоремы.
4. В доказательстве теоремы 2: пояснить включение  $N^+(v_i) \cap N^-(v_{i+1}) \subset N^-(v_{i+1}) \cap N^+(v_{i+2})$ , принадлежность  $v_j$  объединению двух пар пересечений и как отсюда следует  $f_a(T, v_{i+2}v_i) = 1$ . Возможно, это будет удобнее сделать при помощи иллюстрации или примера.
5. В доказательстве предложения 6: пояснить, как из эйлеровости ориентации вытекает, что хотя бы один контур существует в  $U_i$ , а также почему в случае  $q_1^i$  и  $q_{2n-1}^i$  контуров не менее двух.
6. В доказательстве теоремы 4: пояснить (возможно иллюстрацией), почему если в системе  $U_i$  содержится  $n$  контуров, то и в системе  $U_{i+2}$  будет  $n$  контуров.
7. Пояснить, почему в самом начале доказательства леммы 2 имеем  $s_i \geq \binom{n-1}{2} \frac{n-1}{2}$ , а затем в лемме 3 предложение 7 позволяет усилить эту оценку.
8. Обосновать предложение 7.
9. В доказательстве леммы 3:
  - Пояснить, почему в произвольной эйлеровой ориентации  $K_{2n} \setminus M$  для пары противоположных вершин верно  $t_i = t_{i+n}$ .
  - Хорошо бы проиллюстрировать или неформально пояснить смысл множеств  $\mathcal{M}_i$ ,  $\mathcal{I}_0$  и  $\mathcal{I}_2$ . В частности, из этого пояснения хочется понять, почему  $\mathcal{I}_0$  и  $\mathcal{I}_2$  не пересекаются.
  - Какие именно две дуги дает каждый индекс  $i$  из  $\mathcal{M}(j)$ ?
  - Пояснить, почему предложение 7 влечет неравенство  $\sum_{i \in \mathcal{I}_2} |\mathcal{M}(i)| \geq |\mathcal{I}_0|$ ?
10. Обосновать предложение 8 и конкретизировать наборы  $t_1, \dots, t_{n-1}$ , на которых достигаются нижняя и верхние оценки.

Также есть несколько замечаний относительно выбора обозначений и редакционного характера:

1. Английский текст аннотации труден для понимания, в нем есть заметные грамматические ошибки. Я предлагаю заменить на следующий вариант (или близкий к нему) с тем же смыслом:

In this paper, we consider the achievability of the maximum and minimum numbers of occurrences of 3-circuits in Eulerian orientations of complete graphs missing a transitive subset of edges: complete graphs with an even number of vertices and a perfect matching removed, and those with an odd number of vertices and a Hamiltonian cycle removed. For each of these families of digraphs, we obtain upper and lower estimates for the number of 3-circuits and prove their achievability. Previously, orientations that are extreme with respect to the number of 4-circuit occurrences have been investigated in [1].

2. Середина с. 2: почему антиконтур назван транзитивным фрагментом, когда он не транзитивен?
3. Середина с. 2: нужна ссылка на статью, где есть формула для вычисления числа 3-контуров в турнире через полустепени исхода или захода.
4. Не понятно, почему расстояние между вершинами в циркулянтном графе в порядке их расположения по циклу названо расстоянием Ли. Более логичным было бы его назвать его расстоянием по циклу или дистанцией. Кроме того, так как нигде в работе не используется расстояние между вершинами как длина кратчайшего пути, то можно сказать, что в этой статье под расстоянием понимается расстояние по циклу.
5. В доказательстве леммы 4: исправить опечатку в фразе “соединим добавим”.
6. В доказательстве леммы 4: вместо “По [1] имеем:  $f_a(T) = \dots$ ” по-видимому должно быть “По [1] имеем:  $f_a(T') = \dots$ ”
7. В доказательстве леммы 4: везде в последних абзацах вместо “фрагмента  $a$ ” должен быть “3-контур”.
8. Обозначение  $t_i$ , введенное для доказательства теоремы 6 вместе с  $r_i$  и  $s_i$ , не удобно, так как оно пересекается с обозначением  $t_i$  для ориентации дуг циркулянта.

Данная работа рекомендуется к публикации в СЭМИ после устранения указанных замечаний.