S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 519.175
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 05C20

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЭЙЛЕРОВЫ ОРИЕНТАЦИИ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ

С.В. Августинович, И.С. Быков, А.Л. Пережогин, А.С. Кривоногова

Представлено П.П. Петровым

Abstract: In this paper we consider the achievability of maximum and minimum values of the number of occurrences of 3-circuits for Eulerian orientations of complete graphs with an even number of vertices and a perfect matching removed, and with an odd number of vertices and a Hamiltonian cycle removed. Upper and lower estimates for the number of 3-circuits in each of these families of orgraphs are obtained. The achievability of the estimates is proved. Previously, orientations that are extreme in the number of 4-circuits occurrences have been investigated [1].

Keywords: Eulerian orientation of graph, circuit, tournament.

1 Введение

В самом общем виде рассматриваемая задача формулируется следующим образом. Для произвольного семейства графов (в нашем случае –

Avgustinovich, S.V., Bykov, I.S., Perezhogin, A.L., Krivonogova A.S. Extreme Eulerian orientations of circulant graphs.

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0017).

Поступила 1 января 2024 г., опубликована 31 декабря 2024 г.

ориентированных эйлеровых) определить, на каких представителях семейства достигает максимума или минимума число вхождений некоторого фиксированного фрагмента (например, 3-контура). Довольно часто удается не только найти значение этого экстремума, но и охарактеризовать те графы, на которых он достигается [1]. Экстремальные графы при этом обычно обладают характерными свойствами совершенных структур [2, 3] и получаются друг из друга свитчингами. Минимальными нетривиальными фрагментами являются трехвершинные. В неориентированном случае они изучались в [4, 5].

Ориентацией графа G назовем орграф, получаемый из G заменой каждого ребра vu на ровно одну из дуг vu или uv. Две ориентации одного графа назовем эквивалентными, если изоморфны соответствующие орграфы. Ориентация полного графа называется турниром. Ориентация графа G называется эйлеровой, если в каждой вершине полустепень исхода равна полустепени захода. Для связного графа G существует эйлерова ориентация тогда и только тогда, когда G является эйлеровым. Через $O(G)$ обозначим множество всех эйлеровых ориентаций графа G. Например, $O(K_{2n+1})$ — это множество эйлеровых турниров на $(2n+1)$-ой вершине.

Любые три вершины произвольного турнира либо образуют ориентированный 3-цикл (контур), либо транзитивный фрагмент (антиконтур). Хорошо известно, что число 3-контуров в произвольном турнире однозначно определено набором полустепеней исхода и захода вершин этого графа. Это, в частности, означает, что в эйлеровых турнирах число 3-контуров не зависит от выбора турнира. Для произвольной дуги e орграфа H обозначим через $f_a(H,e)$ количество 3-контуров, проходящих через нее. Данный инвариант зачастую позволяет разбить все дуги турнира на орбиты (классы эквивалентности) относительно его группы автоморфизмов. В работе охарактеризованы классы эйлеровых ориентаций некоторых графов, на которых функция $f_a(H,e)$ достигает экстремальных распределений по дугам H.

Ранее исследовались ориентации, экстремальные по числу вхождений 4-контуров [1]. Также представляет интерес экстремальное поведение неориентированных графов с фиксированным числом ребер и максимальным числом вхождений индуцированных $K_{1,2}$ [5].

В работе изучаются минимальные и максимальные распределения 3-контуров, проходящих через различные множества дуг произвольного эйлерова турнира. Доказано, что среди эйлеровых ориентаций полного графа с удаленным гамильтоновым циклом максимальное число 3-контуров достигается с точностью до эквивалентности на циркулянтной ориентации, в которой гамильтонов цикл расположен на периферии графа, а все дуги ориентированы по часовой стрелке. Для полного графа с четным числом вершин и удаленным паросочетанием получен аналогичный результат. Паросочетание в этом случае состоит из ребер, соединяющих диаметрально противоположные вершины, а максимум и минимум числа 3-контуров достигается сразу на целых семействах ориентаций.

2 Ориентации циркулянтов

Согласно [1] через $f_a(H)$ обозначим количество 3-контуров в орграфе H.

Обозначим через $K_{2n} \setminus M$ полный граф с удаленным совершенным паросочетанием, а через $K_{2n+1} \setminus C$ полный граф с удаленным гамильтоновым циклом.

Выходящей окрестностью $N^+(v)$ вершины v в ориентации H графа G будем называть множество вершин, в которые ведут дуги, начинающиеся в v. Аналогично определяется входящая окрестность $N^-(v)$. Для любой дуги $e = uv$ орграфа H имеем

$$f_a(H, e) = |N^+(v) \cap N^-(u)|. \tag{1}$$

Предложение 1. *Для любой дуги e эйлеровой ориентации $T \in O(K_{2n+1})$ верны неравенства*

$$1 \le f_a(T, e) \le n. \tag{2}$$

Согласно [1] количество 3-контуров в произвольной эйлеровой ориентации $T \in O(K_{2n+1})$ равно

$$f_a(T) = \frac{2n+1}{3}\binom{n+1}{2}. \tag{3}$$

Предложение 2. *Для любой эйлеровой ориентации $T \in O(K_{2n+1})$ верно*

$$\sum_{e \in T} f_a(T, e) = (2n+1)\binom{n+1}{2}. \tag{4}$$

Через $C_N(d_1, \dots, d_p)$, $0 < d_1 < \dots < d_p < N/2$, обозначим неориентированный циркулянтный граф на N вершинах $\{0, \dots, N-1\}$, в котором две вершины i и j соединены ребром тогда и только тогда, когда

$$\min(|i-j|, N-|i-j|) \in \{d_1, \dots, d_p\}.$$

Иными словами, если вершины расположить по циклу, то ребром соединяем вершины, между которыми расстояние по циклу (расстояние Ли) равно d_k для некоторого k.

Через $C_N(d_1, \dots, d_p; t_1, \dots, t_p)$, $t_i \in \{-1, +1\}$, обозначим эйлерову ориентацию графа $C_N(d_1, \dots, d_p)$, в которой дуга между вершинами на расстоянии Ли равном d_k ориентирована по часовой стрелке, если $t_k = +1$, и против часовой стрелки, если $t_k = -1$. Заметим, что

$$C_{2n+1}(1, \dots, n; t_1, \dots, t_n) \in O(K_{2n+1}),$$
$$C_{2n}(1, \dots, n-1; t_1, \dots, t_{n-1}) \in O(K_{2n} \setminus M).$$

Предложение 3. *Для* $T = C_{2n+1}(1,\dots,n;+1,\dots,+1)$ *значения* $f_a(T,e)$ *на каждой дуге* e*, соединяющей вершины на расстоянии Ли равном* p*, принимает значение* p*.*

Это легко следует из простого факта, что число целочисленных решений уравнения $x+y+z = 2n+1$ при фиксированных x и n с ограничением $0 < y, z \le n$ равно x.

3 Турниры с выделенным гамильтоновым циклом

В данном разделе дается характеризация турниров, у которых ребрам некоторого гамильтонова контура соответствует экстремальное значение параметра $f_a(T,e)$.

Теорема 1. *Пусть в турнире* $T \in O(K_{2n+1})$ *для каждой дуги* e *некоторого гамильтонова контура значение* $f_a(T,e)$ *равно 1. Тогда выполняется* $T \simeq C_{2n+1}(1,\dots,n;+1,\dots,+1)$*.*

Доказательство. Рассмотрим гамильтонов контур $C = v_0, v_1, \dots, v_{2n}$ такой, что
$$f_a(T, v_iv_{i+1}) = 1, \quad 0 \le i \le 2n.$$
Здесь и далее индексы берутся по модулю $2n+1$. Покажем, что такой гамильтонов контур задает нумерацию вершин, при которой $T = C_{2n+1}(1,\dots,n;+1,\dots,+1)$. В силу транзитивности C достаточно доказать
$$\begin{aligned} N^+(v_0) &= \{v_j \mid 1 \le j \le n\} \\ N^-(v_0) &= \{v_j \mid n+1 \le j \le 2n\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Для дуги v_0v_1 множество индексов $\{2,\dots,2n\}$ разобьем на три множества
$$\begin{aligned} S_0 &= \{j \mid v_j \in N^-(v_0) \cap N^+(v_1)\}, \\ S_+ &= \{j \mid v_j \in N^+(v_0) \cap N^+(v_1)\}, \\ S_- &= \{j \mid v_j \in N^-(v_0) \cap N^-(v_1)\}. \end{aligned}$$
Поскольку $f_a(T, v_iv_{i+1}) = 1$, то
$$|S_0| = 1,\ |S_+| = |S_-| = n-1. \tag{6}$$
Заметим, что
$$\text{если } i \in S_+,\ \text{то } (i+1) \notin S_-. \tag{7}$$
Иначе $f_a(T, v_iv_{i+1}) > 1$.

Поскольку $v_2 \in N^+(v_1)$, то $2 \in S_0 \cup S_+$. Если $2 \in S_0$, то дуга v_1v_2 принадлежит 3-контуру v_0, v_1, v_2. Следовательно, $v_3 \in N^+(v_1)$ и $3 \in S_+$, что противоречит (6) и (7). Таким образом, $2 \in S_+$. Из (6) и (7) имеем
$$\begin{aligned} S_0 &= \{n+1\}, \\ S_+ &= \{2,\, 3,\, \dots,\, n\}, \\ S_- &= \{n+2,\, n+3,\, \dots,\, 2n\}. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следует (5). □

Теорема 2. *Пусть в турнире $T \in O(K_{2n+1})$ для каждой дуги e некоторого гамильтонова контура значение $f_a(T,e)$ равно n. Тогда выполняется $T \simeq C_{2n+1}(1,\dots,n;+1,\dots,+1)$.*

Доказательство. Рассмотрим гамильтонов контур $C = v_0, v_1, \dots, v_{2n}$ такой, что

$$f_a(T, v_i v_{i+1}) = n, \quad 0 \le i \le 2n.$$

Из (1)

$$|N^-(v_i) \cap N^+(v_{i+1})| = n.$$

Тогда в силу эйлеровости турнира

$$|N^+(v_i) \cap N^-(v_{i+1})| = n - 1.$$

Аналогично, для дуги $v_{i+1}v_{i+2}$

$$|N^-(v_{i+1}) \cap N^+(v_{i+2})| = n,$$

причем $v_i \in N^-(v_{i+1}) \cap N^+(v_{i+2})$. Поскольку $f_a(T, v_{i+1}v_{i+2}) = n$, то

$$N^+(v_i) \cap N^-(v_{i+1}) \subset N^-(v_{i+1}) \cap N^+(v_{i+2}).$$

Таким образом, для любой вершины v_j, $j \notin \{i, i+1, i+2\}$, имеем

$$v_j \in (N^+(v_i) \cap N^+(v_{i+2})) \cup (N^-(v_i) \cap N^-(v_{i+2})).$$

Следовательно, $f_a(T, v_{i+2}v_i) = 1$. Таким образом, для каждой дуги e гамильтонова контура $v_0, v_{-2}, v_{-4}, \dots, v_2$ значение $f_a(T,e)$ равно 1. По Теореме 1 выполняется $T \simeq G_{2n+1}(1,\dots,n;+1,\dots,+1)$.

□

4 Эйлеровы ориентации полного графа с удаленным гамильтоновым циклом

Рассмотрим гамильтонов контур $C = v_0, v_1, \dots, v_{2n}$ в эйлеровом турнире $T \in O(K_{2n+1})$. Для каждой вершины v_i рассмотрим систему треугольников $U_i = (q_1^i, \dots, q_{2n-1}^i)$, где $q_s^i = v_i, v_{i+s}, v_{i+s+1}$. Таким образом, множестве $U_0 \cup \dots \cup U_{2n+1}$ является множеством всех треугольников в T, имеющих общее с C ребро.

Заметим, что каждый треугольник в турнире T имеет ориентацию. По построению справедливы следующие два предложения.

Предложение 4.

$$U_i \cap U_j = \begin{cases} \varnothing, & \textit{если } \min(|i-j|, 2n+1-|i-j|) \ne 2; \\ v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, & \textit{если } j = i+2. \end{cases}$$

Предложение 5. *Если в U_i треугольник q_s^i является контуром, $s \le 2n-2$, то q_{s+1}^i не является контуром.*

Обозначим через $f_a(T, C)$ количество 3-контуров в множестве $U_0 \cup \cdots \cup U_{2n+1}$. Таким образом, это количество 3-контуров в турнире T, имеющих хотя бы одну общую дугу с гамильтоновым контуром C.

Предложение 6.

$$2n + 1 \leq f_a(T, C) \leq (n - 1)(2n + 1).$$

Доказательство. Заметим, что треугольник q_s^i является контуром тогда и только тогда, когда $v_{i+s} \in N^+(v_i)$ и $v_{i+s+1} \in N^-(v_i)$. Поскольку $v_{i+1} \in N^+(v_i)$ и $v_{i-1} \in N^-(v_i)$, то по крайней мере один контур в U_i есть. Причем если это q_1^i или q_{2n-1}^i, то контуров не менее двух. Следовательно, по Предложению 4 имеем $f_a(T, C) \geq 2n + 1$.

По Предложению 5 если в U_i больше $(n - 1)$ контуров, то их n штук, и среди них есть q_1^i и q_{2n-1}^i, которые по Предложению 4 также входят в U_{i+2} и U_{i-2} соответственно. Следовательно, $f_a(T, C) \leq (n-1)(2n+1)$. □

Теорема 3. *Для любой ориентации $D \in O(K_{2n+1} \setminus C)$ число 3-контуров в ней удовлетворяет неравенствам*

$$(2n + 1)\left(\frac{(n + 1)n}{6} - (n - 1)\right) \leq f_a(D) \leq (2n + 1)\left(\frac{(n + 1)n}{6} - 1\right).$$

Доказательство. Любая ориентация $D \in O(K_{2n+1} \setminus C)$ получается из некоторого эйлерова турнира $T \in O(K_{2n+1})$ удалением гамильтонова контура $C = v_0, v_1, \ldots, v_{2n}$. В силу (3) имеем

$$f_a(D) = f_a(T) - f_a(T, C) = \frac{2n + 1}{3}\binom{n + 1}{2} - f_a(T, C). \tag{8}$$

Следовательно, искомые неравенства следуют из Предложения 6. □

Теорема 4. *Существует и единственная с точностью до разворота всех дуг ориентация $D \in O(K_{2n+1} \setminus C)$, для которой справедливо равенство*

$$f_a(D) = (2n + 1)\left(\frac{(n + 1)n}{6} - (n - 1)\right). \tag{9}$$

Доказательство. Пусть для $D \in O(K_{2n+1} \setminus C)$ верно (9). Тогда его можно дополнить гамильтоновым контуром $C = v_0, v_1, \ldots, v_{2n}$ до турнира T. По Предложению 6 для C верно

$$f_a(T, C) = (n - 1)(2n + 1). \tag{10}$$

Из Предложений 5 и 4 следует, что если для некоторой вершины v_i система треугольников U_i содержит n контуров, то среди них есть q_1^i и q_{2n-1}^i, а значит и система U_{i+2} тоже содержит n контуров. Поскольку вершин в графе нечетное число, то тогда для любой вершины v_i система треугольников U_i содержит n контуров. Таким образом, для нумерации вершин, заданной гамильтоновым контуром C, имеем

$$D = C_{2n+1}(2, \ldots, n; -1, +1, -1, +1, \ldots). \tag{11}$$

Причем по Предложению 3 и Теореме 2 эта ориентация эквивалентна ориентации $C_{2n+1}(1,\dots,n-1;+1,\dots,+1)$, которая получается из турнира $C_{2n+1}(1,\dots,n;+1,\dots,+1)$ удалением дуг, соединяющих вершины на расстоянии Ли равном n.

Для достижения равенства (10) остается только случай, когда для любой вершины v_i система U_i содержит $(n-1)$ контур. Это полностью определяет ориентацию D, которая равна $C_{2n+1}(2,\dots,n;+1,-1,+1,-1,\dots)$ и получается из (11) разворотом всех дуг. □

Теорема 5. *Существует и единственная с точностью до разворота всех дуг ориентация $D \in O(K_{2n+1} \setminus C)$, что*

$$f_a(D) = (2n+1)\left(\frac{(n+1)n}{6} - 1\right). \tag{12}$$

Доказательство. Пусть для $D \in O(K_{2n+1} \setminus C)$ верно (12). Тогда D можно дополнить гамильтоновым контуром $C = v_0, v_1, \dots, v_{2n}$ до турнира T. По Предложению 6 для C верно

$$f_a(T, C) = (2n+1).$$

Из Предложений 5 и 4 для любой вершины v_i система треугольников U_i содержит один или два контура, причем, если один, то это q_n^i, а если два, то q_1^i и q_{2n-1}^i. Следовательно, если для всех i система U_i содержит один контур, то любая дуга e гамильтонова контура C удовлетворяет равенству $f_a(T, e) = 1$, и по Теореме 1 и Предложению 3

$$D = C_{2n+1}(2,\dots,n;+1,\dots,+1). \tag{13}$$

и получается из турнира $C_{2n+1}(1,\dots,n;+1,\dots,+1)$ удалением дуг, соединяющих вершины на расстоянии Ли равном 1.

Если же найдется такое i, что система U_i содержит два контура, то U_{i+2} тоже содержит два контура, а следовательно, в силу нечетности числа вершин, все U_j содержат два контура. Это полностью определяет ориентацию D, которая равна $C_{2n+1}(2,\dots,n;-1,\dots,-1)$ и получается из (13) разворотом всех дуг. □

5 Эйлеровы ориентации полного графа с удаленным паросочетанием

Вершину v в $H \in O(K_{2n} \setminus M)$ назовём противоположной для u, если v и u не смежны в H. Таким образом все вершины в H разбиваются на пары противоположных вершин. Будем считать, что все вершины пронумерованы от 0 до $2n-1$, v_i и v_{i+n} — противоположные вершины для всех $i \in \{0,\dots,n-1\}$.

Теорема 6. *Для ориентации $H \in O(K_{2n} \setminus M)$ следующие оценки справедливы и достижимы:*

$$2\binom{n}{3} \leq f_a(H) \leq 2\binom{n+1}{3}, \text{ если } n \text{ — нечетно;}$$

$$2\binom{n}{3} \leq f_a(H) \leq \frac{(n-2)n(n+2)}{3}, \text{ если } n \text{ — четно.}$$

Для доказательства Теоремы 6 потребуется ряд вспомогательных утверждений. Обозначим через r_i количество дуг, ведущих из $N^+(v_i)$ в $N^-(v_i)$. Тогда очевидно, что

$$f_a(H) = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2n-1} r_i. \tag{14}$$

Количество дуг внутри множества $N^+(v_i)$ обозначим через s_i, а количество дуг из $N^+(v_i)$ в v_{i+n} — через t_i. Нетрудно видеть, что

$$r_i + s_i + t_i = (n-1)^2. \tag{15}$$

Лемма 1. *Для любой ориентации $H \in O(K_{2n} \setminus M)$ выполнено*

$$f_a(H) \geq 2\binom{n}{3}.$$

Доказательство. Заметим, что $s_i \leq \binom{n-1}{2}$ и $t_i \leq n-1$. Тогда из (15) следует

$$r_i \geq (n-1)^2 - (n-1) - \binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Отсюда, используя (14) получаем

$$f_a(H) = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2n-1} r_i \geq \frac{1}{3} \cdot 2n \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 2\binom{n}{3}.$$

□

Лемма 2. *Для любой ориентации $H \in O(K_{2n} \setminus M)$ выполнено*

$$f_a(H) \leq 2\binom{n+1}{3}.$$

Доказательство. Заметим, что $s_i \geq \binom{n-1}{2} - \frac{n-1}{2}$ и $t_i \geq 0$. Тогда из (15) следует

$$r_i \leq (n-1)^2 - \left(\binom{n-1}{2} - \frac{n-1}{2}\right) = \frac{(n-1)(n+1)}{2}.$$

Отсюда, используя (14) получаем

$$f_a(H) = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2n-1} r_i \geq \frac{1}{3} \cdot 2n \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{2} = 2\binom{n+1}{3}.$$

□

Предложение 7. *Для любого чётного n для любой ориентации $H \in O(K_{2n} \backslash M)$ для фиксированного i существует хотя бы одна пара противоположных вершин v_j и v_{j+n} таких, что $v_j \in N^+(v_i)$, а $v_{j+n} \in N^-(v_i)$*

Лемма 3. *Для любого чётного n для любой ориентации $H \in O(K_{2n} \backslash M)$ выполнено*

$$f_a(H) \leq \frac{(n-2)n(n+2)}{3}.$$

Доказательство. Используя Предложение 7, усилим нижнюю оценку для s_i из доказательства Леммы 2:

$$s_i \geq \binom{n-1}{2} - \frac{n-2}{2}.$$

Таким образом, используя (15), получаем верхнюю оценку:

$$f_a(H) \leq \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{2n-1} r_i = \frac{1}{3} \left((n-1)^2 - s_i - t_i \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{2n-1} \left((n-1)^2 - \left(\binom{n-1}{2} - \frac{n-2}{2} \right) - t_i \right) = \frac{1}{3} \left(2n \cdot \frac{n^2-2}{2} - \sum_{i=0}^{2n-1} t_i \right).$$

Нетрудно видеть, что для пары противоположных вершин v_i и v_{i+n} справедливо $t_i = t_{i+n}$. Это дает оценку

$$f_a(H) \leq \frac{1}{3} \left(2n \cdot \frac{n^2-2}{2} - 2 \sum_{i=0}^{n-1} t_i \right). \tag{16}$$

Пусть

$$\mathcal{I}_0 = \{ i \mid t_i = 0 \} \subseteq \{0, \ldots, n-1\}.$$

Теперь обозначим

$$\mathcal{M}(i) = \{ j \mid j \in \mathcal{I}_0 \text{ и } \{v_j, v_{j+n}\} \subseteq N^+(v_i) \cap N^-(v_{i+n}) \} \subseteq \{0, \ldots, n-1\},$$

а

$$\mathcal{I}_2 = \{ i \mid M(i) \neq \varnothing \} \subseteq \{0, \ldots, n-1\}.$$

Обозначив $\mathcal{I}_1 = \{0, \ldots, n-1\} \setminus (\mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_2)$, получаем разбиение

$$\mathcal{I}_0 \sqcup \mathcal{I}_1 \sqcup \mathcal{I}_2 = \{0, \ldots, n-1\}.$$

Можно заметить, что $t_j \geq 2|\mathcal{M}(j)|$ для всех j из $\mathcal{I}_2$, так как каждый индекс i из $\mathcal{M}(j)$ "даёт" две дуги из $N^+(j)$ в v_{j+n}. С другой стороны из Предложения 7 следует, что $\sum_{i \in \mathcal{I}_2} |\mathcal{M}(i)| \geq |\mathcal{I}_0|$. Отсюда получаем нижнюю оценку на $\sum_{i=0}^{n-1} t_i$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} t_i = \sum_{i \in \mathcal{I}_0} t_i + \sum_{i \in \mathcal{I}_1} t_i + \sum_{i \in \mathcal{I}_2} t_i = \sum_{i \in \mathcal{I}_1} t_i + \sum_{i \in \mathcal{I}_2} t_i \geq$$

$$\geq \sum_{i \in \mathcal{I}_1} t_i + 2 \sum_{i \in \mathcal{I}_2} |\mathcal{M}(i)| \geq |\mathcal{I}_0| + |\mathcal{I}_1| + |\mathcal{I}_2| = n. \tag{17}$$

Подставляя полученную оценку (17) в (16), имеем

$$f_a(H) \leq \frac{1}{3}\left(2n \cdot \frac{n^2-2}{2} - 2\sum_{i=0}^{n-1} t_i\right) \leq \frac{(n-2)n(n+2)}{3}.$$

□

Для эйлеровых ориентаций вида $C_{2n}(d_1, \ldots, d_{n-1}; t_1, \ldots, t_{n-1})$ введём обозначение

$$\Delta(C_{2n}(d_1, \ldots, d_{n-1}; t_1, \ldots, t_{n-1})) = |\{(i,j)|\ i<j,\ d_i + d_j = n,\ t_i \neq t_j\}|\,.$$

Предложение 8.

$$0 \leq \Delta(C_{2n}(1, \ldots, n-1; t_1, \ldots, t_{n-1})) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

и существуют наборы $t_1, \ldots, t_{n-1}$, на которых достигаются нижняя и верхняя оценки.

Лемма 4. *Пусть $T = C_{2n}(1, \ldots, n-1; t_1, \ldots, t_{n-1})$. Тогда*

$$f_a(T) = \begin{cases} 2\binom{n+1}{3} - 2n(\frac{n-1}{2} - \Delta(T)), & n \text{ — нечетно;} \\ 2\binom{n+1}{3} + n + 2n(\frac{n-2}{2} - \Delta(T)), & n \text{ — четно.} \end{cases}$$

Доказательство. Для каждого $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ соединим добавим в ориентацию T дугу из v_i в v_{i+n}. Получим турнир T', для которого

$$\deg_+ v_i = \begin{cases} n, i \in \{0, \ldots, n-1\}; \\ n-1, i \in \{n, \ldots, 2n-1\}. \end{cases}$$

По [1] имеем:

$$f_a(T) = \binom{2n}{3} - \sum_{i=0}^{2n-1} \binom{\deg_+ v_i}{2} = \binom{2n}{3} - n\binom{n}{3} - n\binom{n-1}{3} = 2\binom{n+1}{3}.$$

Каждая добавленная дуга может образовать в T' фрагмент a только с парой дуг, соединияющих вершины на расстояниях Ли равных j и $n-j$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Если $t_j \neq t_{n-j}$, то добавленная дуга (v_i, v_{i+n}) не образует фрагмент a с дугами длин j и $n-j$. Иначе, добавленная дуга образует ровно 2 фрагмента a с дугами этих длин (кроме случая когда для четного n и $j = n/2$ будет получаться один фрагмент a).

Таким образом, для нечетного n каждая добавленная дуга образует $2(\frac{n-1}{2} - \Delta(T))$ фрагментов a. Для четного n — образует $(1 + 2(\frac{n-1}{2} - \Delta(T)))$ фрагментов a. □

Из Лемм 1, 2, 3, 4 и Предложения 8 напрямую следует доказательство теоремы 6.

References

[1] Perezhogin A. L., Bykov I. S., Avgustinovich S. V., Small length circuits in Eulerian orientations of graphs, Siber. Electr. Math. Reports. 14 (2024) , 370-382.

[2] Kireeva T. E., *Perfect orientation colorings of cubic graphs*, Siber. Electr. Math. Reports. 15 (2018) , 1353-1360.

[3] Taranenko A. A., *Algebraic properties of perfect structures*. Linear Algebra Appl. 607 (2020), 286-306.

[4] Пяткин А. В., Черных О. И., *О максимальном числе открытых треугольников в графах с одинаковым числом вершин и рёбер.* Дискретный анализ и исследование операций, 29, 1, 46-55 (2022)

[5] Pyatkin A. V., *On the maximum number of open triangles in graphs with few edges*, J. Appl. Industr. Math., 18:3 (2024), 516–520.

Sergei Vladimirovich Avgustinovich
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: avgust@math.nsc.ru

Igor Sergeevich Bykov
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 1,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: igor.s.bykov@yandex.ru

Aleksei L'vovich Perezhogin
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: pereal@math.nsc.ru

Alena Sergeevna Krivonogova
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 1,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: a.krivonogova@g.nsu.ru