S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 517.9
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 74E05

О МОДЕЛИРОВАНИИ ЛОКАЛЬНОГО ДЕФЕКТА В ТОНКОМ ОТСЛОИВШЕМСЯ ЖЕСТКОМ ВКЛЮЧЕНИИ

Т.С. Попова

Представлено П.П. Петровым

Abstract: The paper is devoted to the study of the equilibrium problem for an elastic body containing a delaminated thin rigid inclusion with a local defect. The problem is considered in a domain with a cut, on the faces of which boundary conditions of the inequality type are specified. The statement uses a positive parameter characterizing the degree of damage of the inclusion at a point. The problem is formulated in the form of a variational inequality, from which a complete system of equations and inequalities is obtained, fulfilled in the domain with a cut, as well as on the crack line. Limit transitions are substantiated for the damage parameter and it is shown that the limiting cases correspond to problems of a thin rigid inclusion with a break, as well as a problem with a solid rigid inclusion without defects.

Keywords: variational inequality, damage parameter, thin inclusion, rigid inclusion, crack, non-penetration conditions, nonlinear boundary conditions, junction problem.

Popova, T.S., Problem of thin rigid inclusion with damage.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №25-21-20128), https://rscf.ru/project/25-21-20128/.

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

1 Введение

Исследование в области математического моделирования композитных материалов приобретает все большую актуальность в связи с расширением областей их применения. Одним из важных для приложений и интересным с точки зрения науки направлений является моделирование напряженно-деформированного состояния материалов, содержащих тонкие включения с различными дефектами. В то же время, построение адекватной модели требует предварительного теоретического анализа и корректной математической постановки. Данная работа посвящена изучению плоской задачи о равновесии упругого тела с отслоившимся тонким жестким включением. Постановка предполагает наличие положительного параметра, характеризующего локальное повреждение включения. Величина параметра соответствует степени поврежденности материала включения в точке.

Модель тонкого жесткого включения в упругом теле формулируется с использованием условия на структуру вектора-функции перемещений точек включения. Подобные модели рассматривались ранее, например, можно найти ряд результатов в [1, 2, 3, 4]. Аналогичные модели отслоившихся тонких жестких включений для неупругих случаев включающей матрицы изучались в [5], в работе [6] исследовались модели объемных жестких включений с отслаиванием. В статье [7] обсуждаются асимптотические модели тонких включений, которые позволяют получать их различные типы, включая упругие и жесткие включения, а также трещины и редуцированные (исчезающие) включения.

Отслоение тонкого включения предполагает образование трещины, на одном из берегов которой прикреплено данное включение. Поэтому задача формулируется в области с разрезом. При этом на берегах разреза, как на части границы области, задаются краевые условия типа неравенств (так называемые условия непроникания берегов трещины). Односторонний характер этих условий приводит к необходимости применения неклассических методов исследования поставленных задач. За последние десятилетия разработаны методы вариационных неравенств, применяемые для такого рода задач, с общими подходами в данных методах можно ознакомиться в монографиях [8, 9, 10]. Отметим также обзор работ по теме, приведенный в [11]

В применении к задачам о жестких включениях с помощью методов вариационных неравенств получен обширный ряд результатов, помимо упомянутых выше работ. В частности, в работах [12, 13, 14, 15] изучались задачи о сопряжении тонких жестких включений с другими типами включений в концевых и внутренних точках. При постановке задач сопряжения в [13, 15] вводится параметр повреждаемости в точке сопряжения. Задача о тонком упругом включении с параметром, характеризующим локальное повреждение, изучалась в [16]. Известны также другие подходы к рассмотрению степени поврежденности тонких включений, например модели с нелокальными параметрами поврежденности [17, 18]

В настоящей работе исследуется задача для тонкого отслоившегося жесткого включения, имеющего локальное повреждение. Соответствующий параметр, значение которого считается известным, вводится в постановке задачи о минимизации функционала энергии на множестве допустимых перемещений. Задача эквивалентна вариационному неравенству. Основной целью работы является получение полной системы уравнений и неравенств, выполняющихся в области с разрезом, на берегах трещины, а также в точке дефекта. Все полученные соотношения имеют ясную физическую интерпретацию. Проведено сравнение с ранее известными моделями тонких включений и различными случаями их сопряжения. Далее рассматривается семейство задач для различных значений параметра повреждаемости. Исследованы предельные переходы при стремлении параметра к нулю и бесконечности и проанализированы предельные задачи.

Полученные результаты также сравнивались с известными другими моделями для поврежденных балок и тонких жестких включений [19, 20, 21, 22, 23, 24], а также моделями различных соединений шарнирного типа между стержневыми и балочными конструкциями [25, 26].

2 Постановка задачи

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset R^2$ с липшицевой границей Γ, при этом будем считать, что граница состоит из двух частей: $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$, где $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. Единичный вектор нормали к Γ обозначим через n. В области Ω рассмотрим гладкую кривую γ, для которой $\bar{\gamma} \subset \Omega$. Пусть точка $O = (0,0)$ является внутренней для этой кривой и делит ее на две части: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{(0,0)\}$. Единичные векторы нормали и касательной к γ обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ и $\tau = (\nu_2, -\nu_1)$. Введем обозначение для области с разрезом: $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$.

Область Ω_γ заполнена упругим материалом, линия γ соответствует тонкому жесткому включению. Тело жестко закреплено по краю вдоль кривой Γ_D и испытывает внешние нагрузки на Γ_N.

Считаем также, что область Ω_γ с помощью продолжения кривой γ до внешней границы Γ может быть разбита на подобласти Ω^+ и Ω^- с липшицевыми границами таким образом, чтобы выполнялись условия $\mathrm{meas}(\partial\Omega^\pm \cap \Gamma_D) > 0$.

Будем считать, что включение γ отслаивается от упругой матрицы с образованием трещины таким образом, что отслоение происходит от верхнего берега трещины, а к нижнему берегу включение остается прикрепленным. Таким образом, форма трещины также задана линией γ. При этом разрез, соответствующий трещине, имеет два берега γ^+ и γ^-, где $\gamma^{\pm} \subset \partial\Omega^{\pm}$. Направление нормали ν выбрано таким образом, что $\nu = \nu^{-} = -\nu^{+}$, где $\nu^{\pm}$ - внешние нормали к $\partial\Omega^{\pm}$ соответственно.

Пусть вектор-функция $u = (u_1, u_2)$ задает перемещения точек тела Ω_γ, при этом u_i соответствует перемещениям вдоль оси x_i, $i = 1, 2$. Для компонент тензора деформаций и тензора напряжений тела введем следующие формулы:

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \; i, j = 1, 2, \quad \sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2,$$

где $\xi_{,j} = \frac{\partial \xi}{\partial x_j}$. Коэффициенты $a_{ijkl} = a_{ijkl}(x)$, $i, j, k, l = 1, 2$ - компоненты тензора модулей упругости A, удовлетворяющие условиям

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij},$$

$$a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq c_0|\xi|^2, \;\; \forall \xi_{ij} = \xi_{ji},$$

где c_0 - положительная постоянная. Всюду в тексте по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Жесткое включение моделируется следующим образом. Введем в рассмотрение пространство жестких инфинитезимальных перемещений следующего вида:

$$R(\gamma_\alpha) = \{\rho^{(\alpha)} = (\rho_1^{(\alpha)}, \rho_2^{(\alpha)}) \,|\, \rho^{(\alpha)}(x) = (-a^{(\alpha)}x_2 + b,\, a^{(\alpha)}x_1 + d) \text{ на } \gamma_\alpha, \\ a^{(\alpha)}, b, d \in \mathbb{R}\}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Таким образом, для перемещений жесткого включения предполагается возможным только перемещения типа переноса и поворота. Отметим, что в точке O углы поворота, характеризуемые коэффициентами $a^{(\alpha)}$, могут быть различными, в то время как из условия $\rho^{(1)}(0) = \rho^{(2)}(0)$ следует, что свободные члены b и d, характеризующие перенос, совпадают для γ_1 и γ_2. Точку O можно рассматривать как точку сопряжения для γ_1 и γ_2 и таким образом, данную задачу можно отнести к классу задач сопряжения.

Поскольку включение γ отслаивается от упругой матрицы с образованием трещины, то перемещения точек на противоположных берегах разреза γ могут не совпадать. Для значений некоторой функции ξ на берегах γ^+ и γ^- введем обозначения с верхним индексом: ξ^+ и ξ^-, также введем обозначение для скачка функции на берегах разреза: $[\xi] = \xi^+ - \xi^-$. Включение отслаивается от берега γ^+ и прикреплено к берегу γ^-, поэтому на γ^- задаются условия склейки перемещений точек тела и включения:

$$u^- = \rho^{(\alpha)} \text{ на } \gamma_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

Приведем вариационную формулировку рассматриваемой задачи. Введем обозначения

$$H^1_{\Gamma_D}(\Omega_\gamma)^2 = \{u \in H^1(\Omega_\gamma)^2 \,|\, u = 0 \text{ на } \Gamma_D\},$$

и рассмотрим множество допустимых перемещений вида

$$K = \{u \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega_\gamma)^2 \,|\, [u]\nu \geq 0 \text{ на } \gamma;\ u^- = \rho^{(\alpha)} \text{ на } \gamma_\alpha,\ \rho^{(\alpha)} \in R(\gamma_\alpha), \quad \alpha = 1, 2\}.$$

Неравенство $[u]\nu \geq 0$ задано на части границы области Ω_γ, а именно на берегах разреза γ. Данное ограничение исключает взаимное проникание точек противоположных берегов трещины друг в друга и носит название условия непроникания [8]. Ввиду наличия данного условия множество K не является линейным подпространством пространства $H^1_{\Gamma_D}(\Omega_\gamma)^2$ и задача не является нелинейной. Задачу равновесия двумерного упругого тела с отслоившимся тонким жестким включением, имеющим повреждение, можно сформулировать как задачу минимизации на множестве K функционала энергии

$$\Pi_\delta(u) = \frac{1}{2}B(u,u) - L(u) + \frac{1}{2\delta}(\rho^{(2)}_{2,1}(0) - \rho^{(1)}_{2,1}(0))^2 = \\ = \frac{1}{2}B(u,u) - L(u) + \frac{1}{2\delta}(a^{(2)} - a^{(1)})^2,$$

где

$$B(u,v) = \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(v)\,ds, \quad L(u) = \int\limits_{\Omega_\gamma} fu\,dx - \int\limits_{\Gamma_N} gu\,ds.$$

Здесь принято обозначение $\sigma(u)\varepsilon(v) = \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)$, $fu = f_i u_i$, $gu = g_i u_i$, $i, j = 1, 2$; через $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2)$ обозначены функции внешних нагрузок, действующих в Ω_γ и на Γ_N соответственно. Первое слагаемое функционала Π_δ с квадратичной формой $B(u,u)$ описывает энергию деформирования упругого тела, второе слагаемое выражает работу внешних сил. Через δ обозначен положительный параметр, который считается заданным и характеризует степень поврежденности материала включения в точке O. Форму последнего слагаемого функционала потенциальной энергии Π_δ можно сравнить с известными в механике формулами, описывающими шарнирное соединение стержневых конструкций, см. напр. [25].

Поскольку наличие условий непроникания приводит к нелинейности рассматриваемой задачи, то классические подходы к ее исследованию не применимы. Изучение задач о трещинах с аналогичными граничными условиями предполагает применение метода вариационных неравенств, который подробно изложен в монографиях [8, 9, 10]. Применение данных методов к задачам об отслоившихся включениях изучались во многих работах, некоторые примеры можно найти в статьях [1, 2, 3, 27].

Таким образом, вариационная формулировка состоит в следующем: найти элемент $u \in K$, доставляющий минимум функционалу Π_δ на множестве K:

$$\Pi_\delta(u) = \inf_{\bar{u} \in K} \Pi_\delta(\bar{u}). \tag{1}$$

Следуя [27], можно доказать, что для заданных $f \in L^2(\Omega_\gamma)^2$, $g \in L^2(\Gamma_N)^2$, $a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j, k, l = 1, 2$, задача (1) имеет единственное решение, удовлетворяющее вариационному неравенству

$$u \in K, \quad B(u, \bar{u} - u) - L(\overline{u} - u) + \\ + \frac{1}{\delta}(a^{(2)} - a^{(1)})(\overline{a}^{(2)} - \overline{a}^{(1)} - a^{(2)} + a^{(1)}) \geq 0, \quad \forall \bar{u} \in K. \quad (2)$$

3 Эквивалентная дифференциальная постановка

Целью дальнейших рассуждений является получение дифференциальной формулировки рассматриваемой задачи равновесия и доказательство ее эквивалентности вариационному неравенству. Для этого будем предполагать достаточную гладкость решений задачи.

Пусть имеет место вариационное неравенство (2). Перепишем его в виде

$$u \in K, \quad \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\overline{u} - u)\, ds - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\overline{u} - u)\, dx - \int\limits_{\Gamma_N} g(\overline{u} - u)\, ds + \\ + \frac{1}{\delta}(a^{(2)} - a^{(1)})(\overline{a}^{(2)} - \overline{a}^{(1)} - a^{(2)} + a^{(1)}) \geq 0, \quad \forall \bar{u} \in K. \quad (3)$$

Выбирая произвольную функцию $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^2$ и подставляя в (3) пробный элемент вида $\overline{u} = u \pm \theta \in K$, можно получить в области с разрезом уравнение равновесия

$$-div\, \sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma.$$

Возьмем теперь элемент $\widetilde{u} \in K$, который удовлетворяет условиям:

$$\widetilde{u}^- = \widetilde{u}^+ = \widetilde{\rho}^{(\alpha)} = (-\widetilde{a}^{(\alpha)}x_2 + \widetilde{b}, \widetilde{a}^{(\alpha)}x_1 + \widetilde{d}) \quad \text{на } \gamma_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

Таким образом, $[\widetilde{u}] = 0$ на γ и элементы вида $\overline{u} = u \pm \widetilde{u} \in K$ можно подставлять в (3) последовательно в качестве пробных функций. В результате придем к выводу, что имеет место равенство

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\widetilde{u})\, dx - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\widetilde{u}\, dx - \int\limits_{\Gamma_N} g\widetilde{u}\, ds + \frac{1}{\delta}(a^{(2)} - a^{(1)})(\widetilde{a}^{(2)} - \widetilde{a}^{(1)}) = 0.$$

Интегрируя данное равенство по частям, с учетом краевого условия на Γ_D, получим

$$-\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij,j}(u)\widetilde{u}_i\,dx - \int\limits_{\Omega_\gamma} f_i\widetilde{u}_i\,dx - \int\limits_{\Gamma_N} g_i\widetilde{u}_i\,ds + \int\limits_{\Gamma_N} \sigma_{ij}(u)n_j\widetilde{u}_i\,ds+$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\Big\{\int\limits_{\gamma_\alpha^+}\sigma_{ij}(u)\nu_j^+\widetilde{u}_i\,ds + \int\limits_{\gamma_\alpha^-}\sigma_{ij}(u)\nu_j^-\widetilde{u}_i\,ds\Big\}+$$
$$+\frac{1}{\delta}(a^{(2)}-a^{(1)})(\widetilde{a}^{(2)}-\widetilde{a}^{(1)})=0. \quad (4)$$

С учетом полученного выше уравнения равновесия и произвольности $\widetilde{u}$, отсюда можем получить граничное условие

$$\sigma(u)n = g \quad \text{на} \quad \Gamma_N,$$

где $\sigma n = (\sigma_{1j}n_j, \sigma_{2j}n_j)$, $j=1,2$. Тогда из (4) следует

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_{\gamma_\alpha}[\sigma_{ij}(u)\nu_j]\widetilde{u}_i\,ds = \frac{1}{\delta}(a^{(2)}-a^{(1)})(\widetilde{a}^{(2)}-\widetilde{a}^{(1)}). \quad (5)$$

Введем представление вида $\sigma_{ij}(u)\nu_j = (\sigma_1(u),\sigma_2(u))$ для вектор-функции поверхностных сил, где через σ_1, σ_2 обозначены первая и вторая компоненты вектора $\sigma_{ij}\nu_j$ соответственно. Отметим, что ввиду криволинейности γ, компоненты σ_1 и σ_2 могут не совпадать с касательной σ_τ и нормальной σ_ν составляющими данного вектора на γ. Также будем использовать представления $\rho^{(\alpha)}(x) = (-a^{(\alpha)}x_2+b,\, a^{(\alpha)}x_1+d)$ и $\widetilde{\rho}^{(\alpha)}(x) = (-\widetilde{a}^{(\alpha)}x_2+\widetilde{b},\, \widetilde{a}^{(\alpha)}x_1+\widetilde{d})$ для векторов жестких перемещений. В этих обозначениях (5) может быть переписано в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_{\gamma_\alpha}\big([\sigma_1(u)](-\widetilde{a}^{(\alpha)}x_2+\widetilde{b}) + [\sigma_2(u)](\widetilde{a}^{(\alpha)}x_1+\widetilde{d})\big)\,ds =$$
$$= \frac{1}{\delta}(a^{(2)}-a^{(1)})(\widetilde{a}^{(2)}-\widetilde{a}^{(1)}). \quad (6)$$

Предположим, что $\widetilde{u}$ выбрано таким, что $\widetilde{b}=\widetilde{d}=0$. Тогда из (6) получим

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_{\gamma_\alpha}\big(-[\sigma_1(u)]\widetilde{a}^{(\alpha)}x_2 + [\sigma_2(u)]\widetilde{a}^{(\alpha)}x_1\big)\,ds =$$
$$= \frac{1}{\delta}(a^{(2)}-a^{(1)})(\widetilde{a}^{(2)}-\widetilde{a}^{(1)}).$$

Отсюда при $\widetilde{a}^{(2)}=0$ будем иметь

$$\int\limits_{\gamma_1}\big([\sigma_2(u)]x_1 - [\sigma_1(u)]x_2\big)\,ds = -\frac{1}{\delta}(a^{(2)}-a^{(1)}) = 0, \quad (7)$$

а при $\widetilde{a}^{(1)} = 0$ получим

$$\int\limits_{\gamma_2} \big([\sigma_2(u)]x_1 - [\sigma_1(u)]x_2\big)\, ds = \frac{1}{\delta}(a^{(2)} - a^{(1)}) = 0. \tag{8}$$

Вернемся к (6). С учетом условий (7) и (8), будем иметь

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \int\limits_{\gamma_\alpha} \big([\sigma_1(u)]\widetilde{b} + [\sigma_2(u)]\widetilde{d}\big)\, ds = 0.$$

Из произвольности $\widetilde{b}$ и $\widetilde{d}$ следует, что имеют место условия вида

$$\int\limits_{\gamma} [\sigma_1(u)]\, ds = 0, \quad \int\limits_{\gamma} [\sigma_2(u)]\, ds = 0.$$

Кроме того, ввиду наличия трещины, на берегах γ выполнена система краевых условий следующего вида:

$$[u]\nu \geq 0,\ \sigma_\nu^+(u) \leq 0,\ \sigma_\tau^+(u) = 0,\ \sigma_\nu^+(u)[u]\nu = 0 \quad \text{на } \gamma.$$

Данные условия описывают возможный контакт берегов трещины, включая условие их взаимного непроникания (первое из представленных соотношений). Эти условия могут быть получены стандартным путем, изложенным при доказательстве аналогичных теорем для задач об отслоившемся жестком включении [27].

Таким образом, дифференциальная формулировка задачи равновесия состоит в следующем. Для заданных в Ω_γ и на Γ_N функций внешних нагрузок $f = (f_1, f_2)$ и $g = (g_1, g_2)$ найти в Ω_γ поле перемещений $u = (u_1, u_2)$ точек тела и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}(u)\}$, $i, j = 1, 2$, кроме того на γ_α найти элементы $\rho^{(\alpha)} \in R(\gamma_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$, такие, что выполнена следующая система уравнений и граничных условий:

$$-div\, \sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{9}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_D, \quad \sigma n = g \quad \text{на } \Gamma_N, \tag{10}$$

$$u^- = \rho^{(\alpha)} \text{ на } \gamma_\alpha, \quad \rho^{(\alpha)} \in R(\gamma_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, \tag{11}$$

$$\int\limits_{\gamma_\alpha} \big([\sigma_2]x_1 - [\sigma_1]x_2\big)\, ds = \frac{(-1)^\alpha}{\delta}(a^{(2)} - a^{(1)}), \quad a^{(\alpha)} = \rho^{(\alpha)}_{2,1}(0), \quad \alpha = 1, 2, \tag{12}$$

$$\int\limits_{\gamma} [\sigma_1]\, ds = 0, \quad \int\limits_{\gamma} [\sigma_2]\, ds = 0; \tag{13}$$

$$[u]\nu \geq 0,\ \sigma_\nu^+ \leq 0,\ \sigma_\tau^+ = 0,\ \sigma_\nu^+[u]\nu = 0 \quad \text{на } \gamma. \tag{14}$$

Полученная система включает уравнения равновесия упругого тела (9), выполненные в области с разрезом Ω_γ, а также краевые условия на внешней границе (10), описывающие закрепление на Γ_D и воздействие внешних нагрузок на Γ_N. Согласно условию (11), на γ_α^- функция u совпадает с некоторым элементом $\rho^{(\alpha)}$ пространства $R(\gamma_\alpha)$, то есть этот элемент является одним из неизвестных задачи. Таким образом, кроме перемещений u в области необходимо также найти неизвестные постоянные $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, b и d. Соотношения (12) и (13) являются условиями равновесия тонкого жесткого включения с дефектом, они выражают равенство нулю главного вектора сил и главного вектора моментов для γ.

Можно сравнить полученную систему уравнений и краевых условий с аналогичными условиями, выведенными для других моделей тонких включений и других видов их сопряжения.

Например, в работах [12, 14, 28] получена система для случаев сопряжения без учета повреждаемости для различных моделей тонких включений: тонкое жесткое, упругое включение Тимошенко, а также тонкое полужесткое включение. В условиях идеального сцепления угол между включениями в исходном недеформированном состоянии упругого тела является фиксированным, следовательно, после деформирования углы поворота совпадают. Поэтому в условии на моменты для каждого из включений, аналогичном условию (12), в этом случае в правой части стоит нуль, т.е. оно не содержит разности углов. Этот тип сопряжения для рассматриваемой в настоящей работе задачи соответствует предельному случаю при стремлении параметра повреждаемости к нулю. В случае полного излома между включениями в приведенных для сравнения в этом абзаце работах моменты для обоих включений совпадают. Это будет соответствовать предельному случаю при $\delta \to \infty$. Оба предельных перехода будут рассмотрены в следующем разделе.

Для задачи с параметром повреждаемости при сопряжении включения Тимошенко и тонкого жесткого включения в [13] получена система, которая включает условия на моменты, выписанные как и в (12), отдельно для каждого включения и содержащие параметр повреждаемости в качестве коэффициента пропорциональности при разности углов поворота. В [16] изучался случай тонкого упругого включения типа Бернулли-Эйлера с повреждением. Для этой задачи, аналогично (12), в точке сопряжения выписано условие на моменты, соответствующее рассматриваемой модели упругого включения, при этом моменты также пропорциональны разности углов.

Покажем, что из системы (9)-(14) можно обратно получить вариационное неравенство (2). Возьмем $\overline{u} \in K$, умножим уравнение (9) на $\overline{u} - u$, и проинтегрируем полученное равенство по Ω_γ. В результате получим уравнение

$$-\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij,j}(u)(\overline{u}_i - u_i)\,dx = \int\limits_{\Omega_\gamma} f_i(\overline{u}_i - u_i)\,dx.$$

Применяя интегрирование по частям и учитывая условия (10), можем привести это уравнение к виду

$$B(u, \overline{u} - u) - L(\overline{u} - u) + \int\limits_{\gamma} [\sigma_{ij}(u)\nu_j \cdot (\overline{u}_i - u_i)]\, ds = 0. \tag{15}$$

Перепишем (15) в виде

$$B(u, \overline{u} - u) - L(\overline{u} - u) + I + J = 0, \tag{16}$$

где

$$I = \int\limits_{\gamma} (\sigma_{ij}(u)\nu_j)^{+}(\overline{u}_i - u_i)^{+}\, ds - \int\limits_{\gamma} (\sigma_{ij}(u)\nu_j)^{+}(\overline{u}_i - u_i)^{-}\, ds,$$

$$J = \int\limits_{\gamma} (\sigma_{ij}(u)\nu_j)^{+}(\overline{u}_i - u_i)^{-}\, ds - \int\limits_{\gamma} (\sigma_{ij}(u)\nu_j)^{-}(\overline{u}_i - u_i)^{-}\, ds.$$

Преобразуем I, принимая во внимание условия (14):

$$I = \int\limits_{\gamma} (\sigma_{ij}(u)\nu_j)^{+}[\overline{u}_i - u_i]\, ds = \int\limits_{\gamma} \sigma_{\nu}^{+}(u)[\overline{u}_{\nu} - u_{\nu}]\, ds =$$
$$= \int\limits_{\gamma} \sigma_{\nu}^{+}(u)[\overline{u}_{\nu}]\, ds - \int\limits_{\gamma} \sigma_{\nu}^{+}(u)[u_{\nu}]\, ds = \int\limits_{\gamma} \sigma_{\nu}^{+}(u)[\overline{u}_{\nu}]\, ds.$$

Далее вычислим, принимая во внимание условия (11), (13)

$$J = \int\limits_{\gamma} [\sigma_{ij}(u)\nu_j](\overline{u}_i - u_i)^{-}\, ds = \sum_{\alpha=1}^{2} \int\limits_{\gamma_\alpha} \big([\sigma_1](\overline{\rho}_1^{(\alpha)} - \rho_1^{(\alpha)}) + [\sigma_2](\overline{\rho}_2^{(\alpha)} - \rho_2^{(\alpha)})\big)\, ds =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{2} \int\limits_{\gamma_\alpha} \big([\sigma_1]x_2 - [\sigma_2]x_1\big)(a^{(\alpha)} - \overline{a}^{(\alpha)})\, ds.$$

Применяя здесь условия (12), можем получить

$$J = \frac{1}{\delta}(a^{(2)} - a^{(1)})(\overline{a}^{(2)} - \overline{a}^{(1)} - a^{(2)} + a^{(1)}).$$

Следовательно, соотношение (16) перепишется в виде

$$B(u, \overline{u} - u) - L(\overline{u} - u) + \frac{1}{\delta}(a^{(2)} - a^{(1)})(\overline{a}^{(2)} - \overline{a}^{(1)} - a^{(2)} + a^{(1)}) =$$
$$= -\int\limits_{\gamma} \sigma_{\nu}^{+}(u)[\overline{u}_{\nu}]\, ds. \tag{17}$$

Из второго условия в (13), а также свойств элементов множества K, следует неотрицательность правой части (17), что означает справедливость вариационного неравенства (2).

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Задача (9)-(14) эквивалентна вариационному неравенству (2) при условии достаточной гладкости решений.*

4 Предельные задачи

При каждом фиксированном значении параметра δ задача (2) имеет единственное решение. Тогда мы можем сформулировать семейство задач с данным параметром. Формулировка имеет вид вариационных неравенств, где нижний индекс δ обозначает, что решение соответствует данному значению параметра:

$$u_\delta \in K, \quad B(u_\delta, \bar{u} - u_\delta) - L(\overline{u} - u_\delta) + \\ + \frac{1}{\delta}(a_\delta^{(2)} - a_\delta^{(1)})(\overline{a}^{(2)} - \overline{a}^{(1)} - a_\delta^{(2)} + a_\delta^{(1)}) \geq 0, \quad \forall \bar{u} \in K. \quad (18)$$

Здесь использованы обозначения:

$$u_\delta^-(x) = \rho_\delta^{(\alpha)}(x) = (-a_\delta^{(\alpha)} x_2 + b_\delta, a_\delta^{(\alpha)} x_1 + d_\delta) \text{ на } \gamma_\alpha,$$
$$\overline{u}^-(x) = \overline{\rho}^{(\alpha)}(x) = (-\overline{a}^{(\alpha)} x_2 + \overline{b}, \overline{a}^{(\alpha)} x_1 + \overline{d}) \text{ на } \gamma_\alpha.$$

Будем рассматривать предельный переход по параметру δ и проанализируем получаемые при этом предельные задачи.

Последовательно подставим в (18) пробные функции вида $\overline{u} = 0$ и $\overline{u} = 2u_\delta$. Сравнивая полученные неравенства, придем к выводу, что выполнено соотношение

$$B(u_\delta, u_\delta) - L(u_\delta) + \frac{1}{\delta}(a_\delta^{(2)} - a_\delta^{(1)})^2 = 0. \quad (19)$$

Вначале рассмотрим первый предельный случай при $\delta \to \infty$, который соответствует бесконечному возрастанию поврежденности в точке O.

Благодаря неравенству Корна, из (19) можем получить равномерную по δ оценку вида

$$\|u_\delta\|_{H^1_{\Gamma_D}(\Omega_\gamma)^2} \leq c_1.$$

Отсюда следует, что при $\delta \to \infty$ имеет место сходимость

$$u_\delta \;\to\; u_\infty \text{ слабо в } H^1_{\Gamma_D}(\Omega_\gamma)^2, \quad u_\infty^- = \rho_\infty^{(\alpha)} \text{ на } \gamma_\alpha,\ \rho_\infty^{(\alpha)} \in R(\gamma_\alpha), \quad (20)$$

где

$$\rho_\infty^{(\alpha)}(x) = (-a_\infty^{(\alpha)} x_2 + b_\infty, a_\infty^{(\alpha)} x_1 + d_\infty), \quad \alpha = 1, 2.$$

Учитывая ограниченность $a_\delta^{(1)}$, $a_\delta^{(2)}$ и сходимость (20), можно осуществить предельный переход в (18) при $\delta \to \infty$. Предельная задача сформулируется в форме вариационного неравенства вида

$$u_\infty \in K, \quad B(u_\infty, \bar{u} - u_\infty) - L(\overline{u} - u_\infty) \geq 0, \quad \forall \bar{u} \in K. \quad (21)$$

Задача (21) допускает дифференциальную постановку, в которой нижний индекс "∞"для простоты опускается. А именно, для заданных в Ω_γ и на Γ_N функций внешних нагрузок $f = (f_1, f_2)$ и $g = (g_1, g_2)$ найти в Ω_γ поле перемещений $u = (u_1, u_2)$ точек тела и тензор напряжений

$\sigma = \{\sigma_{ij}(u)\}$, $i, j = 1, 2$, кроме того на γ_α найти элементы $\rho^{(\alpha)} \in R(\gamma_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$, такие, что выполнена следующая система уравнений и граничных условий:

$$-div\, \sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{22}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_D, \quad \sigma n = g \quad \text{на } \Gamma_N, \tag{23}$$

$$u^- = \rho^{(\alpha)} \text{ на } \gamma_\alpha, \quad \rho^{(\alpha)} \in R(\gamma_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, \tag{24}$$

$$\int\limits_{\gamma_\alpha} \big([\sigma_2]x_1 - [\sigma_1]x_2\big)\, ds = 0, \quad \alpha = 1, 2, \tag{25}$$

$$\int\limits_{\gamma} [\sigma_1]\, ds = 0, \quad \int\limits_{\gamma} [\sigma_2]\, ds = 0; \tag{26}$$

$$[u]\nu \geq 0, \ \sigma_\nu^+ \leq 0, \ \sigma_\tau^+ = 0, \ \sigma_\nu^+[u]\nu = 0 \quad \text{на } \gamma. \tag{27}$$

Данная система может быть получена аналогично методу, изложенному в предыдущем разделе. Задача (22)-(27) соответствует случаю полного излома между γ_1 и γ_2, т.е. здесь имеется два отдельных тонких жестких включения. Как видно из соотношений (25), моменты для каждой из частей γ_1 и γ_2 равны нулю.

Теперь рассмотрим предельный переход при $\delta \to 0$. Для этого из (19) получим равномерные по δ оценки вида

$$\|u_\delta\|_{H^1_{\Gamma_D}(\Omega_\gamma)^2} \leq c_1, \quad (a_\delta^{(2)} - a_\delta^{(1)})^2 \leq c_2\delta.$$

Отсюда следует, что при $\delta \to 0$ выполняется

$$u_\delta \ \to \ u_0 \text{ слабо в } H^1_{\Gamma_D}(\Omega_\gamma)^2, \tag{28}$$

$$u_0^- = \rho_0^{(\alpha)} \text{ на } \gamma_\alpha, \ \rho_0^{(\alpha)} \in R(\gamma_\alpha), \tag{29}$$

$$\rho_0^{(\alpha)}(x) = (-a_0^{(\alpha)}x_2 + b_0, \, a_0^{(\alpha)}x_1 + d_0), \quad \alpha = 1, 2, \quad a_0^{(1)} = a_0^{(2)} = a_0. \tag{30}$$

Введем множество

$$K_0 = \{u \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega_\gamma)^2 \,|\, [u]\nu \geq 0 \text{ на } \gamma; \ u^- = \rho_0 \text{ на } \gamma, \ \rho_0 \in R(\gamma)\},$$

где

$$R(\gamma) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \,|\, \rho(x) = (-ax_2 + b, ax_1 + d) \text{ на } \gamma, \ a, b, d \in \mathbb{R}\}.$$

Возьмем произвольный элемент $\bar{u} \in K_0$, для которого $\bar{u}^- = \bar{\rho} \in R(\gamma)$ на γ, где $\bar{\rho}(x) = (-\bar{a}x_2 + \bar{b}, \, \bar{a}x_1 + \bar{d})$. Заметим, что выбранный элемент $\bar{u}$ является элементом множества K, где $\bar{a}^{(1)} = \bar{a}^{(2)} = \bar{a}$ и его можно подставлять в (18) в качестве пробного. Тогда будем иметь неравенство

$$B(u_\delta, \bar{u} - u_\delta) - L(\overline{u} - u_\delta) - \frac{1}{\delta}(a_\delta^{(2)} - a_\delta^{(1)})^2 \geq 0.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве, получим с учетом (28)-(30)

$$u_0 \in K_0, \quad B(u_0, \bar{u} - u_0) - L(\overline{u} - u_0) \geq 0, \quad \forall \bar{u} \in K_0. \tag{31}$$

Задача вида (31) соответствует случаю идеального сцепления между γ_1 и γ_2, т.е. цельного отслоившегося тонкого жесткого включения без дефектов и изломов. Подобная задача с условиями жесткого закрепления по всей внешней границе упругого тела изучалась в [27]. Для сравнения приведем соответствующую дифференциальную постановку, опустив для простоты нижний индекс "0".

Для заданных в Ω_γ и на Γ_N функций внешних нагрузок $f = (f_1, f_2)$ и $g = (g_1, g_2)$ найти в Ω_γ поле перемещений $u = (u_1, u_2)$ точек тела и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}(u)\}$, $i, j = 1, 2$, кроме того на γ найти элемент $\rho \in R(\gamma)$, такие, что выполнена следующая система уравнений и граничных условий:

$$-div\,\sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{32}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_D, \quad \sigma n = g \quad \text{на } \Gamma_N, \tag{33}$$

$$u^- = \rho \text{ на } \gamma, \quad \rho \in R(\gamma), \tag{34}$$

$$\int\limits_\gamma \big([\sigma_2]x_1 - [\sigma_1]x_2\big)\, ds = 0, \tag{35}$$

$$\int\limits_\gamma [\sigma_1]\, ds = 0, \quad \int\limits_\gamma [\sigma_2]\, ds = 0, \tag{36}$$

$$[u]\nu \geq 0, \ \sigma_\nu^+ \leq 0, \ \sigma_\tau^+ = 0, \ \sigma_\nu^+[u]\nu = 0 \quad \text{на } \gamma. \tag{37}$$

Из условий (34)-(36) следует, что условие равновесия формулируется на всем γ, поскольку жесткое включение является цельным.

Таким образом, задачи с параметром повреждаемости в некоторой внутренней точке включения составляют полную систему задач об отслоившемся тонком жестком включении в том смысле, что предельные случаи соответствуют случаям полного излома в точке дефекта и полному отсутствию повреждения.

References

[1] T. Popova, G.A. Rogerson, *On the problem of a thin rigid inclusion embedded in a Maxwell material*, Z. Angew. Math. Phys., **67** (2016), 105.

[2] E. M. Rudoy, *Numerical solution of an equilibrium problem for an elastic body with a thin delaminated rigid inclusion*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **10**:2 (2016), 264–276.

[3] A.M. Khludnev, G. Leugering, *On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks*, Math. Methods Appl. Sci., **33**:16 (2010), 1955–1967.

[4] A.I. Furtsev, E.M. Rudoy, S.A. Sazhenkov, *On hyperelastic solid with thin rigid inclusion and crack subjected to global injectivity condition*, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, **382**:2277 (2024), 1–16.

[5] T.S. Popova, *Equilibrium problem for a viscoelastic body with a thin rigid inclusion*, Mathematical notes of NEFU, **21**:1 (2014), 47–55.

[6] N.P. Lazarev, T.S. Popova, G.A. Rogerson, *Optimal control of the radius of a rigid circular inclusion in inhomogeneous two-dimensional bodies with cracks*, Z. Angew. Math. Phys., **69** (2018), 53.

[7] E.M. Rudoy, H. Itou, N.P. Lazarev, *Asymptotic Justification of the Models of Thin Inclusions in an Elastic Body in the Antiplane Shear Problem*, J. Appl. Ind. Math., **15** (2021), 129—140.

[8] A.M. Khludnev, *Elasticity Problems in Non-Smooth Domains*, Fizmatlit, Moscow, 2010.

[9] J.-L. Lions, *Some methods of solving non-linear boundary value problems*, Dunod, Paris, 1969.

[10] A.M. Khludnev, V.A. Kovtunenko, *Analysis of Cracks in Solids*, WIT Press, Southampton, Boston, 2000.

[11] V.A. Kovtunenko, H. Itou, A.M. Khludnev, E.M. Rudoy, *Non-smooth variational problems and applications in mechanics*, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, **382**:2275 (2024), 20230310.

[12] A.M. Khludnev, L. Faella, T.S. Popova, *Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies*, Mathematics and Mechanics of Solids, **22**:4 (2017), 737–750.

[13] A.M. Khludnev, T.S. Popova,*On junction problem with damage parameter for Timoshenko and rigid inclusions inside elastic body*, Z. Angew. Math. Mech., **100**:8 (2020), 100:e202000063.

[14] A.M. Khludnev , T.S. Popova, *Junction problem for rigid and semi-rigid inclusions in elastic bodies*, Arch. Appl. Mech., **86** (2016), 1565–1577.

[15] A.M. Khludnev, *T-shape inclusion in elastic body with a damage parameter*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **393** (2021), 113540.

[16] A.M. Khludnev, *On modeling thin inclusions in elastic bodies with a damage parameter*, Math. Mech. Solids, **24** (2019), 2742–2753.

[17] A. Maitlo, F. Lebon, C. Bauzet, *A multi-scale model of soft imperfect interface with nonlocal damage*, J Multiscale Model, **9**:33 (2018), 1841001.

[18] A.M. Khludnev, *On modeling elastic bodies with defects*, Sib. Elect. Math. Reports, **15** (2018), 153–166.

[19] A. Palmeri, A. Cicirello, *Physically-based Dirac's delta functions in the static analysis of multi-cracked Euler - Bernoulli and Timoshenko beams*, Int. J. of Solids and Structures, **48**:14–15 (2011), 2184–2195.

[20] L.T. Berezhnitsky, V.V. Panasyuk, N.G. Stashchuk, *Interaction of Rigid Linear Inclusions and Cracks in a Deformable Body*, Naukova dumka, Kiev, 1983.

[21] G. Leugering, S.A. Nazarov, A.S. Slutskij, *The asymptotic analysis of a junction of two elastic beams*, Z. Angew. Math. Mech., **99** (2019), 99:e201700192.

[22] G. Leugering, S.A. Nazarov, A.S. Slutskij, J. Taskinen, *Asymptotic analysis of a bit brace shaped junction of thin rods*, Z. Angew. Math. Mech., **100** (2020), 100:e201900227.

[23] S. Caddemi, I. Calio, F. Cannizzaro, *The influence of multiple cracks on tensile and compressive buckling of shear deformable beams*, Int. J. of Solids and Structures, **50**:20–21 (2013), 3166–3183.

[24] M. Goudarzi, F. Dal Corso, D. Bigoni, A. Simone, *Dispersion of rigid line inclusions as stiffeners and shear band instability triggers*, Int. J. of Solids and Structures, **210–211** (2021), 255–272.

[25] N. Hima, D. Bigoni, F. Dal Corso, *Buckling vs unilateral constraint for a multistable metamaterial element*, Philosophical Transactions of the Royal Society A, **380** (2022), 20220021.

[26] Yu. A. Bogan, *Homogenization of a nonhomogeneous spring beam with elements jointed by hinges of finite rigidity*, Sib. Zh. Ind. Mat. **1**:2 (1998), 67–72.

[27] Khludnev A.M. *Thin rigid inclusions with delaminations in elastic plates*, Europ. J. Mech. A/Solids, **32** (2012), 69–75.

[28] A.M. Khludnev, T.S. Popova, *On junction problem for elastic Timoshenko inclusion and semi-rigid inclusion*, Mathematical notes of NEFU, **25**:1 (2018), 73–89.

Tatiana Semenovna Popova
North-Eastern Federal University,
ul. Kulakovskogo, 48,
677008, Yakutsk, Russia
Email address: ptsokt@mail.ru