S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 519.714
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 03D15

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ МИНИМАЛЬНЫХ ФОРМУЛ, РЕАЛИЗУЮЩИХ ЛИНЕЙНЫЕ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ ОТ 5, 6 И 7 ПЕРЕМЕННЫХ

К.Л. Рычков

Представлено П.П. Петровым

Abstract: We consider formulas in a basis consisting of disjunction, conjunction, and negation. It is established that in each minimal (having the smallest possible number of occurrences of variables) formula that calculates a linear Boolean function depending on 5, 6 or 7 variables, at least one of the variables is included at least 8 times. The result focuses on the description of classes of minimal formulas for these functions and is an important intermediate step in this description. But it also has an independent meaning, since it actually represents another way (perhaps the most simple and transparent) to obtain accurate lower estimates of the formula complexity of the specified functions.

Keywords: boolean functions, π-circuits, normalized formulas, lower bounds on complexity, formula representations, Π-partitions.

Rychkov, K.L., On the property of minimal formulas that calculate linear Boolean functions depending on 5, 6 and 7 variables.

© 2025 Рычков К.Л.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2022-0017.

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

1 Введение

Рассматриваются формулы в базисе $\{\vee, \wedge, ^{-}\}$. В статье доказано следующее свойство минимальных (т. е. имеющих наименьшее число вхождений переменных) формул, реализующих линейную булеву функцию, существенно зависящую от 5, 6 или 7 переменных: в любую такую формулу хотя бы одна из переменных входит не менее 8 раз.

Как известно отрицания в формуле можно "опустить"до переменных, производя эквивалентные преобразования $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$, $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ и $\overline{\overline{x}} = x$. Полученная формула называется нормализованной. Поскольку число вхождений любой переменной в формулу при этом не меняется, далее мы ограничимся рассмотрением только нормализованных формул.

Яблонский в [1] предложил метод построения экономной П-схемы или, что фактически то же самое, нормализованной формулы, реализующей линейную булеву функцию от n переменных. Из нижних оценок сложности [2, 3, 4, 5, 6, 7] следует, что при n равном целой степени двойки и при $n = 3, 5, 6, 7$ этот метод приводит к минимальной нормализованной формуле реализующей эту функцию. В [8] посредством естественной модификации метода Яблонского построен целый класс подобных формул (с тем же числом вхождений переменных) – класс так называемых оптимальных совершенных нормализованных формул. Настоящая статья является важным промежуточным шагом доказательства гипотезы о том, что при указанных значениях n этим классом исчерпываются все реализующие линейную булеву функцию минимальные нормализованные формулы.

Результат статьи можно также трактовать как ещё один способ (на ряду со способами, изложенными в [5, 7]) получения точных нижних оценок формульной сложности линейных функций (т. е. числа вхождений переменных в минимальные формулы для этих функций) от 5, 6 и 7 переменных. Действительно в соответствие с методом "забивания переменных"Субботовской [9] вместо входящей не менее 8 раз в минимальную формулу переменной можно подставить такую константу, что сложность формулы (число вхождений в неё переменных) после соответствующих преобразований уменьшится как минимум на $8 + 4 = 12$. При этом получится формула, реализующая линейную функцию от на единицу меньшего числа переменных. В силу нижней оценки Храпченко [2] формульная сложность линейной функции от 4 переменных не меньше 16. Отсюда следует, что формульные сложности линейных функций от 5, 6 и 7 переменных не меньше соответственно $16 + 12 = 28$, $28 + 12 = 40$ и $40 + 12 = 52$. Эти оценки являются точными, поскольку они совпадают со сложностью соответствующих формул Яблонского [1].

Отметим, что вышеуказанное свойство минимальных формул при $n = 5$ впервые посредством компьютерного перебора обнаружил Черухин [5]. В [6] и в [7] этот случай был разобран теоретическими средствами.

2 Π-разбиения и порождаемые ими классы формул

Отрицание $\overline{x}_i$ булевой переменной x_i обычно обозначают через x_i^0, а саму переменную – через x_i^1. В этом смысле удобно понимать *нормализованную формулу* как формулу в базисе $\{\vee, \wedge\}$ над множеством литералов $\mathfrak{X} = \{x_i^\delta \mid i \in \{1, 2, 3, \dots\}, \delta \in \{0, 1\}\}$.

Сложностью $\mathrm{L}(G)$ нормализованной формулы G называется число вхождений в неё литералов из множества $\mathfrak{X}$.

Через $\mathrm{L}_i^\delta(G)$ обозначим число вхождений в эту формулу литерала x_i^δ.

Числом вхождения переменной x_i в формулу G называется величина $\mathrm{L}_i(G) = \mathrm{L}_i^0(G) + \mathrm{L}_i^1(G)$.

Через $\mathfrak{N}$ обозначим множество всех нормализованных формул, которые далее будем называть просто *формулами.*

Всюду далее равенство $G = F$ для $G, F \in \mathfrak{N}$ означает, что G и F это одна и та же формула.

Реализующая булеву функцию f формула называется *минимальной*, если она имеет наименьшую сложность среди всех реализующих эту функцию формул.

Сложность $\mathrm{L}(f)$ *булевой функции* f есть сложность реализующей её минимальной формулы $F \in \mathfrak{N}$.

Множество двоичных наборов

$$\mathrm{B}^n = \{\alpha = (\alpha_1,\ \dots\ \alpha_i,\ \dots\ \alpha_n) \mid \alpha_i \in \{0, 1\}, 1 \le i \le n\}$$

называется *n-мерным единичным кубом* или *кубом* B^n.

Прямоугольным подмножеством декартова квадрата куба B^n или просто *прямоугольником* назовём любое такое непустое подмножество $P \subseteq \mathrm{B}^n \times \mathrm{B}^n$, что $P = A \times B$ для некоторых $A, B \subseteq \mathrm{B}^n$. При этом число n будем называть *размерностью* этого прямоугольника, а множества A и B – его соответственно *вертикальной* и *горизонтальной стороной.*

Через REC^n обозначим множество всех прямоугольников размерности n.

Множество $\mathrm{REC}(P)$ для произвольного прямоугольника $P \in \mathrm{REC}^n$ определим равенством $\mathrm{REC}(P) = \{K \in \mathrm{REC}^n \mid K \subseteq P\}$.

Чтобы не загромождать изложение излишними индексами далее будем полагать, что n произвольное но фиксированное.

Прямоугольник $\mathrm{X} = \mathrm{B}^n \times \mathrm{B}^n$ назовём *главным прямоугольником размерности n* или просто *главным прямоугольником.* Прямоугольники

$$\mathrm{X}_i^0 = \{(\alpha, \beta) \in \mathrm{X} \mid \alpha_i = 1, \beta_i = 0\} \ \text{ и } \ \mathrm{X}_i^1 = \{(\alpha, \beta) \in \mathrm{X} \mid \alpha_i = 0, \beta_i = 1\}$$

назовём соответственно *отрицательной* и *положительной компонентой с номером i* главного прямоугольника X; $i = 1, \dots, n$.

Множество $M \subseteq \mathrm{X}$ назовём (i, δ)-*однородным*, если выполнено включение $M \subseteq \mathrm{X}_i^\delta$; и назовём его просто *однородным*, если существуют такие $i \in \{1, \dots, n\}$ и $\delta \in \{0, 1\}$, что M является (i, δ)-однородным.

Прямоугольники $P_1, P_2 \in \mathrm{REC}^n$ назовём *горизонтально* (*вертикально*) *соседними*, если $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ и вертикальная (горизонтальная) сторона

P_1 равна вертикальной (горизонтальной) стороне P_2; и назовём их просто *соседними*, если они являются либо горизонтально, либо вертикально соседними.

Очевидно для любых двух соседних прямоугольников $P_1, P_2 \in \mathrm{REC}^n$ справедливо включение $P_1 \cup P_2 \in \mathrm{REC}^n$.

Горизонтальным (*вертикальным*) *разрезом* прямоугольника $P \in \mathrm{REC}^n$ назовём такую пару $\{P_1, P_2\} \subseteq \mathrm{REC}^n$ горизонтально (вертикально) соседних прямоугольников, что $P_1 \cup P_2 = P$. Эта пару назовём просто *разрезом* прямоугольника P, если она является либо горизонтальным либо вертикальным его разрезом. При этом прямоугольники P_1, P_2 будем называть *компонентами* разреза.

Разбиением множества P называется семейство U непустых попарно непересекающихся его подмножеств, объединение которых есть P. Входящие в U подмножества называются *блоками* этого разбиения.

Прямоугольным разбиением прямоугольника $P \in \mathrm{REC}^n$ назовём такое его разбиение, все блоки которого являются прямоугольниками размерности n.

Пусть U – произвольное прямоугольное разбиение прямоугольника $P \in \mathrm{REC}^n$.

Сужение прямоугольного разбиения U на произвольный прямоугольник $K \in \mathrm{REC}(P)$ определим равенством

$$U|K = \{Q \cap K \mid Q \in U,\ Q \cap K \neq \emptyset\}.$$

Строгим сужением прямоугольного разбиения U будем называть такое его сужение U', для которого выполнено равенство $|U'| = |U|$.

Гиперблоком прямоугольного разбиения U назовём такой прямоугольник $K \in \mathrm{REC}(P)$, что $U|K \subseteq U$.

Прямоугольным фрагментом прямоугольного разбиения U назовём такое подсемейство блоков $S \subseteq U$, что множество $\bigcup_{Q \in S} Q$ является прямоугольником.

Через $\mathcal{H}(U)$ и $\mathcal{F}(U)$ обозначим множество соответственно всех гиперблоков и всех прямоугольных фрагментов прямоугольного разбиения U.

Заметим, что для любого гиперблока $K \in \mathcal{H}(U)$ справедливо включение $U|K \in \mathcal{F}(U)$ и для любого прямоугольного фрагмента $F \in \mathcal{F}(U)$ справедливо включение $\bigcup_{Q \in F} Q \in \mathcal{H}(U)$. При этом равенство $F = U|K$ равносильно равенству $K = \bigcup_{Q \in F} Q$.

Гиперблок $K \in \mathcal{H}(U)$ и прямоугольный фрагмент $F \in \mathcal{F}(U)$, $F = U|K$, будем называть *соответствующими* друг другу. Очевидно это соответствие является взаимно однозначным.

Заметим, что сами блоки прямоугольного разбиения U являются его гиперблоками. Эти гиперблоки назовём *элементарными*. Все остальные гиперблоки U назовём *составными*. Кроме того сам прямоугольник P является гиперблоком. Этот гиперблок назовём *главным* и обозначим $\widehat{U}$. Отличные от $\widehat{U}$ гиперблоки U назовём *неглавными*.

В дальнейшем прямоугольное разбиения U прямоугольника P для краткости будем называть просто *прямоугольным разбиением* U, имея в виду, что U является прямоугольным разбиением прямоугольника $\widehat{U}$.

Горизонтальным (*вертикальным*) *разрезом гиперблока* $P \in \mathcal{H}(U)$ прямоугольного разбиения U назовём такой горизонтальный (вертикальный) разрез прямоугольника P, что его компоненты являются гиперблоками U. Как горизонтальный так и вертикальный разрез гиперблока P будем также называть просто *разрезом гиперблока* P.

Горизонтальным (*вертикальным*) *разрезом прямоугольного разбиения* U назовём любой горизонтальный (вертикальный) разрез главного гиперблока $\widehat{U}$ этого прямоугольного разбиения.

Через $\mathrm{C_h}(P, U)$ и $\mathrm{C_v}(P, U)$ обозначим соответственно множество всех горизонтальных и множество всех вертикальных разрезов гиперблока P прямоугольного разбиения U.

Через $\mathrm{C_h}(U)$ и $\mathrm{C_v}(U)$ обозначим соответственно множество всех горизонтальных и множество всех вертикальных разрезов прямоугольного разбиения U. Таким образом по определению выполнены равенства $\mathrm{C_h}(U) = \mathrm{C_h}(\widehat{U}, U)$ и $\mathrm{C_v}(U) = \mathrm{C_v}(\widehat{U}, U)$.

Гиперблок P прямоугольного разбиения U назовём *горизонтально* (*вертикально*) *разделимым*, если $\mathrm{C_h}(P, U) \neq \emptyset$ (если $\mathrm{C_v}(P, U) \neq \emptyset$); в противном случае будем называть его *горизонтально* (*вертикально*) *неразделимым*.

Гиперблок прямоугольного разбиения U назовём *разделимым*, если он либо горизонтально либо вертикально разделим; в противном случае будем называть его *неразделимым*.

Прямоугольное разбиение назовём *разделимым*, если каждый его составной гиперблок является разделимым.

Прямоугольное разбиение назовём *однородным*, если каждый его блок является однородным множеством.

П-*разбиением* назовём такое прямоугольное разбиение, которое является одновременно однородным и разделимым.

Размерностью П-разбиения назовём размерность его главного гиперблока.

Через Π^n обозначим множество всех П-разбиений размерности n.

Для произвольного П-разбиения $U \in \Pi^n$ множества его блоков

$$U_i^0 = \{Q \in U \mid Q \subseteq \mathrm{X}_i^0\} \qquad \text{и} \qquad U_i^1 = \{Q \in U \mid Q \subseteq \mathrm{X}_i^1\}$$

назовём соответственно *отрицательной* и *положительной компонентой с номером* i этого П-разбиения, $i = 1, \dots, n$.

Монохромной составляющей компоненты U_i^δ П-разбиения U назовём множество $U_{(i)}^\delta$ всех тех блоков из этой компоненты, которые не принадлежат ни какой другой компоненте U.

Класс $\mathfrak{N}(U)$ *порождаемых* П-*разбиением* $U \in \Pi^n$ *формул* определим, опираясь на следующее очевидное утверждение.

Предложение 1. *Любой прямоугольный фрагмент любого* Π*-разбиения* $U \in \Pi^n$ *является* Π*-разбиением соответствующего ему гиперблока* U.

Сформулируем индуктивное определение класса формул $\mathfrak{N}(U)$.

а) При $|U| = 1$ класс $\mathfrak{N}(U)$ состоит из всех таких литералов x_i^δ, что единственный блок P этого разбиения является (i,δ)-однородным множеством. Другими словами, для Π-разбиения вида $U = \{P\}$ по определению справедливо равенство

$$\mathfrak{N}(U) = \{x_i^\delta \mid P \subseteq \mathrm{X}_i^\delta, i \in \{1,\ldots,n\}, \delta \in \{0,1\}\}.$$

б) Пусть $m \geq 1$ и класс $\mathfrak{N}(U)$ определён для всех Π-разбиений $U \in \Pi^n$ мощности $|U| \leq m$. Определим его для произвольного Π-разбиения $U \in \Pi^n$ мощности $|U| = m+1$.

Для двух произвольных классов формул $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2 \subseteq \mathfrak{N}$ классы формул $\mathbb{K}_1 \wedge \mathbb{K}_2$ и $\mathbb{K}_1 \vee \mathbb{K}_2$ определим следующими равенствами:

$$\mathbb{K}_1 \wedge \mathbb{K}_2 = \{(F_1 \wedge F_2) \mid F_1 \in \mathbb{K}_1, F_2 \in \mathbb{K}_2\},$$

$$\mathbb{K}_1 \vee \mathbb{K}_2 = \{(F_1 \vee F_2) \mid F_1 \in \mathbb{K}_1, F_2 \in \mathbb{K}_2\}.$$

Из неравенства $|U| = m+1 > 1$ следует, что главный гиперблок Π-разбиения U является составным. Значит, либо множество $\mathrm{C_h}(U)$ горизонтальных разрезов либо множество $\mathrm{C_v}(U)$ вертикальных разрезов Π-разбиения U не является пустым. Поскольку компоненты любого горизонтального разреза $\{P_1, P_2\} \in \mathrm{C_h}(U)$ являются гиперблоками U, по предложению 1 соответствующие им прямоугольные фрагменты $U|P_1$ и $U|P_2$ являются Π-разбиениями этих гиперблоков, т. е. $U|P_1 \in \Pi^n$ и $U|P_2 \in \Pi^n$. Очевидно мощности этих Π-разбиений не превосходят m. Следовательно определены классы формул $\mathfrak{N}(U|P_1)$ и $\mathfrak{N}(U|P_2)$. И точно также для любого вертикального разреза $\{P_1, P_2\} \in \mathrm{C_v}(U)$ определены классы формул $\mathfrak{N}(U|P_1)$ и $\mathfrak{N}(U|P_2)$.

Класс формул $\mathfrak{M}_\vee(U, P_1, P_2)$ для компонент произвольного горизонтального разреза $\{P_1, P_2\} \in \mathrm{C_h}(U)$ определим равенством

$$\mathfrak{M}_\vee(U, P_1, P_2) = \mathfrak{N}(U|P_1) \vee \mathfrak{N}(U|P_2).$$

Класс формул $\mathfrak{M}_\wedge(U, P_1, P_2)$ для компонент произвольного вертикального разреза $\{P_1, P_2\} \in \mathrm{C_v}(U)$ определим равенством

$$\mathfrak{M}_\wedge(U, P_1, P_2) = \mathfrak{N}(U|P_1) \wedge \mathfrak{N}(U|P_2).$$

Классы формул $\mathfrak{N}_\vee(U)$ и $\mathfrak{N}_\wedge(U)$ определим равенствами

$$\mathfrak{N}_\vee(U) = \bigcup_{\{P_1,P_2\} \in \mathrm{C_h}(U)} \big(\mathfrak{M}_\vee(U, P_1, P_2) \cup \mathfrak{M}_\vee(U, P_2, P_1)\big),$$

$$\mathfrak{N}_\wedge(U) = \bigcup_{\{P_1,P_2\} \in \mathrm{C_v}(U)} \big(\mathfrak{M}_\wedge(U, P_1, P_2) \cup \mathfrak{M}_\wedge(U, P_2, P_1)\big).$$

Класс формул $\mathfrak{N}(U)$ определим равенством

$$\mathfrak{N}(U) = \mathfrak{N}_\vee(U) \cup \mathfrak{N}_\wedge(U).$$

Заметим, что для любого $U \in \Pi^n$ справедливо неравенство $\mathfrak{N}(U) \neq \emptyset$.

Следующее очевидное утверждение на ряду с предложением 1 служит основой доказательств, проводимых индукцией по мощности П-разбиения.

Предложение 2. *Если главные гиперблоки* $\widehat{U_1}$ *и* $\widehat{U_2}$ П-*разбиений соответственно* $U_1 \in \Pi^n$ *и* $U_2 \in \Pi^n$ *являются соседними прямоугольниками, то объединение* $U_1 \cup U_2$ *этих* П-*разбиений является* П-*разбиением прямоугольника* $\widehat{U_1} \cup \widehat{U_2}$.

Лемма 1. *Для любого прямоугольника* $P \in \mathrm{REC}^n$ *сужение любого его* П-*разбиения на любой прямоугольник* $P' \in \mathrm{REC}(P)$ *является* П-*разбиением прямоугольника* P'.

Доказательство. Индукция по по мощности П-разбиения U прямоугольника P.

При условии $|U| = 1$ утверждение леммы очевидно выполнено.

Пусть $m \geq 1$ и утверждение леммы выполнено для любого прямоугольника $P \in \mathrm{REC}^n$ и любого его П-разбиения U при условии $|U| \leq m$. Покажем, что тогда оно выполнено для произвольного прямоугольника $P \in \mathrm{REC}^n$ и произвольного его П-разбиения U при условии $|U| = m+1$.

Из неравенства $|U| = m + 1 > 1$ следует, что либо $\mathrm{C_h}(U) \neq \emptyset$ либо $\mathrm{C_v}(U) \neq \emptyset$. Без ограничения общности считаем $\mathrm{C_h}(U) \neq \emptyset$. Рассмотрим произвольный горизонтальный разрез $\{P_1, P_2\} \in \mathrm{C_h}(U)$. Поскольку прямоугольники P_1 и P_2 являются гиперблоками П-разбиения U, по предложению 1 соответствующие им прямоугольные фрагменты $U|P_1$ и $U|P_2$ являются их П-разбиениями. Очевидно мощности этих П-разбиений не превосходят m. Значит, в случае $P' \subseteq P_1$ по предположению индукции сужение $(U|P_1)|P'$ является П-разбиением прямоугольника P'. Следовательно в этом случае сужение $U|P'$ является П-разбиением прямоугольника P' в силу очевидного равенства $U|P' = (U|P_1)|P'$. Аналогичные рассуждения справедливы и в случае $P' \subseteq P_2$.

В случае $P' \cap P_1 \neq \emptyset$ и $P' \cap P_2 \neq \emptyset$ по предположению индукции сужения

$$U_1 = (U|P_1)|(P' \cap P_1) \qquad \text{и} \qquad U_2 = (U|P_2)|(P' \cap P_2)$$

являются П-разбиениями прямоугольников $P' \cap P_1$ и $P' \cap P_2$ соответственно. Очевидно эти прямоугольники являются горизонтально соседними и справедливы равенства

$$(P' \cap P_1) \cup (P' \cap P_2) = P', \quad \widehat{U_1} = P' \cap P_1, \quad \widehat{U_2} = P' \cap P_2, \quad U|P = U_1 \cup U_2.$$

Следовательно в этом случае сужение $U|P'$ является П-разбиением прямоугольника P' в силу предложения 2. Лемма 1 доказана. $\square$

Заметим, что по определению для любого П-разбиения $U \in \Pi^n$ любое его сужение U' является сужением этого П-разбиения на некоторый прямоугольник $P' \in \mathrm{REC}(\widehat{U})$ и по лемме 1 является П-разбиением этого прямоугольника. Следовательно для него как и для самого U справедливо включение $U' \in \Pi^n$ а, значит, и определён класс формул $\mathfrak{N}(U')$.

Лемма 2. *Для любого* Π*-разбиения* $U \in \Pi^n$ *и любого его строгого сужения* U' *справедливо включение* $\mathfrak{N}(U) \subseteq \mathfrak{N}(U')$.

Доказательство. Индукция по мощности П-разбиения U.

Через P обозначим главный гиперблок П-разбиения U. И пусть P' – произвольный прямоугольник из $\mathrm{REC}(P)$ такой, что сужение $U' = U|P'$ строгое. По лемме 1 это сужение является П-разбиением P'. Следовательно P' является главным гиперблоком П-разбиения U'.

При $|U| = 1$ как П-разбиение U состоит из единственного блока P, так и произвольное его строгое сужение U' состоит из единственного блока P'. Множества $\mathfrak{N}(U)$ и $\mathfrak{N}(U')$ в этом случае состоят из литералов. При этом для произвольного $x_i^\delta \in \mathfrak{N}(U)$ по определению выполнено включение $P \subseteq \mathrm{X}_i^\delta$. И поэтому из включения $P' \subseteq P$ следует $P' \subseteq \mathrm{X}_i^\delta$. А это по определению означает, что $x_i^\delta \in \mathfrak{N}(U')$. Что в свою очередь в силу произвольности выбора $x_i^\delta \in \mathfrak{N}(U)$ означает, что $\mathfrak{N}(U) \subseteq \mathfrak{N}(U')$.

Пусть $m \geq 1$ и утверждение леммы выполнено для любого П-разбиения $U \in \Pi^n$ мощности $|U| \leq m$. Докажем, что тогда оно выполнено и для произвольного П-разбиения $U \in \Pi^n$ мощности $|U| = m + 1$.

По определению класса $\mathfrak{N}(U)$ для произвольной формулы $F \in \mathfrak{N}(U)$ возможны два случая: $F \in \mathfrak{N}_\vee(U)$ и $F \in \mathfrak{N}_\wedge(U)$. Рассмотрим первый случай, второй рассматривается аналогично.

По определению класса формул $\mathfrak{N}_\vee(U)$ существует такой горизонтальный разрез $\{P_1, P_2\} \in \mathrm{C_h}(U)$ и такие две формулы $F_1 \in \mathfrak{N}(U|P_1)$ и $F_2 \in \mathfrak{N}(U|P_2)$, что $F = (F_1 \vee F_2)$. По предложению 1 соответствующие гиперблокам P_1 и P_2 П-разбиения U прямоугольные фрагменты $U_1 = U|P_1$ и $U_2 = U|P_2$ являются П-разбиениями этих гиперблоков, т. е. справедливы включения $U_1 \in \Pi^n$ и $U_2 \in \Pi^n$. При этом очевидно выполнены неравенства $|U_1| \leq m$ и $|U_2| \leq m$.

Из строгости сужения U' следует $P_1' = P_1 \cap P' \neq \emptyset$ и $P_2' = P_2 \cap P' \neq \emptyset$. Поэтому множества P_1' и P_2' являются прямоугольниками, и для них справедливы включения $P_1' \in \mathrm{REC}(P_1)$ и $P_2' \in \mathrm{REC}(P_2)$. Из строгости сужения U' также следует, что сужения $U_1' = U_1|P_1'$ и $U_2' = U_2|P_2'$ П-разбиений U_1 и U_2 на эти прямоугольники являются строгими. Значит, по предположению индукции справедливы включения

$$\mathfrak{N}(U_1) \subseteq \mathfrak{N}(U_1') \qquad \text{и} \qquad \mathfrak{N}(U_2) \subseteq \mathfrak{N}(U_2').$$

Очевидно пара прямоугольников $\{P_1', P_2'\}$ представляет собой горизонтальный разрез П-разбиения U', т. е. $\{P_1', P_2'\} \in \mathrm{C_h}(U')$. Кроме того очевидно сужения U_1' и U_2' П-разбиений U_1 и U_2 и прямоугольные фрагменты $U'|P_1'$ и $U'|P_2'$ П-разбиения U' связаны равенствами $U_1' = U'|P_1'$ и

$U'_2 = U'|P'_2$. Отсюда и из определения класса формул $\mathfrak{N}(U')$ имеем

$$F = (F_1 \vee F_2) \subseteq \mathfrak{N}(U|P_1) \vee \mathfrak{N}(U|P_2) = \mathfrak{N}(U_1) \vee \mathfrak{N}(U_2)$$
$$\subseteq \mathfrak{N}(U'_1) \vee \mathfrak{N}(U'_2) = \mathfrak{N}(U'|P'_1) \vee \mathfrak{N}(U'|P'_2) \subseteq \mathfrak{N}(U').$$

Поскольку формула $F \in \mathfrak{N}(U)$ выбрана произвольно, из включения $F \in \mathfrak{N}(U')$ следует $\mathfrak{N}(U) \subseteq \mathfrak{N}(U')$. Лемма 2 доказана. □

Теорема 1. *При любом целом $n \geq 1$ для любого Π-разбиения $U \in \Pi^n$ и любой формулы $F \in \mathfrak{N}(U)$ справедливы следующие соотношения:*

$$\mathrm{L}(F) = |U|,$$
$$\mathrm{L}_i^\delta(F) \geq |U_{(i)}^\delta| \quad \text{при} \quad i \in \{1, \ldots, n\},\ \delta \in \{0,1\},$$
$$\mathrm{L}_i^\delta(F) = 0 \quad \text{при} \quad i \in \{n+1, n+2, \ldots\},\ \delta \in \{0,1\}.$$

Доказательство. Индукция по мощности Π-разбиения U.

При $|U| = 1$ по определению класса $\mathfrak{N}(U)$ для произвольной формулы $F \in \mathfrak{N}(U)$ и единственного блока P Π-разбиения U существуют такие $j \in \{1, \ldots, n\}$ и $\sigma \in \{0,1\}$, что $F = x_j^\sigma$ и $P \subseteq \mathrm{X}_j^\sigma$. Поэтому справедливы следующие соотношения:

$$\mathrm{L}(F) = |U| = \mathrm{L}_j^\sigma(F) = 1 \geq |U_{(j)}^\sigma|, \qquad \mathrm{L}_j^{\sigma\oplus 1}(F) = |U_{(j)}^{\sigma\oplus 1}| = 0,$$ [1]
$$\mathrm{L}_i^\delta(F) = |U_{(i)}^\delta| = 0 \ \text{ при } \ i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}, \quad \delta \in \{0,1\},$$
$$\mathrm{L}_i^0(F) = \mathrm{L}_i^1(F) = 0 \ \text{ при } \ i > n.$$

Значит, в этом случае утверждение теоремы справедливо.

Пусть $m \geq 1$ и для любого Π-разбиения $U \in \Pi^n$ мощности $|U| \leq m$ все соотношения теоремы выполнены. Покажем, что тогда они выполнены и для произвольного $U \in \Pi^n$ мощности $|U| = m + 1$.

По определению класса $\mathfrak{N}(U)$ для произвольной формулы $F \in \mathfrak{N}(U)$ возможны два случая: $F \in \mathfrak{N}_\vee(U)$ и $F \in \mathfrak{N}_\wedge(U)$. Рассмотрим первый случай, второй рассматривается аналогично.

По определению класса формул $\mathfrak{N}_\vee(U)$ существует такой горизонтальный разрез $\{P_1, P_2\} \in \mathrm{C_h}(U)$ и такие две формулы $F_1 \in \mathfrak{N}(U|P_1)$ и $F_2 \in \mathfrak{N}(U|P_2)$, что $F = (F_1 \vee F_2)$. В силу предложения 1 для прямоугольных фрагментов $V = U|P_1$ и $W = U|P_2$ Π-разбиения U справедливо включение $V, W \in \Pi^n$. И очевидно справедливы неравенства $|V| \leq m$ и $|W| \leq m$. Следовательно по предположению индукции все соотношения теоремы выполнены как для Π-разбиения V и формулы F_1 так и для Π-разбиения W и формулы F_2. Поэтому справедливость теоремы вытекает из следующих очевидных равенств

$$\mathrm{L}(F) = \mathrm{L}(F_1) + \mathrm{L}(F_2), \qquad |U| = |V| + |W|,$$
$$\mathrm{L}_i^\delta(F) = \mathrm{L}_i^\delta(F_1) + \mathrm{L}_i^\delta(F_2),\ |U_{(i)}^\delta| = |V_{(i)}^\delta| + |W_{(i)}^\delta|, \text{ при } 1 \leq i \leq n, \delta \in \{0,1\},$$
$$\mathrm{L}_i^\delta(F) = \mathrm{L}_i^\delta(F_1) + \mathrm{L}_i^\delta(F_2) \ \text{ при } \ i > n,\ \delta \in \{0,1\}.$$

[1] $\oplus$ – сумма по модулю 2.

Теорема 1 доказана. □

3 Представления формул

Представлением формулы $F \in \mathfrak{N}$ назовём любое такое П-разбиение U, что выполнено включение $F \in \mathfrak{N}(U)$. При этом также будем говорить, что *формула* F *представима* П-*разбиением* U.

Представлением формулы $F \in \mathfrak{N}$ *на прямоугольнике* $P \in \mathrm{REC}^n$ назовём любое такое представление U этой формулы, что U является П-разбиением P.

Будем говорить, что *формула* $F \in \mathfrak{N}$ *представима на прямоугольнике* $P \in \mathrm{REC}^n$, если существует такое П-разбиение U этого прямоугольника, что U является представлением F.

Булеву функцию будем называть *тривиальной*, если она тождественно равна константе, и – *нетривиальной* в противном случае.

Собственным прямоугольником нетривиальной булевой функции f назовём прямоугольник $\mathrm{P}_f = f^{-1}(0) \times f^{-1}(1)$.

Теорема 2. *Если формула $F \in \mathfrak{N}$ представима на прямоугольнике $P \in \mathrm{REC}^n$, то она реализует некоторую нетривиальную булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, для собственного прямоугольника которой справедливо включение $P \subseteq \mathrm{P}_f$.*

Доказательство. Индукция по мощности представляющего формулу F П-разбиения U прямоугольника P.

При $|U| = 1$ по определению класса $\mathfrak{N}(U)$ для некоторых $i \in \{1, \dots, n\}$, $\delta \in \{0, 1\}$ выполнены равенство $F = x_i^\delta$ и включение $P \subseteq \mathrm{X}_i^\delta$. Из равенства следует, что формула F реализует нетривиальную булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n) = x_i^\delta$. Поэтому справедливость теоремы в этом случае следует из включения и очевидного равенства $\mathrm{P}_f = f^{-1}(0) \times f^{-1}(1) = \mathrm{X}_i^\delta$.

Пусть $m \geq 1$ и теорема доказана для всех $U \in \Pi^n$ мощности $|U| \leq m$. Докажем её для произвольного $U \in \Pi^n$ мощности $|U| = m + 1$.

По определению класса $\mathfrak{N}(U)$ для формулы $F \in \mathfrak{N}(U)$ возможны два случая: $F \in \mathfrak{N}_\vee(U)$ и $F \in \mathfrak{N}_\wedge(U)$. Рассмотрим первый случай, второй рассматривается аналогично.

По определению класса формул $\mathfrak{N}_\vee(U)$ существует такой горизонтальный разрез $\{P_1, P_2\} \in \mathrm{C_h}(U)$ и такие две формулы $F_1 \in \mathfrak{N}(U|P_1)$ и $F_2 \in \mathfrak{N}(U|P_2)$, что $F = (F_1 \vee F_2)$. В силу предложения 1 для прямоугольных фрагментов $U_1 = U|P_1$ и $U_2 = U|P_2$ П-разбиения U справедливо включение $U_1, U_2 \in \Pi^n$. И очевидно справедливы неравенства $|U_1| \leq m$ и $|U_2| \leq m$. Следовательно по предположению индукции формулы F_1 и F_2 реализуют некоторые нетривиальные булевы функций $f_1(x_1, \dots, x_n)$ и $f_2(x_1, \dots, x_n)$, для собственных прямоугольников которых справедливы включения $P_1 \subseteq \mathrm{P}_{f_1}$ и $P_2 \subseteq \mathrm{P}_{f_2}$. Отсюда в частности следует, что формула F реализует булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, для которой справедливо равенство $f = f_1 \vee f_2$.

Поскольку пара прямоугольников $\{P_1, P_2\}$ является горизонтальным разрезом прямоугольника P, все эти три прямоугольника имеют общую вертикальную сторону. Обозначим её A. Из равенства $f_1 \vee f_2 = f$ следует $f_1^{-1}(0) \cap f_2^{-1}(0) = f^{-1}(0)$ и $f_1^{-1}(1) \cup f_2^{-1}(1) = f^{-1}(1)$. Поэтому из включений $P_1 \subseteq \mathrm{P}_{f_1}$, $P_2 \subseteq \mathrm{P}_{f_2}$ следует

$$\begin{aligned} P = P_1 \cup P_2 &\subseteq (A \times f_1^{-1}(1)) \cup (A \times f_2^{-1}(1)) \subseteq A \times (f_1^{-1}(1) \cup f_2^{-1}(1)) \\ &= A \times f^{-1}(1) \subseteq (f_1^{-1}(0) \cap f_2^{-1}(0)) \times f^{-1}(1) = f^{-1}(0) \times f^{-1}(1). \end{aligned}$$

Поскольку по определению прямоугольник P является непустым множеством, из включения $P \subseteq f^{-1}(0) \times f^{-1}(1)$ следует $f^{-1}(0) \neq \emptyset$ и $f^{-1}(1) \neq \emptyset$. Поэтому функция f является нетривиальной и для её собственного прямоугольника справедливо включение $P \subseteq \mathrm{P}_f$. Теорема 2 доказана. $\square$

Следствие 1. *Если формула $F \in \mathfrak{N}$ представима на собственном прямоугольнике нетривиальной булевой функции $g(x_1, \ldots, x_n)$, то она реализует эту функцию.*

Доказательство. По теореме 2 из включения $\mathrm{P}_g = g^{-1}(0) \times g^{-1}(1) \in \mathrm{REC}^n$ следует, что формула F реализует некоторую нетривиальную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, для собственного прямоугольника которой справедливо включение $\mathrm{P}_g \subseteq \mathrm{P}_f$. Из этого включения очевидным образом следует равенство $\mathrm{P}_g = \mathrm{P}_f$ а, значит, и равенство $g = f$. Следствие 1 доказано. $\square$

Теорема 3. *Если формула $F \in \mathfrak{N}$ реализует нетривиальную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ и является минимальной, то она представима на собственном прямоугольнике этой функции.*

Доказательство. Индукция по сложности функции f.

При $\mathrm{L}(f) = 1$ сложность реализующей f минимальной формулы по определению также равна единице. Потому F есть некоторый литерал x_i^δ, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{0, 1\}$, а для собственного прямоугольника функции f справедливо равенство $\mathrm{P}_f = \mathrm{X}_i^\delta$. В этом случае одноэлементное семейство прямоугольников $U = \{\mathrm{X}_i^\delta\}$ является П-разбиением прямоугольника P_f, представляющим F.

Пусть $m \geq 1$ и утверждение теоремы выполнено для любой функции f сложности $\mathrm{L}(f) \leq m$. Покажем, что тогда оно выполнено и для произвольной функции f сложности $\mathrm{L}(f) = m + 1$.

Из минимальности формулы F следует $\mathrm{L}(F) = \mathrm{L}(f) = m + 1 > 1$, поэтому возможны два случая: $F = (H \vee T)$ и $F = (H \wedge T)$. Рассмотрим первый случай, второй рассматривается аналогично.

В силу того, что F реализует зависящую от переменных $x_1, \ldots, x_n$ нетривиальную булеву функцию и является минимальной, она не содержит литералов отличных от $x_1^0, \ldots, x_n^0$ и $x_1^1, \ldots, x_n^1$. Значит, формулы H и T также не содержат таких литералов. Поэтому они также реализуют некоторые зависящие от переменных $x_1, \dots, x_n$ функции. Обозначим эти функции $h(x_1, \dots, x_n)$ и $t(x_1, \dots, x_n)$ соответственно. Кроме того из минимальности F следует, что формулы H и T являются минимальными, а функции h и t являются различными нетривиальными булевыми функциями. При этом очевидно выполнены неравенства $\mathrm{L}(h) \le \mathrm{L}(f) - 1 = m$ и $\mathrm{L}(t) \le \mathrm{L}(f) - 1 = m$. Значит, по предположению индукции формулы H и T представимы на собственных прямоугольниках P_h и P_t этих функций. Пусть U_H и U_T это П-разбиения прямоугольников соответственно P_h и P_t, представляющие эти формулы.

Из минимальности F также следует, что функции f, h, t попарно различны. Поэтому в силу связывающего их равенства $f = h \vee t$ множества

$$\mathrm{P}_f, \quad P_1 = \mathrm{P}_f \cap \mathrm{P}_h, \quad P_2 = \mathrm{P}_f \setminus P_1, \quad P_3 = \mathrm{P}_f \cap \mathrm{P}_t$$

являются прямоугольниками с общей вертикальной стороной $f^{-1}(0)$. При этом очевидно выполнены соотношения

$$\mathrm{P}_f = P_1 \cup P_2, \quad P_1 \cap P_2 = \emptyset \quad \text{и} \quad P_1 \subseteq \mathrm{P}_h, \quad P_2 \subseteq P_3 \subseteq \mathrm{P}_t.$$

Эти соотношения означают, что пара прямоугольников $\{P_1, P_2\}$ является горизонтальным разрезом собственного прямоугольника P_f функции f, компонента P_1 этого разреза содержится в собственном прямоугольнике P_h функции h, компонента P_2 – в собственном прямоугольнике P_t функции t.

По лемме 1 сужения $U_1 = U_H|P_1$ и $U_2 = U_T|P_2$ представлений U_H и U_T формул H и T являются П-разбиениями прямоугольников P_1 и P_2 соответственно. По предложению 2 объединение $U = U_1 \cup U_2$ этих П-разбиений является П-разбиением собственного прямоугольника $\mathrm{P}_f = P_1 \cup P_2$ функции f. Покажем, что П-разбиение U является представлением формулы F.

Для этого сначала заметим, что сужения U_1 и U_2 представлений U_H и U_T являются строгими. Действительно в противном случае выполнено хотя бы одно из неравеств $|U_1| < |U_H|$ либо $|U_2| < |U_T|$.Следовательно в силу теоремы 1 для любой формулы $G \in \mathfrak{N}(U)$ имеем

$$\mathrm{L}(G) = |U| = |U_1| + |U_2| < |U_H| + |U_T| = \mathrm{L}(H) + \mathrm{L}(T) = \mathrm{L}(F),$$

т. е. справедливо строгое неравенство $\mathrm{L}(G) < \mathrm{L}(F)$. Но поскольку формула G в силу следствия 1 реализует функцию f, это неравенство противоречит минимальности формулы F.

По лемме 2 из строгости сужений $U_1 = U_H|P_1$ и $U_2 = U_T|P_2$ следуют включения $\mathfrak{N}(U_H) \subseteq \mathfrak{N}(U_1)$ и $\mathfrak{N}(U_T) \subseteq \mathfrak{N}(U_2)$. Кроме того очевидно сужения U_1 и U_2 являются прямоугольными фрагментами П-разбиения U, соответствующими гиперблокам P_1 и P_2 этого разбиения. Значит, для них справедливы равенства $U_1 = U|P_1$ и $U_2 = U|P_2$. Отсюда и из определения класса формул $\mathfrak{N}(U)$ следует

$$F = (H \vee T) \in \mathfrak{N}(U_H) \vee \mathfrak{N}(U_T) \subseteq \mathfrak{N}(U_1) \vee \mathfrak{N}(U_2) \\ = \mathfrak{N}(U|P_1) \vee \mathfrak{N}(U|P_2) \subseteq \mathfrak{N}(U).$$

Т. е. справедливо включение $F \in \mathfrak{N}(U)$, которое и означает, что П-разбиение U собственного прямоугольника функции f является представлением формулы F. Теорема 3 доказана. $\square$

4 Правильные разбиения (0-1)-рёбер линейной булевой функции

Через Φ будем обозначать собственный прямоугольник линейной булевой функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus_{i=1}^n x_i$, а через N^0 и N^1 – множества соответственно $\varphi^{-1}(0)$ и $\varphi^{-1}(1)$.

Таким образом имеют место равенства $\Phi = \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ и

$$\mathrm{N}^0 = \{\alpha \in \mathrm{B}^n \mid \bigoplus\nolimits_{i=1}^n \alpha_i = 0\}, \quad \mathrm{N}^1 = \{\beta \in \mathrm{B}^n \mid \bigoplus\nolimits_{i=1}^n \beta_i = 1\}.$$

Пару наборов $(\alpha, \beta) \in \Phi$ будем называть (0-1)-*парой линейной булевой функции* φ или просто (0-1)-*парой.* При этом набор α будем называть *чётным концом*, а набор β – *нечётным концом* этой пары.

Через $\mathrm{N}^0(M)$ и $\mathrm{N}^1(M)$ обозначим соответственно множество всех чётных и всех нечётных концов (0-1)-пар из произвольного непустого подмножества $M \subseteq \Phi$.

Прямоугольной окрестностью непустого множества $M \subseteq \Phi$ назовём прямоугольник $[M] = \mathrm{N}^0(M) \times \mathrm{N}^1(M)$.

Сумму двоичных наборов $\alpha, \beta \in \mathrm{B}^n$ определим равенством

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 \oplus \beta_1, \alpha_2 \oplus \beta_2, \ \ldots \ , \alpha_n \oplus \beta_n).$$

Через $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, ... ,$\mathbf{e}^n$ обозначим двоичные наборы из B^n с единственной единичной компонентой:

$$\mathbf{e}^1 = (1, 0, \ldots, 0), \ \ \mathbf{e}^2 = (0, 1, \ldots, 0), \ \ldots \ , \mathbf{e}^n = (0, \ldots, 0, 1).$$

(0-1)-*ребром линейной булевой функции* φ или просто (0-1)-*ребром* называется такая (0-1)-пара $(\alpha, \beta) \in \Phi$, что для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполнено равенство $\beta = \alpha + \mathbf{e}^i$.

Через R обозначим множество всех (0-1)-рёбер линейной булевой функции φ.

Множества $\mathrm{R}_i^0 = \mathrm{R} \cap \mathrm{X}_i^0$ и $\mathrm{R}_i^1 = \mathrm{R} \cap \mathrm{X}_i^1$ назовём соответственно *отрицательной* и *положительной компонентой с номером* i *множества* R, а элементы этих множеств – соответственно *отрицательными* и *положительными* (0-1)-*рёбрами направления* i; $i = 1, \ldots, n$.

Множество $\mathrm{R}^{\delta_1 \ldots \delta_n}$ для произвольных $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \{0, 1\}$ определим равенством $\mathrm{R}^{\delta_1 \ldots \delta_n} = \mathrm{R}_1^{\delta_1} \cup \cdots \cup \mathrm{R}_n^{\delta_n}$.

Заметим, что для любого (0-1)-ребра существует единственная содержащая его компонента X_i^δ главного прямоугольника X. Поэтому семейство компонент $\mathrm{R}_1^0, \ldots, \mathrm{R}_n^0, \mathrm{R}_1^1, \ldots, \mathrm{R}_n^1$ множества R является разбиением множества R. Кроме того все компоненты R являются однородными множествами, и для любого однородного подмножества $Q \subseteq \mathrm{R}$ существует единственная содержащая Q компонента R и единственная содержащая Q компонента X.

Правильным разбиением множества R назовём такое разбиение этого множества, все блоки которого являются однородными множествами, а их прямоугольные окрестности попарно не пересекаются.

Для произвольного правильного разбиения V множества R множества блоков

$$V_i^0 = \{Q \in V \mid Q \subseteq \mathrm{R}_i^0\} \quad \text{и} \quad V_i^1 = \{Q \in V \mid Q \subseteq \mathrm{R}_i^1\}$$

назовём соответственно *отрицательной* и *положительной компонентой с номером* i этого разбиения, $i = 1, \ldots, n$.

Множество $V^{\delta_1 \ldots \delta_n}$ для произвольных $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \{0, 1\}$ определим равенством

$$V^{\delta_1 \ldots \delta_n} = V_1^{\delta_1} \cup \cdots \cup V_n^{\delta_n}.$$

Заметим, что семейство компонент $V_1^0, \ldots, V_n^0, V_1^1, \ldots, V_n^1$ правильного разбиения V множества R является разбиением множества V, и каждая компонента V_i^δ разбиения V является разбиением соответствующей компоненты R_i^δ множества R. Кроме того множество $V^{\delta_1 \ldots \delta_n}$ является разбиением множества $\mathrm{R}^{\delta_1 \ldots \delta_n}$.

Для произвольного П-разбиения U прямоугольника Φ через $\mathrm{V}(U)$ обозначим следующее семейство подмножеств множества R:

$$\mathrm{V}(U) = \{Q \cap \mathrm{R} \mid Q \in U, Q \cap \mathrm{R} \neq \emptyset\}.$$

Очевидно семейство $\mathrm{V}(U)$ является разбиением множества R. Будем называть его *разбиением множества* R, *порождённым* П-*разбиением* U.

Лемма 3. *Для любого* П-*разбиения* U *прямоугольника* Φ *порождённое им разбиение* $\mathrm{V}(U)$ *множества* R *является правильным и справедливы неравенства*

$$|\mathrm{V}(U)| \leq |U| \qquad \text{и} \qquad |\mathrm{V}_i^\delta(U)| \leq |U_{(i)}^\delta|, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \delta = 0, 1.$$

Доказательство. По определению любой блок M разбиения $\mathrm{V}(U)$ является подмножеством некоторого блока Q П-разбиения U, который по определению является однородным множеством. Поэтому M также является однородным множеством. При этом очевидно из $M \subseteq Q$ следует $[M] \subseteq Q$. Значит, поскольку разные блоки $\mathrm{V}(U)$ являются подмножествами разных блоков U, из попарной непересекаемости блоков U следует попарная непересекаемость прямоугольных окрестностей блоков $\mathrm{V}(U)$. В следствие чего разбиение $\mathrm{V}(U)$ множества R является правильным.

Первое неравенство леммы следует непосредственно из определения разбиения $\mathrm{V}(U)$. Справедливость остальных неравенств вытекает из того, что любой блок $\mathrm{V}(U)$ а вместе с ним и содержащий его блок U является подмножеством некоторой единственной компоненты X_i^δ главного прямоугольника X. Лемма 3 доказана. □

Заметим, что сложность минимальной формулы F, реализующей линейную булеву функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, не превышает сложности построенной для этой функции формулы Яблонского [1]. Т. е. при $n = 2^k + \rho$, $0 \le \rho < 2^k$, имеет место неравенство $\mathrm{L}(F) \le 4^k + 3\rho 2^k$ или (что то же самое) неравенство

$$\mathrm{L}(F) \le n^2 + (n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor})n - 2(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor})^2.$$

Кроме того, по теореме 3 минимальная формула F представима на прямоугольнике Φ. А в силу леммы 3 и теоремы 1 для любого представляющего её П-разбиения U этого прямоугольника и порождённого им разбиения $\mathrm{V}(U)$ множества R справедливы неравенства

$$|\mathrm{V}(U)| \le |U| = \mathrm{L}(F),$$

$$|\mathrm{V}_i^0(U)| + |\mathrm{V}_i^1(U)| \le |U_{(i)}^0| + |U_{(i)}^1| \le \mathrm{L}_i^0(F) + \mathrm{L}_i^1(F) \le \mathrm{L}_i(F), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Поэтому чтобы показать, что некоторая переменная входит в F не менее 8 раз, достаточно доказать следующее утверждение.

Теорема 4. *При $n = 5, 6, 7$ не существует такого правильного разбиения V множества (0-1)-рёбер линейной булевой функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, для которого выполнены неравенства*

$$|V| \le n^2 + (n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor})n - 2(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor})^2, \qquad (1)$$

$$|V_i^0| + |V_i^1| < 8, \qquad i = 1, \ldots, n. \qquad (2)$$

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству этой теоремы.

5 Об одном свойстве правильных разбиений множества R, обладающих полным набором маломощных компонент

По определению *правильное разбиение V множества* R *обладает полным набором маломощных компонент*, если для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ существует такое $\delta \in \{0, 1\}$, что $|V_i^\delta| \le 3$.

Заметим, что разбиение V, о котором идёт речь в формулировке теоремы 4, обладает полным набором маломощных компонент.

Гранью куба B^n называется множество

$$\mathrm{B}^n{}_{i_1,\ldots,i_k}^{\sigma_1,\ldots,\sigma_k} = \{(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathrm{B}^n \mid \alpha_{i_1} = \sigma_1, \ldots, \alpha_{i_k} = \sigma_k\}, \ \ \sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \{0, 1\}.$$

При этом множество $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$ называется *множеством образующих*, число $n - k$ – *размерностью* этой грани.

Через $\mathrm{Form}(F)$ и $\dim(F)$ обозначим соответственно множество образующих и размерность грани F куба B^n.

Через $\mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$ обозначим множество всех граней куба B^n, через $\mathfrak{F}^k(\mathrm{B}^n)$ – множество всех граней размерности k куба B^n, и для произвольной грани $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$ через $\mathfrak{F}^k(F)$ – множество всех таких граней $G \in \mathfrak{F}^k(\mathrm{B}^n)$, что $G \subseteq F$; $k = 0, 1, \ldots, n$.

Для произвольного однородного подмножества $Q \subseteq \mathrm{R}$ через $\widehat{Q}$ обозначим минимальную по включению грань куба B^n, содержащую все концы (0-1)-рёбер из Q.

Через $\mathrm{R}_i^\delta(F)$ обозначим множество всех таких (0-1)-рёбер из R_i^δ, оба конца которых принадлежат грани F куба B^n.

R-*множеством* будем называть такое непустое подмножество $M \subseteq \mathrm{R}$, что для некоторых $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{0, 1\}$, $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$ имеет место равенство $M = \mathrm{R}_i^\delta(F)$. При этом *размерностью* R-*множества* M назовём размерность грани F, а саму грань F – *порождающей* R-*множество* M.

Корректность определения размерности R-множества вытекает из первого из следующих двух очевидных утверждений.

Предложение 3. *Для любого* R-*множества* M *существует единственная порождающая его грань куба* B^n. *Этой гранью является грань* $\widehat{M}$.

Предложение 4. *При* $2 \le k \le n$ *для любой грани* $F \in \mathfrak{F}^k(\mathrm{B}^n)$ *справедливы равенства*

$$|\mathrm{R}_i^0(F)| = |\mathrm{R}_i^1(F)| = \begin{cases} 2^{k-2} & \text{при } i \in \mathrm{Form}(F), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Через $\mathfrak{R}^3$ обозначим множество всех R-множеств размерности 3.

Заметим, что любое R-множество является однородным подмножеством R. В частности, в силу предложения 4 любое R-множество размерности 3 является однородным двухэлементным подмножеством R.

Через E обозначим множество всех однородных двухэлементных подмножеств множества R и через $\mathrm{E}(Q)$ – множество всех двухэлементных подмножеств произвольного однородного множества $Q \subseteq \mathrm{R}$.

Множества $\mathrm{E}_i^0 = \mathrm{E}(\mathrm{R}_i^0)$ и $\mathrm{E}_i^1 = \mathrm{E}(\mathrm{R}_i^1)$ назовём соответственно *отрицательной* и *положительной компонентой с номером* i *множества* E; $i = 1, \ldots, n$.

Очевидно семейство компонент $\mathrm{E}_1^0, \ldots, \mathrm{E}_n^0, \mathrm{E}_1^1, \ldots, \mathrm{E}_n^1$ множества E является разбиением множества E.

Для произвольного однородного множества $Q \subseteq \mathrm{R}$ через $\mathrm{K}(Q)$ обозначим полный граф с множеством вершин Q.

Элементы множества E будем называть *рёбрами*, имея в виду, что они являются рёбрами полных графов $\mathrm{K}_i^\delta = \mathrm{K}(\mathrm{R}_i^\delta)$, $i = 1, \ldots, n$; $\delta = 0, 1$. А элементы его компонент E_i^0 и E_i^1 – *отрицательными* и *положительными рёбрами индекса* i соответственно.

Множество $\mathbb{E}(V)$ *рёбер, порождённых правильным разбиением* V *множества* R, определим равенством $\mathbb{E}(V) = \bigcup_{Q \in V} \mathrm{E}(Q)$.

Множества $\mathbb{E}_i^0(V) = \bigcup_{Q \in V_i^0} \mathrm{E}(Q)$ и $\mathbb{E}_i^1(V) = \bigcup_{Q \in V_i^1} \mathrm{E}(Q)$ назовём соответственно *отрицательной* и *положительной компонентой с номером* i *множества* $\mathbb{E}(V)$; $i = 1, \ldots, n$.

Очевидно семейство компонент $\mathbb{E}_1^0(V), \ldots, \mathbb{E}_n^0(V), \mathbb{E}_1^1(V), \ldots, \mathbb{E}_n^1(V)$ множества $\mathbb{E}(V)$ является разбиением множества $\mathbb{E}(V)$.

Концами ребра $e = \{r_1, r_2\} \in \mathrm{E}$ по определению являются (0-1)-рёбра r_1 и r_2.

Расстоянием Хэмминга между наборами $(\alpha_1, ..., \alpha_n), (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathrm{B}^n$ называется величина $\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|$ (т. е. число разрядов, в которых эти наборы отличаются).

Длиной ребра $e \in \mathrm{E}$ будем называть расстояние Хэмминга между чётными концами (0-1)-рёбер, являющихся концами ребра e, и будем обозначать её $\mathrm{length}(e)$.

Следующее утверждение очевидно.

Предложение 5. *Длина ребра* $e \in \mathrm{E}$ *и размерность содержащей его минимальной по включению грани куба* B^n *связаны равенством*

$$\mathrm{length}(e) + 1 = \dim(\widehat{e}).$$

Через T обозначим множество всех рёбер из E, имеющих длину 2.

Множества $\mathrm{T}_i^0 = \mathrm{T} \cap \mathrm{E}_i^0$ и $\mathrm{T}_i^1 = \mathrm{T} \cap \mathrm{E}_i^1$ назовём соответственно *отрицательной* и *положительной компонентой с номером* i *множества* T; $i = 1, \ldots, n$.

Из предложений 3, 4, 5 очевидным образом вытекают следующие утверждения.

Предложение 6. *Справедливо равенство* $\mathfrak{R}^3 = \mathrm{T}$.

Предложение 7. *Для любой грани* $F \in \mathfrak{F}^3(\mathrm{B}^n)$ *и каждого* $i \in \mathrm{Form}(F)$ *справедливы включения* $\mathrm{R}_i^0(F) \in \mathrm{T}_i^0$ *и* $\mathrm{R}_i^1(F) \in \mathrm{T}_i^1$.

Опираясь на предложения 3, 6, 7, для каждого $i = 1, \ldots, n$ следующим образом определим взаимно однозначное соответствие между компонентами T_i^0 и T_i^1 множества T: *рёбра* $e \in \mathrm{T}_i^0$ и $u \in \mathrm{T}_i^1$ *соответствуют друг другу*, если и только если для некоторой грани $F \in \mathfrak{F}^3(\mathrm{B}^n)$ справедливы равенства $e = \mathrm{R}_i^0(F)$ и $u = \mathrm{R}_i^1(F)$.

Отношение двойственности на множестве T определим следующим образом: *рёбра* $e, u \in \mathrm{T}$ *связаны отношением двойственности*, если и только если для некоторых $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{0, 1\}$ выполнены включения $e \in \mathrm{T}_i^\delta$, $u \in \mathrm{T}_i^{\delta \oplus 1}$ и рёбра e и u соответствуют друг другу.

Двойственно независимым будем называть такое множество рёбер $A \subseteq \mathrm{E}$, что ни какие два ребра из $A \cap \mathrm{T}$ не связаны отношением двойственности.

Оболочкой ребра $e \in \mathrm{E}$ назовём множество $\langle e \rangle = [e] \setminus \mathrm{e}$. Другими словами оболочка ребра $e \in \mathrm{E}$, концами которого являются (0-1)-рёбра (α^1, β^1) и (α^2, β^2), есть множество $\langle e \rangle$, состоящее из двух (0-1)-пар (α^1, β^2) и (α^2, β^1).

Весом (0-1)-пары $(\alpha, \beta) \in \Phi$ назовём величину $\mathrm{w}((\alpha, \beta))$, равную расстоянию Хэмминга между её концами, т. е. между α и β.

Будем говорить, что (0-1)-*пара* $(\alpha, \beta) \in \Phi$ *является диаметральной для грани* $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$, если $\alpha, \beta \in F$ и $\mathrm{w}((\alpha, \beta)) = \dim(F)$.

Через $\mathrm{D}(F)$ обозначим множество всех (0-1)-пар, являющихся диаметральными для грани $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$.

Множества $\mathrm{D}_i^0(F) = \mathrm{D}(F) \cap \mathrm{X}_i^0$ и $\mathrm{D}(F)_i^1 = \mathrm{D}(F) \cap \mathrm{X}_i^1$ будем называть соответственно *отрицательной* и *положительной компонентой с номером* i *множества* $\mathrm{D}(F)$; $i = 1, \ldots, n$.

Лемма 4. *Если рёбра $e, u \in \mathrm{T}$ не связаны отношением двойственности, то из равенства $\widehat{e} = \widehat{u}$ следует $\langle e\rangle \cap \langle u\rangle \neq \emptyset$.*

Доказательство. При $e = u$ утверждение очевидно.

Пусть $e \neq u$. Тогда в силу предложения 6 из включения $e, u \in \mathrm{T}$ следует $e, u \in \mathfrak{R}^3$. Поэтому грань $F = \widehat{e} = \widehat{u}$, которая по предложению 3 является порождающей для R-множеств e и u, имеет размерность 3. Следовательно, по определению R-множеств и в силу предложения 4 существуют такие $i, j \in \mathrm{Form}(F)$ и $\delta, \sigma \in \{0, 1\}$, что справедливы равенства $e = \mathrm{R}_i^\delta(F)$ и $u = \mathrm{R}_j^\sigma(F)$. При этом поскольку рёбра e и u не связаны отношением двойственности, имеет место неравенство $i \neq j$. Поэтому справедливость неравенства $\langle e\rangle \cap \langle u\rangle \neq \emptyset$ вытекает из очевидного равенства $\langle \mathrm{R}_i^\delta(F)\rangle = \mathrm{D}_i^\delta(F)$ и следующих очевидных (выполненых при $j \neq i$) равенств: $|\langle \mathrm{R}_j^\sigma(F)\rangle \cap \mathrm{D}_i^0(F)| = |\langle \mathrm{R}_j^\sigma(F)\rangle \cap \mathrm{D}_i^1(F)| = 1$. Лемма 4 доказана. □

Лемма 5. *Для любого правильного разбиения V множества* R *и любых двух различных рёбер $e, u \in \mathbb{E}(V)$ справедливо равенство $\langle e\rangle \cap \langle u\rangle = \emptyset$.*

Доказательство. Для произвольных двух различных рёбер $e, u \in \mathbb{E}(V)$ через Q_e и Q_u обозначим блоки разбиения V, для которых выполнены включения $e \in \mathrm{E}(Q_e)$ и $u \in \mathrm{E}(Q_u)$. Тогда при $Q_e = Q_u$ в силу однородности блоков разбиения V существует такая компонента E_i^δ множества E, что $e, u \in \mathrm{E}_i^\delta$. В этом случае равенство $\langle e\rangle \cap \langle u\rangle = \emptyset$ очевидным образом выполнено. Если же $Q_e \neq Q_u$, то равенство $\langle e\rangle \cap \langle u\rangle = \emptyset$ следует из очевидных включений $\langle e\rangle \subseteq [\![Q_e]\!]$, $\langle u\rangle \subseteq [\![Q_u]\!]$ и из попарной непересекаемости прямоугольных окрестностей блоков разбиения V. Лемма 5 доказана. □

Следующее утверждение является основой доказательства теоремы 4.

Лемма 6. *Блоки любого обладающего полным набором маломощных компонент правильного разбиения V множества* R *не содержат* R-*множеств размерности 4.*

Доказательство. Предположим противное: некоторый блок $Q \in V$ содержит R-множество M размерности 4. Тогда в силу предложения 4 и по определению R-множества существует такая грань $F \in \mathfrak{F}^4(\mathrm{B}^n)$ и такие

$i \in \mathrm{Form}(F)$, $\delta \in \{0,1\}$, что имеет место равенство $M = \mathrm{R}_i^\delta(F)$. Из выполненного по предложению 4 равенства $|\mathrm{R}_i^\delta(F)| = 4$ следует $|\mathrm{E}(M)| = 6$. Кроме того очевидно имеет место включение $\mathrm{E}(M) \subseteq \mathrm{T}_i^\delta$, и для любого $e \in \mathrm{E}(M)$ справедливо включение $\widehat{e} \in \mathfrak{F}^3(F)$. Поэтому в силу включения $\mathrm{E}(M) \subseteq \mathrm{E}(Q)$ множество $\mathrm{E}(Q)$ содержит 6 рёбер $e \in \mathrm{T}_i^\delta$, для которых справедливо включение $\widehat{e} \in \mathfrak{F}^3(F)$.

Поскольку V обладает полным набором маломощных компонент, для любого $j \in \mathrm{Form}(F)$ существует такое $\sigma \in \{0,1\}$, что выполнено неравенство $|V_j^\sigma| \leq 3$. Следовательно в силу равенства $|\mathrm{R}_j^\sigma(F)| = 4$ существует такой блок $P \in V_j^\sigma$, что $|P \cap \mathrm{R}_j^\sigma(F)| \geq 2$. Поэтому множество $\mathrm{E}(P)$ содержит ребро $e \in \mathrm{T}_j^\sigma$, для которого справедливо включение $\widehat{e} \in \mathfrak{F}^3(F)$. Поскольку в силу равенства $|\mathrm{Form}(F)| = \dim(F) = 4$ множество $\mathrm{Form}(F)$ кроме i содержит ещё три элемента j_1, j_2, j_3, отсюда следует, что для некоторых $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \{0,1\}$ существует три блока $P_1 \in V_{j_1}^{\sigma_1}$, $P_2 \in V_{j_2}^{\sigma_2}$, $P_3 \in V_{j_3}^{\sigma_3}$ и три соответствующих ребра $e_1 \in \mathrm{T}_{j_1}^{\sigma_1}$, $e_2 \in \mathrm{T}_{j_2}^{\sigma_2}$, $e_3 \in \mathrm{T}_{j_3}^{\sigma_3}$, для которых справедливы включения $e_1 \in \mathrm{E}(P_1)$, $e_2 \in \mathrm{E}(P_2)$, $e_3 \in \mathrm{E}(P_3)$ и $\widehat{e_1}, \widehat{e_2}, \widehat{e_3}, \in \mathfrak{F}^3(F)$.

Заметим, что множество $A = \mathrm{E}(M) \cup \{e_1, e_2, e_3\}$ состоит из 9 рёбер, является двойственно независимым и для него справедливы включения $A \subseteq \mathrm{T}$, $A \subseteq \mathbb{E}(V)$. Поэтому из равенства $|\mathfrak{F}^3(F)| = 8$ следует, что множество A содержит два различных ребра e и u, для которых справедливо равенство $\widehat{e} = \widehat{u}$, и, значит, по лемме 4 для них справедливо неравенство $\langle e \rangle \cap \langle u \rangle \neq \emptyset$. Но это противоречит тому, что по лемме 5 для этих рёбер справедливо равенство $\langle e \rangle \cap \langle u \rangle = \emptyset$. Лемма 6 доказана. □

6 Графы, порождённые правильным разбиением множества R

Для произвольного правильного разбиения V множества R графы $\mathrm{G}(V)$ и $\mathrm{G}_i^\delta(V)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{0,1\}$, определим равенствами

$$\mathrm{G}(V) = \bigcup\nolimits_{Q \in V} \mathrm{K}(Q) \qquad \text{и} \qquad \mathrm{G}_i^\delta(V) = \bigcup\nolimits_{Q \in V_i^\delta} \mathrm{K}(Q).$$

Заметим, что множеством вершин графов $\mathrm{G}(V)$ и $\mathrm{G}_i^\delta(V)$ являются множества соответственно R и R_i^δ, множеством рёбер – множества соответственно $\mathbb{E}(V)$ и $\mathbb{E}_i^\delta(V)$.

Для произвольного ребра $e \in \mathrm{T}$ через e^* обозначим ребро, связанное с e отношением двойственности. Множество $(M)^*$ для произвольного подмножества $M \subseteq \mathrm{T}$ определим равенством $(M)^* = \{e^* \mid e \in M\}$.

Заметим, что для любого $e \in \mathrm{T}$ справедливо равенство $e^{**} = e$ и для любого $M \subseteq \mathrm{T}$ справедливо равенство $((M)^*)^* = M$.

Граф $\widetilde{\mathrm{G}}_i^\delta(V)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{0,1\}$, определим равенством

$$\widetilde{\mathrm{G}}_i^\delta(V) = \mathrm{G}_i^\delta(V) \setminus \left(\mathbb{E}_i^{\delta\oplus 1}(V) \cap \mathrm{T}_i^{\delta\oplus 1}\right)^*.$$

Графы $\mathrm{G}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V)$, $\widetilde{\mathrm{G}}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V)$ и $\mathbb{G}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V)$, $\delta_1,\ldots,\delta_n \in \{0,1\}$, определим равенствами

$$\mathrm{G}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{G}_i^{\delta_i}(V), \qquad \widetilde{\mathrm{G}}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V) = \bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{\mathrm{G}}_i^{\delta_i}(V),$$

$$\mathbb{G}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V) = \mathrm{G}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V) \cup \widetilde{\mathrm{G}}^{\delta_1\oplus 1\ldots\delta_n\oplus 1}(V).$$

Справедливость следующего утверждения вытекает непосредственно из определений отношения двойственности и графа $\mathbb{G}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V)$.

Предложение 8. *Для любого правильного разбиения V множества* R *и любых $\delta_1,\ldots,\delta_n \in \{0,1\}$ множество рёбер графа $\mathbb{G}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V)$ является двойственно независимым подмножеством множества $\mathbb{E}(V)$.*

Суть доказательства теоремы 4 заключается в получении для произвольного удовлетворяющего условию этой теоремы разбиения V верхней и нижней оценок числа рёбер графа $\mathbb{G}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V)$ и в подборе таких $\delta_1,\ldots,\delta_n \in \{0,1\}$, при которых эти оценки противоречат друг другу.

Для произвольного графа G через $|G|$ обозначим число рёбер этого графа.

Через Φ_k обозначим множество всех (0-1)-пар из Φ, имеющих вес k; $k = 1,\ldots,n$.

Заметим, что справедливо равенство $\Phi_1 = \mathrm{R}$.

Лемма 7. *При $n \geq 2$ для любого правильного разбиения V множества* R *и любых $\delta_1,\ldots,\delta_n \in \{0,1\}$ справедливо неравенство*

$$|\mathbb{G}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V)| \leq \frac{|\Phi| - |\mathrm{R}|}{2} - \frac{1}{4}|\Phi_3|. \tag{3}$$

Доказательство. Из предложения 8 и леммы 5 следует, что оболочки рёбер графа $\mathbb{G}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V)$ попарно не пересекаются. Непосредственно из определения ребра $e \in \mathrm{E}$ и его оболочки следует $\mathrm{length}(e) \geq 2$, $\langle e\rangle \subseteq \Phi_{\mathrm{length}(e)+1}$ и $|\langle e\rangle| = 2$. Поэтому оболочки рёбер графа $\mathbb{G}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V)$ являются подмножествами множества $\Phi \setminus \Phi_1$ и следовательно справедливо неравенство $|\mathbb{G}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V)| \leq \frac{1}{2}(|\Phi| - |\mathrm{R}|)$. В силу этого для доказательства неравенства (3) достаточно показать, что оболочки имеющих длину 2 рёбер графа $\mathbb{G}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V)$ содержат не более половины (0-1)-пар из множества Φ_3. Предположив противное, следующим образом придём к противоречию.

Заметим, что семейство множеств $\{\mathrm{D}(F) \mid F \in \mathfrak{F}^3(\mathrm{B}^n)\}$ является разбиением множества Φ_3 и для любой грани $F \in \mathfrak{F}^3(\mathrm{B}^n)$ справедливо равенство $|\mathrm{D}(F)| = 4$. Кроме того для любого ребра $e \in \mathrm{T}$ справедливы включения $\widehat{e} \in \mathfrak{F}^3(\mathrm{B}^n)$ и $\langle e\rangle \subseteq \mathrm{D}(\widehat{e})$. В силу этого и поскольку оболочка любого ребра состоит из двух (0-1)-пар, среди имеющих длину 2 рёбер графа $\mathbb{G}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V)$ найдутся два различных ребра e и u, для которых справедливо равенство $\widehat{e} = \widehat{u}$ (иначе наше предположение неверно). По предложению 8 и лемме 4 для оболочек этих рёбер справедливо неравенство $\langle e\rangle \cap \langle u\rangle \neq \emptyset$. Это противоречит тому, что оболочки рёбер графа $\mathbb{G}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V)$ попарно не пересекаются. Лемма 7 доказана. $\square$

Следствие 2. *При $n \geq 2$ для любого правильного разбиения V множества* R *и любых $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \{0,1\}$ справедливо неравенство*

$$\left|\mathbb{G}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V)\right| \leq \frac{(2^{n-1})^2 - n2^{n-1}}{2} - \frac{1}{4}\binom{n}{3}2^{n-1}.$$ [2]

7 Нижняя оценка числа рёбер графа $\mathbb{G}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V)$

Непосредственно из определения графа $\mathbb{G}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V)$ следует

$$|\mathbb{G}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V)| = |\mathrm{G}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V)| + |\widetilde{\mathrm{G}}^{\delta_1\oplus 1\ldots\delta_n\oplus 1}(V)|.$$

Оценим по отдельности величины $|\mathrm{G}^{\delta_1\ldots\delta_n}(V)|$ и $|\widetilde{\mathrm{G}}^{\delta_1\oplus 1\ldots\delta_n\oplus 1}(V)|$.

Для произвольного целого положительного k через Z^k обозначим множество всех целочисленных наборов $z = (z_1, \ldots, z_k)$ и пусть

$$\mathfrak{M}(k) = \{z \in \mathrm{Z}^k \mid 1 \leq z_1 \leq \ldots \leq z_k\}.$$

Величины $\|z\|_{\mathrm{C}}$ и $\|z\|_{\mathrm{T}}$ для произвольного $z \in \mathfrak{M}(k)$ определим равенствами

$$\|z\|_{\mathrm{C}} = \sum_{i=1}^{k}\binom{z_i}{2} \qquad \text{и} \qquad \|z\|_{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{k}\left\lfloor\frac{(z_i-1)^2}{4}\right\rfloor.$$ [3]

Для произвольного целого положительного $S \geq k$ множество $\mathfrak{M}(k,S)$ определим равенством

$$\mathfrak{M}(k,S) = \{z \in \mathfrak{M}(k) \mid \sum_{i=1}^{k} z_i = S\}.$$

Заметим, что существует единственный набор $z \in \mathfrak{M}(k,S)$, компоненты которого отличаются друг от друга не более чем на 1. Этот набор назовём *максимально равномерным* и обозначим его $\mathrm{m}(k,S)$.

Лемма 8. *При любых целых k, S, $1 \leq k \leq S$, для любого $z \in \mathfrak{M}(k,S)$ справедливы неравенства*

$$\|z\|_{\mathrm{C}} \geq \|\mathrm{m}(k,S)\|_{\mathrm{C}} \qquad \text{и} \qquad \|z\|_{\mathrm{T}} \geq \|\mathrm{m}(k,S)\|_{\mathrm{T}}.$$

Доказательство. Для произвольных двух номеров i, j, $1 \leq i < j \leq k$, отображение $\mathrm{O}_{i,j} : \mathrm{Z}^k \to \mathrm{Z}^k$ определим следующим правилом:

$$\mathrm{O}_{i,j}(z) = (z_1, \ldots, z_{i-1},\ z_i - 1,\ z_{i+1}, \ldots, z_{j-1},\ z_j + 1,\ z_{j+1}, \ldots, z_k).$$

Это отображение назовём *операцией переноса единицы* (слева направо) из разряда с номером i в разряд с номером j.

[2] $\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}$.

[3] $\lfloor x\rfloor$ – наибольшее целое число, не превосходящее x.

Очевидно для любого отличного от $\mathrm{m}(k,S)$ набора $z \in \mathfrak{M}(k,S)$ найдётся такая последовательность операций переноса единицы, которая, не выводя за пределы множества $\mathfrak{M}(k,S)$, переведёт набор $\mathrm{m}(k,S)$ в z.

Осталось заметить, что для любого набора $z \in \mathfrak{M}(k,S)$ из включения $\mathrm{O}_{i,j}(z) \in \mathfrak{M}(k,S)$ следует $2 \le z_i \le z_j$ а, значит, справедливы неравенства

$$\|\mathrm{O}_{i,j}(\overline{z})\|_{\mathrm{C}} - \|\overline{z}\|_{\mathrm{C}} = \tbinom{z_j+1}{2} + \tbinom{z_i-1}{2} - \tbinom{z_j}{2} - \tbinom{z_i}{2} = z_j - z_i + 1 > 0,$$

$$\begin{aligned}\|\mathrm{O}_{i,j}(z)\|_{\mathrm{T}} - \|z\|_{\mathrm{T}} &= \left\lfloor \tfrac{z_j^2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{(z_i-2)^2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \tfrac{(z_j-1)^2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \tfrac{(z_i-1)^2}{4} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \tfrac{z_j}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \tfrac{z_i-1}{2} \right\rfloor \ge 0.\end{aligned}$$

Лемма 8 доказана. □

Лемма 9. *При любых целых k, S, $1 \le k \le S$, для любого $z \in \mathfrak{M}(k,S)$ справедлив неравенство*

$$\|z\|_{\mathrm{C}} \ge \frac{S^2}{2k} - \frac{S}{2}.$$

Доказательство. Утверждение леммы является простым следствием неравенства $k\sum\limits_{i=1}^{k} z_i^2 \ge (\sum\limits_{i=1}^{k} z_i)^2$ (неравенство Коши-Буняковского):

$$\|z\|_{\mathrm{C}} = \sum_{i=1}^{k} \binom{z_i}{2} = \sum_{i=1}^{k} \frac{z_i(z_i-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} z_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} z_i \ge \frac{S^2}{2k} - \frac{S}{2}.$$

Лемма 9 доказана. □

Лемма 10. *При $n \ge 2$ для любого правильного разбиения V множества* R *и любых $\delta_1, \dots, \delta_n \in \{0,1\}$ справедливы неравенства*

$$\left|\mathrm{G}^{\delta_1\dots\delta_n}(V)\right| \ge \|\mathrm{m}(|V^{\delta_1\dots\delta_n}|, n2^{n-2})\|_{\mathrm{C}},$$

$$\left|\mathrm{G}^{\delta_1\dots\delta_n}(V)\right| \ge \frac{1}{2}\left(\frac{(n2^{n-2})^2}{|V^{\delta_1\dots\delta_n}|} - n2^{n-2}\right).$$

Доказательство. Поскольку множество $V^{\delta_1\dots\delta_n}$ является разбиением множества $\mathrm{R}^{\delta_1\dots\delta_n}$, выполнено равенство $\sum_{Q\in V^{\delta_1\dots\delta_n}} |Q| = |\mathrm{R}^{\delta_1\dots\delta_n}|$. Поэтому из определения графа $\mathrm{G}^{\delta_1\dots\delta_n}(V)$, лемм 8, 9 и равенства $|\mathrm{R}^{\delta_1\dots\delta_n}| = n2^{n-2}$ следует

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{G}^{\delta_1\dots\delta_n}(V)\right| &= \sum_{i=1}^{n}\left|\mathrm{G}_i^{\delta_i}(V)\right| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{Q\in V_i^{\delta_i}} |\mathrm{K}(Q)| = \sum_{Q\in V^{\delta_1\dots\delta_n}} |\mathrm{K}(Q)| \\ &= \sum_{Q\in V^{\delta_1\dots\delta_n}} \tbinom{|Q|}{2} \ge \left\|\mathrm{m}\left(|V^{\delta_1\dots\delta_n}|, n2^{n-2}\right)\right\|_{\mathrm{C}} \ge \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{(n2^{n-2})^2}{|V^{\delta_1\dots\delta_n}|} - n2^{n-2}\right).\end{aligned}$$

Лемма 10 доказана. □

Лемма 11. *При* $n \geq 2$ *для любого обладающего полным набором маломощных компонент правильного разбиения* V *множества* R *и любых* $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \{0,1\}$ *справедливо неравенство*

$$\left|\widetilde{\mathrm{G}}^{\delta_1 \ldots \delta_n}(V)\right| \geq \left\|\mathrm{m}\left(|V^{\delta_1 \ldots \delta_n}|, n2^{n-2}\right)\right\|_{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

Доказательство. Неравенство (4) является следствием того, что участвующие в определении графов $\widetilde{\mathrm{G}_i^{\delta}}(V)$ множества

$$\left(\mathbb{E}_i^{\delta\oplus 1}(V) \cap \mathrm{T}_i^{\delta\oplus 1}\right)^*, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad \delta = 0, 1, \tag{5}$$

не содержат треугольников. Здесь используется терминология теории графов, и под *треугольником* понимается либо множество рёбер $\mathrm{E}(M)$ полного трёхвершинного графа $\mathrm{K}(M)$, $M \subseteq \mathrm{R}_i^{\delta}$, $|M| = 3$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{0,1\}$, либо сам этот граф.

Сначала покажем, что множества (5) действительно не содержат треугольников.

Предположим противное: для некоторых $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{0,1\}$ множество $(\mathbb{E}_i^{\delta\oplus 1}(V) \cap \mathrm{T}_i^{\delta\oplus 1})^*$ содержит некоторый треугольник $\mathrm{E}(M)$. Без ограничения общности полагаем $\delta = 1$ и пусть $A = (\mathbb{E}_i^0(V) \cap \mathrm{T}_i^0)^*$. Тогда из включений $\mathrm{E}(M) \subseteq A \subseteq \mathrm{T}_i^1$ следует $M \subseteq \mathrm{R}_i^1$, $(\mathrm{E}(M))^* \subseteq \mathrm{T}_i^0$. И очевидно справедливо равенство $|(\mathrm{E}(M))^*| = 3$.

Через Y обозначим множество всех (0-1)-рёбер, являющихся концами рёбер из множества $(\mathrm{E}(M))^*$. Очевидно выполнено включение $Y \subseteq \mathrm{R}_i^0$. Через Z обозначим граф с множеством вершин Y и множеством рёбер $(\mathrm{E}(M))^*$, и пусть $F = \widehat{Y}$.

Нетрудно понять, что граф Z является *звездой с тремя лучами*, т. е. все три его ребра имеют общий конец; и при этом выполнены равенства $\dim(F) = 4$ и $Y = \mathrm{R}_i^0(F)$. Поясним это следующим образом.

Через r_1, r_2, r_3 обозначим (0-1)-рёбра из M, и через α^1, α^2, α^3 – соответственно их чётные концы. Тогда из включения $M \subseteq \mathrm{R}_i^1$ следуют равенства $\alpha_i^1 = \alpha_i^2 = \alpha_i^3 = 0$ и

$$r_1 = (\alpha^1, \alpha^1 + \mathbf{e}^i), \quad r_2 = (\alpha^2, \alpha^2 + \mathbf{e}^i), \quad r_3 = (\alpha^3, \alpha^3 + \mathbf{e}^i).$$

Через e_1, e_2, e_3 обозначим рёбра из $\mathrm{E}(M)$: $e_1 = \{r_1, r_2\}$, $e_2 = \{r_2, r_3\}$, $e_3 = \{r_3, r_1\}$. Тогда из включения $\mathrm{E}(M) \subseteq \mathrm{T}_i^1 \subseteq \mathrm{T}$ следует

$$\mathrm{length}(e_1) = \mathrm{length}(e_2) = \mathrm{length}(e_3) = 2.$$

Поэтому существуют такое $\beta \in \mathrm{B}^n$ и такие $j_1, j_2, j_3 \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$, что выполнены равенства

$$\alpha^1 = \beta + \mathbf{e}^{j_1}, \quad \alpha^2 = \beta + \mathbf{e}^{j_2}, \quad \alpha^3 = \beta + \mathbf{e}^{j_3}.$$

Наборы $\beta^1, \beta^2, \beta^3 \in \mathrm{B}^n$ определим равенствами

$$\beta^1 = \beta + \mathbf{e}^{j_1} + \mathbf{e}^{j_2}, \quad \beta^2 = \beta + \mathbf{e}^{j_2} + \mathbf{e}^{j_3}, \quad \beta^3 = \beta + \mathbf{e}^{j_3} + \mathbf{e}^{j_1}.$$

Тогда очевидно для рёбер из $(\mathrm{E}(M))^*$ выполнены равенства

$$e_1^* = \{(\beta + \mathbf{e}^i, \beta), (\beta^1 + \mathbf{e}^i, \beta^1)\}, \qquad e_2^* = \{(\beta + \mathbf{e}^i, \beta), (\beta^2 + \mathbf{e}^i, \beta^2)\},$$
$$e_3^* = \{(\beta + \mathbf{e}^i, \beta), (\beta^3 + \mathbf{e}^i, \beta^3)\}.$$

Из этих равенств следует, что (0-1)-ребро $(\beta + \mathbf{e}^i, \beta)$ является их общим концом, справедливы равенства $|Y| = 4$, $\mathrm{Form}(F) = \{i, j_1, j_2, j_3\}$ и включение $Y \subseteq \mathrm{R}_i^0(F)$. Из первого равенства, включения и предложения 4 следует $Y = \mathrm{R}_i^0(F)$. Из второго равенства следует $\dim(F) = 4$. Что и требовалось пояснить.

Заметим, что концы любого ребра $e \in \mathbb{E}(V)$ принадлежат одному и тому же блоку разбиения V. Значит, поскольку граф Z является звездой, из включения

$$(\mathrm{E}(M))^* \subseteq A^* = ((\mathbb{E}_i^0(V) \cap \mathrm{T}_i^0)^*)^* = \mathbb{E}_i^0(V) \cap \mathrm{T}_i^0 \subseteq \mathbb{E}_i^0(V) \subseteq \mathbb{E}(V)$$

следует, что для некоторого блока $Q \in V$ справедливо включение $Y = \mathrm{R}_i^0(F) \subseteq Q$. Но это противоречит тому, что в силу леммы 6 блоки разбиения V не содержат R-множеств размерности 4. Значит, наше предположение неверно и множества (5) не содержат треугольников.

Теперь докажем справедливость неравенства (4). Для этого мы воспользуемся следствием известной теоремы Турана [10]:

Теорема 5. *Наибольшее число рёбер у графов, имеющих q вершин и не содержащих треугольников, равно $\lfloor q^2/4 \rfloor$.*

Следствие 3. *Наименьшее число рёбер у графов, имеющих q вершин, и в дополнении которых нет треугольников, равно $\lfloor (q-1)^2/4 \rfloor$.*

Поскольку множества (5) не содержат треугольников, по определению графа $\widetilde{\mathrm{G}}_i^\delta(V)$ и в силу следствия 3 имеем

$$|\widetilde{\mathrm{G}}_i^\delta(V)| = \left|\mathrm{G}_i^\delta(V) \setminus \left(\mathbb{E}(V_i^{\delta\oplus 1}) \cap \mathrm{T}_i^{\delta\oplus 1}\right)^*\right|$$
$$= \sum_{Q \in V_i^\delta} \left|\mathrm{K}(Q) \setminus \left(\mathbb{E}(V_i^{\delta\oplus 1}) \cap \mathrm{T}_i^{\delta\oplus 1}\right)^*\right| \geq \sum_{Q \in V_i^\delta} \left\lfloor \frac{(|Q|-1)^2}{4} \right\rfloor.$$

Поэтому из равенства $\sum\limits_{Q \in V^{\delta_1 \ldots \delta_n}} |Q| = |\mathrm{R}^{\delta_1 \ldots \delta_n}| = n 2^{n-2}$ и леммы 8 следует

$$\left|\widetilde{\mathrm{G}}^{\delta_1 \ldots \delta_n}(V)\right| = \sum_{i=1}^n \left|\widetilde{\mathrm{G}}_i^{\delta_i}(V)\right| = \sum_{i=1}^n \sum_{Q \in V_i^{\delta_i}} \left\lfloor \frac{(|Q|-1)^2}{4} \right\rfloor$$
$$= \sum_{Q \in V_i^{\delta_1 \ldots \delta_n}} \left\lfloor \frac{(|Q|-1)^2}{4} \right\rfloor \geq \left\|\mathrm{m}\left(|V^{\delta_1 \ldots \delta_n}|, n 2^{n-2}\right)\right\|_{\mathrm{T}}.$$

Лемма 11 доказана. □

Лемма 12. *Для любых целых k, S, $1 \leq k < S$, справедливо неравенство*

$$\|\mathrm{m}(k, S)\|_{\mathrm{T}} \geq \|\mathrm{m}(k+1, S)\|_{\mathrm{T}}.$$

Доказательство. Через p, x, y обозначим целые числа, для которых выполнены соотношения

$$\mathrm{m}(k,S) = (\underbrace{p,\dots,p}_{x},\underbrace{p+1,\dots,p+1}_{y}), \qquad 1 \le y \le k.$$

Тогда очевидно имеет место равенство

$$\mathrm{m}(k,S-1) = (\underbrace{p,\dots,p}_{x+1},\underbrace{p+1,\dots,p+1}_{y-1}).$$

Поэтому справедливо неравенство

$$\|\mathrm{m}(k,S)\|_{\mathrm{T}} - \|\mathrm{m}(k,S-1)\|_{\mathrm{T}} = \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(p-1)^2}{4} \right\rfloor \ge 0.$$

Через $\mathrm{m}^{(1)}(k,S-1)$ обозначим набор $z \in \mathfrak{M}(k+1,S)$, для которого выполнены равенства $z_1 = 1$ и $(z_2,\dots,z_{k+1}) = \mathrm{m}(k,S-1)$. Очевидно для этого набора справедливо равенство $\|\mathrm{m}^{(1)}(k,S-1)\|_{\mathrm{T}} = \|\mathrm{m}(k,S-1)\|_{\mathrm{T}}$. Отсюда и из леммы 8 следует

$$\|\mathrm{m}(k,S)\|_{\mathrm{T}} \ge \|\mathrm{m}(k,S-1)\|_{\mathrm{T}} = \| \mathrm{m}^{(1)}(k,S-1)\|_{\mathrm{T}} \ge \|\mathrm{m}(k+1,S)\|_{\mathrm{T}}$$

Лемма 12 доказана. □

Следствие 4. *Для любых целых p, k, S, $1 \le p \le S$, $1 \le k \le S$, из неравенства $p \le k$ следует $\|\mathrm{m}(p,S)\|_{\mathrm{T}} \ge \|\mathrm{m}(k,S)\|_{\mathrm{T}}$.*

8 Доказательство теоремы 4

Предположим противное: при некотором $n \in \{5,6,7\}$ существует правильное разбиение V множества R, для которого справедливы неравенства (1), (2).

Выберем $\delta_1,\dots,\delta_n \in \{0,1\}$ так, чтобы были выполнены неравенства

$$|V_i^{\delta_i}| \le |V_i^{\delta_i \oplus 1}|, \quad i = 1,\dots,n. \tag{6}$$

Покажем, что при этих $\delta_1,\dots,\delta_n$ нижняя и верхняя оценки числа рёбер графа $\mathbb{G}^{\delta_1\dots\delta_n}$ противоречат друг другу.

Непосредственно из определения множеств $V^{\delta_1\dots\delta_n}$, $V^{\delta_1\oplus 1\dots\delta_n\oplus 1}$ и V следует

$$|V^{\delta_1\dots\delta_n}| + |V^{\delta_1\oplus 1\dots\delta_n\oplus 1}| = |V|.$$

Поэтому из неравенств (1), (2), (6) следует

$$|V^{\delta_1\dots\delta_n}| \le \min\left\{3n, \frac{n^2 + (n - 2^{\lfloor \log_2 n\rfloor})n - 2(n - 2^{\lfloor \log_2 n\rfloor})^2}{2}\right\}, \tag{7}$$

$$|V^{\delta_1\oplus 1\dots\delta_n\oplus 1}| \le n^2 + (n - 2^{\lfloor \log_2 n\rfloor})n - 2(n - 2^{\lfloor \log_2 n\rfloor})^2 - |V^{\delta_1\dots\delta_n}|. \tag{8}$$

Далее, чтобы не загромождать изложение, без ограничения общности полагаем $\delta_1 = \ldots = \delta_n = 0$.

Рассмотрим случай $n = 5$. В этом случае неравенства (7), (8) имеют вид

$$|V^{00000}| \le 14, \qquad |V^{11111}| \le 28 - |V^{00000}|.$$

При $|V^{00000}| = 14$ из первого неравенства леммы 10 следует

$$\left|\mathrm{G}^{00000}(V)\right| \ge \|\mathrm{m}(|V^{00000}|, 40)\|_{\mathrm{C}} = \|\mathrm{m}(14, 40)\|_{\mathrm{C}}.$$

Поэтому из равенства $\mathrm{m}(14, 40) = (\underbrace{2, 2}_{2}, \underbrace{3, \ldots, 3}_{12})$ следует

$$\left|\mathrm{G}^{00000}(V)\right| \ge 2 \cdot \binom{2}{2} + 12 \cdot \binom{3}{2} = 38.$$

Отсюда и из второго неравенства леммы 10 вытекает следующая нижняя оценка числа рёбер графа $\mathrm{G}^{00000}(V)$:

$$\left|\mathrm{G}^{00000}(V)\right| \ge \begin{cases} 38 & \text{при} \ |V^{00000}| = 14, \\ 42 & \text{при} \ |V^{00000}| = 13, \\ 46 & \text{при} \ |V^{00000}| = 12, \\ 52 & \text{при} \ |V^{00000}| \le 11. \end{cases} \tag{9}$$

В силу леммы 11 и следствия 4 имеем

$$\left|\widetilde{\mathrm{G}}^{11111}(V)\right| \ge \left\|\mathrm{m}\left(|V^{11111}|, 40\right)\right\|_{\mathrm{T}} \ge \left\|\mathrm{m}\left(28 - |V^{00000}|, 40\right)\right\|_{\mathrm{T}}.$$

Поэтому при $|V^{00000}| = 14$ из равенства $28 - |V^{00000}| = 14$ и равенства

$$\mathrm{m}(14, 40) = (\underbrace{2, 2}_{2}, \underbrace{3, \ldots, 3}_{12})$$

следует

$$|\widetilde{\mathrm{G}}^{11111}(V)| \ge \|\mathrm{m}(14, 40)\|_{\mathrm{T}} = 2 \cdot \left\lfloor \frac{(2-1)^2}{4} \right\rfloor + 12 \cdot \left\lfloor \frac{(3-1)^2}{4} \right\rfloor = 12.$$

При $|V^{00000}| = 13$ из равенства $28 - |V^{00000}| = 15$ и равенства

$$\mathrm{m}(15, 40) = (\underbrace{2, \ldots, 2}_{5}, \underbrace{3, \ldots, 3}_{10})$$

следует

$$|\widetilde{\mathrm{G}}^{11111}(V)| \ge \|\mathrm{m}(15, 40)\|_{\mathrm{T}} = 5 \cdot \left\lfloor \frac{(2-1)^2}{4} \right\rfloor + 10 \cdot \left\lfloor \frac{(3-1)^2}{4} \right\rfloor = 10.$$

При $|V^{00000}| = 12$ из равенства $28 - |V^{00000}| = 16$ и равенства

$$\mathrm{m}(16, 40) = (\underbrace{2, \ldots, 2}_{8}, \underbrace{3, \ldots, 3}_{8})$$

следует

$$|\widetilde{\mathrm{G}}^{11111}(V)| \ge \|\mathrm{m}(16, 40)\|_{\mathrm{T}} = 8 \cdot \left\lfloor \frac{(2-1)^2}{4} \right\rfloor + 8 \cdot \left\lfloor \frac{(3-1)^2}{4} \right\rfloor = 8.$$

Поэтому имеет место следующая нижняя оценка числа рёбер графа $\widetilde{\mathrm{G}}^{11111}(V)$:

$$\left|\widetilde{\mathrm{G}}^{11111}(V)\right| \geq \begin{cases} 12 & \text{при } |V^{00000}| = 14, \\ 10 & \text{при } |V^{00000}| = 13, \\ 8 & \text{при } |V^{00000}| = 12. \\ 0 & \text{при } |V^{00000}| \leq 11. \end{cases} \tag{10}$$

Из определения графа $\mathbb{G}^{00000}(V)$ и неравенств (9), (10) следует

$$|\mathbb{G}^{00000}(V)| = |\mathrm{G}^{00000}(V)| + |\widetilde{\mathrm{G}}^{11111}(V)| \geq 52.$$

Это противоречит тому, что в силу следствия 2 выполнено неравенство

$$|\mathbb{G}^{00000}(V)| \leq 48.$$

Рассмотрим случай $n = 6$. В этом случае неравенства (7), (8) имеют вид

$$|V^{000000}| \leq 18, \qquad |V^{111111}| \leq 40 - |V^{000000}|.$$

Из второго неравенства леммы 10 вытекает следующая нижняя оценка числа рёбер графа $\mathrm{G}^{000000}(V)$:

$$\left|\mathrm{G}^{000000}(V)\right| \geq \begin{cases} 208 & \text{при } |V^{000000}| = 18, \\ 223 & \text{при } |V^{000000}| = 17, \\ 240 & \text{при } |V^{000000}| = 16, \\ 259 & \text{при } |V^{000000}| \leq 15. \end{cases} \tag{11}$$

В силу леммы 11 и следствия 4 имеем

$$\left|\widetilde{\mathrm{G}}^{111111}(V)\right| \geq \left\|\mathrm{m}\left(|V^{111111}|, 96\right)\right\|_{\mathrm{T}} \geq \left\|\mathrm{m}\left(40 - |V^{000000}|, 96\right)\right\|_{\mathrm{T}}.$$

Поэтому при $|V^{000000}| = 18$ из равенства $40 - |V^{000000}| = 22$ и равенства

$$\mathrm{m}(22, 96) = (\underbrace{4, \ldots, 4}_{14}, \underbrace{5, \ldots, 5}_{8})$$

следует

$$|\widetilde{\mathrm{G}}^{111111}(V)| \geq \|\mathrm{m}(22, 96)\|_{\mathrm{T}} = 14 \cdot \left\lfloor \frac{(4-1)^2}{4} \right\rfloor + 8 \cdot \left\lfloor \frac{(5-1)^2}{4} \right\rfloor = 60.$$

При $|V^{000000}| = 17$ из равенства $40 - |V^{000000}| = 23$ и равенства

$$\mathrm{m}(23, 96) = (\underbrace{4, \ldots, 4}_{19}, \underbrace{5, \ldots, 5}_{4})$$

следует

$$|\widetilde{\mathrm{G}}^{111111}(V)| \geq \|\mathrm{m}(23, 96)\|_{\mathrm{T}} = 19 \cdot \left\lfloor \frac{(4-1)^2}{4} \right\rfloor + 4 \cdot \left\lfloor \frac{(5-1)^2}{4} \right\rfloor = 54.$$

При $|V^{000000}| = 16$ из равенства $40 - |V^{000000}| = 24$ и равенства

$$\mathrm{m}(24, 96) = (\underbrace{4, \ldots, 4}_{24})$$

следует

$$|\widetilde{\mathrm{G}}^{111111}(V)| \geq \|\mathrm{m}(24,96)\|_{\mathrm{T}} = 24 \cdot \left\lfloor \frac{(4-1)^2}{4} \right\rfloor = 48.$$

Поэтому имеет место следующая нижняя оценка числа рёбер графа $\widetilde{\mathrm{G}}^{111111}(V)$:

$$\left|\widetilde{\mathrm{G}}^{11111}(V)\right| \geq \begin{cases} 60 & \text{при} \quad |V^{000000}| = 18, \\ 54 & \text{при} \quad |V^{000000}| = 17, \\ 48 & \text{при} \quad |V^{000000}| = 16, \\ 0 & \text{при} \quad |V^{000000}| \leq 15. \end{cases} \tag{12}$$

Из определения графа $\mathbb{G}^{000000}(V)$ и неравенств (11) и (12) следует

$$|\mathbb{G}^{000000}(V)| = |\mathrm{G}^{000000}(V)| + |\widetilde{\mathrm{G}}^{111111}(V)| \geq 259.$$

Это противоречит тому, что в силу следствия 2 выполнено неравенство

$$|\mathbb{G}^{000000}(V)| \leq 256.$$

Рассмотрим случай $n = 7$. В этом случае неравенства (7), (8) имеют вид

$$|V^{0000000}| \leq 21, \qquad |V^{1111111}| \leq 52 - |V^{0000000}|.$$

Из второго неравенства леммы 10 вытекает следующая нижняя оценка числа рёбер графа $\mathrm{G}^{0000000}(V)$:

$$\left|\mathrm{G}^{0000000}(V)\right| \geq \begin{cases} 1082 & \text{при} \quad |V^{0000000}| = 21, \\ 1142 & \text{при} \quad |V^{0000000}| = 20, \\ 1208 & \text{при} \quad |V^{0000000}| = 19, \\ 1281 & \text{при} \quad |V^{0000000}| \leq 18. \end{cases} \tag{13}$$

В силу леммы 11 и следствия 4 имеем

$$\left|\widetilde{\mathrm{G}}^{1111111}(V)\right| \geq \left\|\mathrm{m}\left(|V^{1111111}|, 224\right)\right\|_{\mathrm{T}} \geq \left\|\mathrm{m}\left(52 - |V^{0000000}|, 224\right)\right\|_{\mathrm{T}}.$$

Поэтому при $|V^{0000000}| = 21$ из равенства $52 - |V^{0000000}| = 31$ и равенства

$$\mathrm{m}(31, 224) = (\underbrace{7, \ldots, 7}_{24}, \underbrace{8, \ldots, 8}_{7})$$

следует

$$|\widetilde{\mathrm{G}}^{1111111}(V)| \geq \|\mathrm{m}(31,224)\|_{\mathrm{T}} = 24 \cdot \left\lfloor \frac{(7-1)^2}{4} \right\rfloor + 7 \cdot \left\lfloor \frac{(8-1)^2}{4} \right\rfloor = 300.$$

При $|V^{0000000}| = 20$ из равенства $52 - |V^{0000000}| = 32$ и равенства

$$\mathrm{m}(32, 224) = (\underbrace{7, \ldots, 7}_{32})$$

следует

$$|\widetilde{\mathrm{G}}^{1111111}(V)| \geq \|\mathrm{m}(32,224)\|_{\mathrm{T}} = 32 \cdot \left\lfloor \frac{(7-1)^2}{4} \right\rfloor = 288.$$

При $|V^{0000000}| = 19$ из равенства $52 - |V^{0000000}| = 33$ и равенства
$$\mathrm{m}(33, 224) = (\underbrace{6, \ldots, 6}_{7}, \underbrace{7, \ldots, 7}_{26})$$
следует
$$|\widetilde{\mathrm{G}}^{1111111}(V)| \geq \|\mathrm{m}(33, 224)\|_{\mathrm{T}} = 7 \cdot \left\lfloor \frac{(6-1)^2}{4} \right\rfloor + 26 \cdot \left\lfloor \frac{(7-1)^2}{4} \right\rfloor = 276.$$

Поэтому имеет место следующая нижняя оценка числа рёбер графа $\widetilde{\mathrm{G}}^{1111111}(V)$:
$$\left|\widetilde{\mathrm{G}}^{11111}(V)\right| \geq \begin{cases} 300 & \text{при} \quad |V^{0000000}| = 21, \\ 288 & \text{при} \quad |V^{0000000}| = 20, \\ 276 & \text{при} \quad |V^{0000000}| = 19, \\ 0 & \text{при} \quad |V^{0000000}| \leq 18. \end{cases} \tag{14}$$

Из определения графа $\mathbb{G}^{0000000}(V)$ и неравенств (13) и (14) следует
$$|\mathbb{G}^{0000000}(V)| = |\mathrm{G}^{0000000}(V)| + |\widetilde{\mathrm{G}}^{1111111}(V)| \geq 1281.$$
Это противоречит тому, что в силу следствия 2 выполнено неравенство
$$|\mathbb{G}^{0000000}(V)| \leq 1264.$$

Таким образом наше предположение неверно. Поэтому при $n = 5, 6, 7$ не существует такого правильного разбиения V множества R, для которого выполнены неравенства (1) и (2).

Теорема 4 доказана.

References

[1] S. V. Yablonskii, *Realization of a linear function in the class of π-circuits*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Nov. Ser., **94**:5, (1954), 805–806.

[2] V. M. Khrapchenko, *Complexity of the realization of a linear function in the class of Π-circuits*, Mat. Zametki, **9**:1 (1971), 35–40.

[3] V. M. Khrapchenko, *A method of determining lower bounds for the complexity of Π-schemes*, Mat. Zametki, **10**:1, (1971), 83–92.

[4] V. M. Khrapchenko, *A simplified proof of a lower complexity estimate*, Discrete Mathematics, **25**:2, (2013), 82–84.

[5] D. Yu. Cherukhin, *To the question of a logical representation for the parity counter*, Neform. Nauka **2**, (2009), 14–23.

[6] K. L. Rychkov, *Lower bounds on the formyla complexity of a linear Boolean function*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **11**, (2014), 165–184.

[7] K. L. Rychkov, *Complexity of the realization of a linear boolean function in the class of π-schemes*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **25**:3, (2018), 36–94.

[8] K. L. Rychkov, *On the characteristic property of one class of normalized formulas calculating linear Boolean functio*
Siberian Electronic Mathematical Reports, **21**:2, (2024), 1522–1548.

[9] B. A. Subbotovskaya, *Realization of linear functions by formulas using $\vee$, $\wedge$, $^-$*, Dokl. Akad. Nauk, **136**:3, (1961), 553–555.

[10] F. Harary, *Graph Theory*, London: Addison-Wesley, 1969.

Konstantin Leonidovich Rychkov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: rychkov@math.nsc.ru