S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2025) УДК 517.95
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 35Q35

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ–КОНВЕКЦИИ

Р.В. Бризицкий

AND **Ж.Ю. Сарицкая**

Abstract: The local existence and uniqueness of a strong solution to inhomogeneous boundary value problem for the reaction–diffusion–convection equation with variable coefficients is proved and its apriory estimate is obtained. For the boundary value problem under consideration, a control problem is studied for which an optimality system is derived.

Keywords: nonlinear reaction–diffusion–convection equation, variable coefficients, weak solution, maximum principle, strong solution, control problem, extremum problem, optimality system

---

Brizitskii, R.V. and Saritskaia, Zh.Yu. On properties of solutions to boundary value and extremum problems for nonlinear reaction–diffusion–convection equation.

Работа выполнена в рамках госзадания Института прикладной математики ДВО РАН (075-00459-25-00).

Поступила 30 июля 2025 г., опубликована 31 декабря 2025 г.

1 Введение. Постановка краевой задачи

Настоящая работа продолжает исследования статьи [1], в которой доказано глобальное существование слабого решения следующей краевой задачи, рассматриваемой в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ:

$$-\mathrm{div}(\lambda(\varphi)\nabla\varphi) + k(\varphi, \mathbf{x})\varphi + \mathbf{u} \cdot \nabla\varphi = f \text{ в } \Omega, \ \varphi = \psi \text{ на } \Gamma. \tag{1}$$

Здесь φ – концентрация (загрязняющего) вещества, $\mathbf{u}$ – заданный вектор скорости, $\lambda(\varphi) > 0$ – коэффициент диффузии, $k(\varphi, \mathbf{x}) \geq 0$ – коэффициент реакции, $\mathbf{x} \in \Omega$, f – объемная плотность источников вещества.

На задачу (1) при заданных функциях $\lambda, \mathbf{u}, k, f$ и ψ будем ссылаться ниже, как на задачу 1.

В [1] так же установлен принцип максимума и минимума для концентрации φ и на слабых решениях задачи 1 доказана разрешимость задачи управления, роль управления в которой играет граничная функция ψ.

В данной работе доказывается локальное существование и единственность сильного решения задачи 1 и выводится его априорная оценка. Здесь отметим отсутствие требования ограниченности по соответствующей L^p–норме коэффициента реакции $k(\varphi, \cdot)$, используемого в [2], что позволяет рассматривать часто встречающиеся на практике степенные коэффициенты реакции. Ранее подобные априорные оценки выводились для однородных краевых задач (см. [3, 4]).

Используя подход [5], для рассматриваемой задачи управления выводится система оптимальности и устанавливаются достаточные условия ее регулярности.

В дополнение к [1, 3, 4, 5] отметим работы [6, 7, 8, 9], посвященные исследованию краевых и экстремальных задач для моделей реакции–диффузии–конвекции с переменными коэффициентами, а также статьи [10, 11, 12, 13], содержащие результаты аналогичных исследований для ряда близких моделей. Здесь же отметим работы [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28], в которых исследованы краевые задачи и задачи управления для моделей тепломассопереноса, обобщающих приближение Буссинеска. Так же отметим работы [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36], посвященные сложным реологическим моделям динамики жидкости.

2 Слабое решение краевой задачи и его свойства

Ниже мы будем использовать пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$, $H^0(D) \equiv L^2(D)$, где D обозначает область Ω или ее границу Γ. Соответствующие пространства вектор–функций будем обозначать как $H^s(D)^3$ и $L^2(D)^3$. Скалярные произведения и нормы в пространствах $H^s(D)$ и $H^s(D)^3$ или в $L^2(D)$ и $L^2(D)^3$ обозначаются как $(\cdot,\cdot)_{s,D}$ и $\|\cdot\|_{s,D}$ или $(\cdot,\cdot)_D$ и $\|\cdot\|_D$. Через $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ и $|\cdot|_{1,\Omega}$ обозначим норму и полунорму в $H^1(\Omega)$ или $H^1(\Omega)^3$.

Введем функциональное пространство для вектора скорости $\mathbf{u}$:

$$Z = \{\mathbf{v} \in L^4(\Omega)^3 : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega\}$$

и функциональное множество

$$L^q(D) = \{h \in L^q(D) : h \geq 0 \text{ п.в. в } D\}, \ \ 1 \leq q \leq \infty.$$

Для произвольного гильбертова пространства H через H^* обозначим сопряженное к нему пространство.

Пусть выполняются следующие условия:

(H.2.1) Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$;

(H.2.2) $f \in L^2(\Omega)^3$, $\mathbf{u} \in Z$, $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$;

(H.2.3) для любой функции $w \in H^1(\Omega)$ справедливо вложение $k(w, \cdot) \in L^p_+(\Omega)$ для любого $p \geq 5/3$, где p не зависит от w; и на любом шаре $B_r = \{w \in H^1(\Omega) : \|w\|_{1,\Omega} \leq r\}$ радиуса r выполняется неравенство:

$$\|k(w_1, \cdot) - k(w_2, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq L\|w_1 - w_2\|_{L^4(\Omega)} \ \ \forall w_1, w_2 \in H^1(\Omega).$$

Здесь константа L зависит от r, но не зависит от $w_1, w_2 \in B_r$;

(H.2.4) нелинейность $k(\varphi, \cdot)\varphi$ является монотонной в следующем смысле:

$$(k(\varphi_1, \cdot)\varphi_1 - k(\varphi_2, \cdot)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) \geq 0 \ \ \forall \varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega);$$

(H.2.5) функция $k(\varphi, \cdot)$ ограничена в том смысле, что существуют положительные константы A и B, зависящие от k, такие, что

$$\|k(\varphi, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq A\|\varphi\|^r_{1,\Omega} + B \text{ для всех } \varphi \in H^1(\Omega) \text{ при } p \geq 5/3, \ r \geq 0.$$

(H.2.6) функция $\lambda(\tau)$ – непрерывная при $\tau \in \mathbb{R}$ и существуют положительные константы $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ такие, что

$$0 < \lambda_{\min} \leq \lambda(\tau) \leq \lambda_{\max} \ \ \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что условия (H.2.3)–(H.2.5) описывают оператор, действующий из $H^1(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$, где $p \geq 5/3$ (подробно см. в [9]).

Напомним также, что по теореме вложения Соболева, пространства $H^1(\Omega)$ и $H^1(\Omega)^3$ вкладываются, соответственно, в $L^s(\Omega)$ и $L^s(\Omega)^3$ непрерывно при $s \leq 6$ и компактно при $s < 6$, а также с некоторой константой C_s, зависящей от s и Ω, справедливы оценки:

$$\|h\|_{L^s(\Omega)} \leq C_s\|h\|_{1,\Omega} \ \ \forall h \in H^1(\Omega),$$
$$\|\mathbf{v}\|_{L^s(\Omega)^3} \leq C_s\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \ \ \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3. \quad (2)$$

Справедлива следующая техническая лемма (подробно см. в [37, 38]).

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* (H.2.1) *и* (H.2.6), $k_0 \in L^q_+(\Omega)$, $q \geq 5/3$, $\mathbf{u} \in Z$, *тогда существуют положительные константы* δ, γ, *зависящие от* Ω *или от* Ω *и* p, *с которыми выполняются следующие соотношения:*

$$|(\lambda(c)\nabla h, \nabla \eta) \leq \lambda_{\max}\|h\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega},$$
$$|(\mathbf{u} \cdot \nabla h, \eta)| \leq \gamma\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3}\|h\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{L^4(\Omega)} \ \ \ \forall c, h, \eta \in H^1(\Omega), \quad (3)$$

$$|(k_0 h, \eta)| \leq \gamma_p \|k_0\|_{L^p(\Omega)} \|h\|_{1,\Omega}, \|\eta\|_{1,\Omega}, \ \ \forall h, \eta \in H^1(\Omega), \ p \geq 5/3, \tag{4}$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla h, h) = 0, \ (\nabla h, \nabla h) \geq \delta \|h\|^2_{1,\Omega},$$

$$(\lambda(\eta) \nabla h, \nabla h) \geq \lambda_* \|h\|^2_{1,\Omega}, \ \lambda_* = \delta \lambda_{\min} \ \forall \eta \in H^1(\Omega), \ h \in H^1_0(\Omega). \tag{5}$$

Будем использовать следующую лемму о лифтинге концентрации φ (см. [38]).

Лемма 2. *При выполнении условия* (Н.2.1) *для любой функции* $\psi \in H^s(\Gamma)$, $s \geq 1/2$, *существует такая функция* $\varphi_0 \in H^{s+1/2}(\Omega)$, *что*

$$\varphi_0|_\Gamma = \psi, \ \|\varphi_0\|_{s+1/2,\Omega} \leq C_{\Gamma,s} \|\psi\|_{s,\Gamma}. \tag{6}$$

Здесь C_Γ *– константа, зависящая от* Ω *и от* s.

Умножим уравнение в (1) на функцию $h \in H^1_0(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω. Применив формулу Грина, приходим к слабой формулировке задачи 1:

$$(\lambda(\varphi)\nabla\varphi, \nabla h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi, h) + (k(\varphi, \mathbf{x})\varphi, h) = (f, h) \ \ \forall h \in H^1_0(\Omega),$$

$$\varphi = \psi \text{ на } \Gamma. \tag{7}$$

Определение 1. Функцию $\varphi \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую (7), назовем слабым решением задачи 1.

Справедлива следующая теорема [1].

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (Н.2.1)–(Н.2.6)*. Тогда существует слабое решение* $\varphi \in H^1(\Omega)$ *задачи 1 и справедлива априорная оценка*

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \leq M_\varphi \equiv C_*(\lambda_{\max} C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma} + M_l) + C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma}. \tag{8}$$

Здесь

$$M_l \equiv \|f\|_\Omega + C_\Gamma[\gamma \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} + \gamma_p(A C^r_\Gamma \|\psi\|^r_{1/2,\Gamma} + B)] \|\psi\|_{1/2,\Gamma}.$$

Пусть выполняется условие:

(Н.2.7) $f_{\min} \leq f \leq f_{\max}$ п.в. в Ω, $\psi_{\min} \leq \psi \leq \psi_{\max}$ п.в. на Γ.

Здесь $f_{\min}, f_{\max}, \psi_{\min}, \psi_{\max}$ – неотрицательные числа.

Будем считать, что коэффициент реакции имеет следующий вид:

(Н.2.8) $k(\varphi, \mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) k_1(\varphi)$, где $k_1(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ – непрерывная функция, $a(\mathbf{x}) \in L^\infty(\Omega)$, причем $0 < a_{\min} \leq a(\mathbf{x}) \leq a_{\max} < \infty$ п.в. в Ω и функциональные уравнения

$$k_1(s)\, s = f_{\max}/a_{\min}, \ \ s \in (0, +\infty), \tag{9}$$

$$k_1(t)\, t = f_{\min}/a_{\max}, \ \ t \in (0, +\infty) \tag{10}$$

имеют, по крайней мере, по одному (положительному) корню s_* и t_*.

Справедлива следующая теорема [1].

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (Н.2.1)–(Н.2.8)*. Тогда для концентрации* φ *справедлив следующий принцип максимума и минимума:*

$$m \leq \varphi \leq M \ \textit{п.в. в} \ \Omega,$$

$$M = \max\{\psi_{\max}, M_1\}, \ \ m = \min\{\psi_{\min}, m_1\}. \tag{11}$$

Здесь M_1 *– минимальный (положительный) корень уравнения* (9), *а* m_1 *– максимальный (положительный) корень уравнения* (10).

Замечание 1. Для степенных коэффициентов реакции параметры M_1 и m_1 легко вычисляются. Например, для $k(\varphi) = |\varphi|$ получаем, что $M_1 = f_{\max}^{1/2}$ и $m_1 = f_{\min}^{1/2}$.

3 Существование и единственность сильного решения

В данном разделе докажем локальное существование и единственность сильного решения задачи 1 и получим его априорную оценку.

Пусть выполняются следующие условия:

(H.3.1) Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^2$;

(H.3.2) функция λ принадлежит C^1, причем

$$\lambda_{\min} \le \lambda(s) \le \lambda_{\max}, \ \ \lambda'_{\min} \le \lambda'(s) \le \lambda'_{\max} \ \ \forall s \in \mathbb{R},$$

где $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$, $\lambda'_{\min}$, $\lambda'_{\max}$ – положительные числа;

(H.3.3) условие (H.2.3) выполняется при $d \ge 2$ (вместо $d \ge 3/2$) и справедлива следующая оценка:

$$\|k(\varphi,\cdot)\|_{L^d(\Omega)} \le C_k \|\varphi\|^r_{2,\Omega} \ \ \forall \varphi \in H^2(\Omega), \ d \ge 2, \ r \ge 1,$$

где C_k – положительная константа, зависящая от функции k, параметра d и Ω;

(H.3.4) $f \in L^2(\Omega)$, $\psi \in H^{3/2}(\Gamma)$.

Определение 2. Функцию $\varphi \in H^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению в (1) п.в. в Ω и граничному условию в (1) п.в. на Γ, назовем сильным решением задачи 1.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (H.3.1)–(H.3.4) *и условия малости*

$$C'_0(\lambda'_{\max} C_\Gamma \|\psi\|_{3/2,\Gamma} + \lambda'_{\max} r + \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} + aC_k(r^s + C^s_\Gamma \|\psi\|^s_{3/2,\Gamma})) \le \lambda_{\min}/2,$$

$$C'_1 \lambda'_{\max} C_\Gamma \|\psi\|_{3/2,\Gamma} + aC'_1 C_k C_\Gamma \|\psi\|_{3/2,\Gamma} r^{s-1} \le \lambda_{\min}/4, \ s \ge 1. \tag{12}$$

Здесь

$$r = (4/\lambda_{\min})(\|f\|_\Omega + C'_1[C_\Gamma \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} \|\psi\|_{3/2,\Gamma} + \lambda_{\max} C_\Gamma \|\psi\|_{3/2,\Gamma} + $$
$$+ aC_k C^{s+1}_\Gamma \|\psi\|^{s+1}_{3/2,\Gamma} + \lambda'_{\max} C^2_\Gamma \|\psi\|^2_{3/2,\Gamma}]). \tag{13}$$

Тогда существует сильное решение $\varphi \in H^2(\Omega)$ *задачи 1 такое, что*

$$-\mathrm{div}(\lambda(\varphi)\nabla\varphi) + \mathbf{u} \cdot \nabla\varphi + k(\varphi,\cdot)\varphi = f \ \text{ п.в. в } \Omega, \ \varphi = \psi \ \text{ на } \Gamma \tag{14}$$

и справедлива априорная оценка:

$$\|\varphi\|_{2,\Omega} \le M^0_\varphi \equiv r + C_\Gamma \|\psi\|_{3/2,\Gamma}. \tag{15}$$

Здесь C_0, C'_1 *– положительные константы, зависящие от* Ω.

Замечание 2. В формулировке теоремы 3 и ниже мы полагаем $C_\Gamma \equiv C_{\Gamma,3/2}$ (см. лемму 2), чтобы не усложнять и без того сложную систему обозначений.

Доказательство. Сильное решение φ задачи 1 будем так же искать в виде

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi_0, \tag{16}$$

где $\varphi_0 \in H^2(\Omega)$ – функция из леммы 2, а $\tilde{\varphi} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ – неизвестная функция.

Подставим (16) в уравнение в (14). Получим

$$-\mathrm{div}(\lambda(\tilde{\varphi}+\varphi_0)\nabla(\tilde{\varphi}+\varphi_0)) + \mathbf{u}\cdot\nabla(\tilde{\varphi}+\varphi_0) + k(\tilde{\varphi}+\varphi_0,\cdot)(\tilde{\varphi}+\varphi_0) = f \text{ п.в. в } \Omega. \tag{17}$$

Рассмотрим далее линейный аналог задачи (17):

$$-\mathrm{div}(\lambda(c+\varphi_0)\nabla(\tilde{\varphi}+\varphi_0)) + \mathbf{u}\cdot\nabla(\tilde{\varphi}+\varphi_0) + k(c+\varphi_0,\cdot)(\tilde{\varphi}+\varphi_0) = f \text{ п.в. в } \Omega, \tag{18}$$

где $c \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ – заданная функция.

Существование сильного решения задачи (18) при выполнении условий (H.3.1)–(H.3.4) вытекает из свойства эллиптической регулярности (см. [39]). Другими словами, слабое решение $\tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega)$ задачи (18) является его сильным решением из пространства $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, так что (18) выполняется п.в. в Ω.

Умножим уравнение в (18) на функцию $h \in L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω. Получим

$$-(\mathrm{div}(\lambda(c+\varphi_0)\nabla(\tilde{\varphi}+\varphi_0), h) + (k(c+\varphi_0,\cdot)(\tilde{\varphi}+\varphi_0), h) +$$
$$+(\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde{\varphi}, h) = (f, h) - (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_0, h) \ \ \forall h \in L^2(\Omega). \tag{19}$$

Используя равенство

$$\mathrm{div}(\lambda(c+\varphi_0)\nabla(\tilde{\varphi}+\varphi_0)) =$$
$$= \lambda(c+\varphi_0)\Delta\tilde{\varphi} + \lambda(c+\varphi_0)\Delta\varphi_0 + \nabla\lambda(c+\varphi_0)\cdot\nabla(\tilde{\varphi}+\varphi_0) =$$
$$= \lambda(c+\varphi_0)\Delta\tilde{\varphi} + \lambda(c+\varphi_0)\Delta\varphi_0 + \lambda'(c+\varphi_0)\nabla(c+\varphi_0)\cdot\nabla(\tilde{\varphi}+\varphi_0) =$$
$$= \lambda(c+\varphi_0)\Delta\tilde{\varphi} + \lambda(c+\varphi_0)\Delta\varphi_0 +$$
$$+\lambda'(c+\varphi_0)(\nabla c\cdot\nabla\tilde{\varphi} + \nabla c\cdot\nabla\varphi_0 + \nabla\varphi_0\cdot\nabla\tilde{\varphi} + \nabla\varphi_0\cdot\nabla\varphi_0), \tag{20}$$

перепишем (19) в следующем виде:

$$-(\lambda(c+\varphi_0)\Delta\tilde{\varphi}, h) - (\lambda(c+\varphi_0)\Delta\varphi_0, h) + (k(c+\varphi_0,\cdot)(\tilde{\varphi}+\varphi_0), h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde{\varphi}, h) =$$
$$= (\lambda'(c+\varphi_0)(\nabla c\cdot\nabla\tilde{\varphi} + \nabla c\cdot\nabla\varphi_0 + \nabla\varphi_0\cdot\nabla\tilde{\varphi} + \nabla\varphi_0\cdot\nabla\varphi_0), h) +$$
$$+(f, h) - (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_0, h) \ \ \forall h \in L^2(\Omega). \tag{21}$$

Равенство (21) определяет отображение $G : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ действующее по формуле $G(c) = \tilde{\varphi}$ для любой функции $c \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. При этом функция $\tilde{\varphi} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ является сильным решением задачи (21).

Полагая $h = \Delta\tilde{\varphi}$ в (21), приходим к равенству

$$-(\lambda(c+\varphi_0)\Delta\tilde{\varphi}, \Delta\tilde{\varphi}) - (\lambda(c+\varphi_0)\Delta\varphi_0, \Delta\tilde{\varphi}) +$$

$$+(k(c+\varphi_0,\cdot)(\tilde\varphi+\varphi_0),\Delta\tilde\varphi)+(\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde\varphi,\Delta\tilde\varphi)=$$
$$=(\lambda'(c+\varphi_0)(\nabla c\cdot\nabla\tilde\varphi+\nabla c\cdot\nabla\varphi_0+\nabla\varphi_0\cdot\nabla\tilde\varphi+\nabla\varphi_0\cdot\nabla\varphi_0),\Delta\tilde\varphi)+$$
$$+(f,\Delta\tilde\varphi)-(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_0,\Delta\tilde\varphi). \tag{22}$$

Из условия (H.3.3) вытекает оценка:

$$\|k(c+\varphi_0,\cdot)\|_\Omega\le C_k\|c+\varphi_0\|^s_{2,\Omega}\le aC_k(\|\Delta c\|^s_\Omega+C^s_\Gamma\|\psi\|^s_{3/2,\Gamma}),\ s\ge1,$$

где константа a зависит от Ω и от s.

С учетом последней оценки из (22) выводим неравенство:

$$\lambda_{\min}\|\Delta\tilde\varphi\|_\Omega\le$$
$$C'_0(\lambda'_{\max}C_\Gamma\|\psi\|_{3/2,\Gamma}+\lambda'_{\max}\|\Delta c\|_\Omega+\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3}+aC_k(\|\Delta c\|^s_\Omega+C^s_\Gamma\|\psi\|^s_{3/2,\Gamma}))\|\Delta\tilde\varphi\|_\Omega+$$
$$+\|f\|_\Omega+C'_1[C_\Gamma\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3}\|\psi\|_{3/2,\Gamma}+\lambda_{\max}C_\Gamma\|\psi\|_{3/2,\Gamma}+$$
$$+aC_kC^{s+1}_\Gamma\|\psi\|^{s+1}_{3/2,\Gamma}+\lambda'_{\max}C^2_\Gamma\|\psi\|^2_{3/2,\Gamma}+$$
$$+\lambda'_{\max}C_\Gamma\|\psi\|_{3/2,\Gamma}\|\Delta c\|_\Omega+aC_kC_\Gamma\|\psi\|_{3/2,\Gamma}\|\Delta c\|^s_\Omega],\quad s\ge1. \tag{23}$$

Здесь C'_0 и C'_1 – положительные константы, зависящие от Ω и Γ.

При выполнении условий в (12) с учетом обозначения (13) из (23) приходи к оценке:

$$(1/2)\|\Delta\tilde\varphi\|_\Omega\le(1/4)r+(1/4)r, \tag{24}$$

из которой явно вытекает, что оператор G переводит ограниченное замкнутое множество

$$\mathcal{B}=\{c\in H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega):\|\Delta c\|_\Omega\le r\} \tag{25}$$

в себя при конкретном значении r, определенном в (13).

Тем самым, при условиях малости (12) оператор G отображает множество $\mathcal{B}$ определенное в (25) в себя. Как и в [26] имеем, что оператор G непрерывен и компактен на множестве $\mathcal{B}$. Тогда из теоремы Шаудера следует, что оператор G имеет неподвижную точку $\tilde\varphi=G(\tilde\varphi)$, для которой справедлива оценка $\|\tilde\varphi\|_{2,\Omega}\le r$. Тогда функция $\varphi=\tilde\varphi+\varphi_0$ является сильным решением задачи 1 и для нее справедлива априорная оценка (15). ■

Наконец, мы докажем единственность “малого” сильного решения φ задачи 1.

Пусть выполняется следующее условие:

(H.3.5) функции λ и λ' – непрерывны по Липшицу и с положительными константами L_λ и L'_λ справедливы неравенства:

$$|\lambda(s_1)-\lambda(s_2)|\le L_\lambda|s_1-s_2|,\quad|\lambda'(s_1)-\lambda'(s_2)|\le L'_\lambda|s_1-s_2|\ \ \forall s_1,s_2\in\mathbb{R}.$$

Справедлива следующая теорема о единственности “малого” по норме пространства $H^2(\Omega)$ сильного решения задачи 1.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* (H.3.1)–(H.3.5)*. Тогда существует положительное число $\varepsilon>0$ такое, что если существует сильное решение $\varphi\in H^2(\Omega)$ задачи 1 и справедливо неравенство:*

$$\|\varphi\|_{2,\Omega}+\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3}<\varepsilon,$$

то такое решение единственно.

Доказательство. Умножим уравнение в (14) на функцию $h \in L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω. Получим

$$-(\operatorname{div}(\lambda(\varphi)\nabla\varphi), h) + (k(\varphi,\cdot)\varphi, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) = (f, h) \ \ \forall h \in L^2(\Omega). \quad (26)$$

Используя равенство

$$\operatorname{div}(\lambda(\varphi)\nabla\varphi) = \lambda(\varphi)\Delta\varphi + \nabla\lambda(\varphi)\cdot\nabla\varphi = \lambda(\varphi)\Delta\varphi + \lambda'(\varphi)\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi \text{ в } \Omega, \quad (27)$$

перепишем (26) в следующем виде:

$$-(\lambda(\varphi)\Delta\varphi, h) + (k(\varphi,\cdot)\varphi, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) =$$
$$= (\lambda'(\varphi)\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi, h) + (f, h) \ \ \forall h \in L^2(\Omega). \quad (28)$$

Пусть существуют два решения $\varphi_i \in H^2(\Omega)$, $i = 1, 2$, уравнения (28), где $\varphi_i = \psi$ на Γ. Из [3] вытекает, что их разность $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ удовлетворяет соотношению:

$$-(\lambda(\varphi_1)\Delta\varphi, h) = (\lambda'(\varphi_1)\nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi, h) - (k(\varphi_1,\cdot)\varphi, h) - (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) +$$
$$+((\lambda'(\varphi_1) - \lambda'(\varphi_2))\nabla\varphi_1 + \lambda'(\varphi_2)\nabla\varphi)\cdot\nabla\varphi_2, h) +$$
$$+((\lambda(\varphi_1) - \lambda(\varphi_2))\Delta\varphi_2, h) - (k(\varphi_1,\cdot) - k(\varphi_2,\cdot), \varphi_2 h) \ \ \forall h \in L^2(\Omega). \quad (29)$$

Полагая $h = \Delta\varphi$ в (29) и учитывая свойства (H.3.2), (H.3.5), приходим к неравенству:

$$\lambda_{\min}\|\Delta\varphi\|_\Omega^2 \le C_1'[\lambda'_{\max}\|\varphi_1\|_{2,\Omega}\|\Delta\varphi\|_\Omega^2 + C_k\|\varphi_1\|_{2,\Omega}^r\|\Delta\varphi\|_\Omega^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3}\|\Delta\varphi\|_\Omega^2 +$$
$$+L'_\lambda\|\varphi_1\|_{2,\Omega}\|\varphi_2\|_{2,\Omega}\|\Delta\varphi\|_\Omega^2 + \lambda'_{\max}\|\varphi_1\|_{2,\Omega}\|\Delta\varphi\|_\Omega^2 + L_\lambda\|\varphi_1\|_{2,\Omega}\|\Delta\varphi\|_\Omega^2 +$$
$$+L\|\varphi_2\|_{2,\Omega}\|\Delta\varphi\|_\Omega^2]. \quad (30)$$

Здесь C_1' – положительная константа, зависящая от Ω.

Из (30) вытекает, что если

$$C_1'[\lambda'_{\max}\|\varphi_1\|_{2,\Omega} + C_k\|\varphi_1\|_{2,\Omega}^r + \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} +$$
$$+L'_\lambda\|\varphi_1\|_{2,\Omega}\|\varphi_2\|_{2,\Omega} + \lambda'_{\max}\|\varphi_1\|_{2,\Omega} + L_\lambda\|\varphi_1\|_{2,\Omega} + L\|\varphi_2\|_{2,\Omega}] < \lambda_{\min},$$

то $\|\Delta\varphi\|_\Omega = 0$ или $\varphi_1 = \varphi_2$. ■

4 Постановка и разрешимость задачи управления

В данном разделе для задачи 1 рассмотрим задачу управления. Роль управлений играют функции f и ψ, которые могут изменяться в некоторых множествах K_1 и K_2, соответственно. Положим $K = K_1 \times K_2$, $u = (f, \psi)$, введем функциональное пространство $Y = H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$ и определим оператор $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)\colon H^1(\Omega) \times K \to Y$, действующий по формулам:

$$\langle\Phi_1(\varphi, f), h\rangle = (\lambda(\varphi)\nabla\varphi, \nabla h) + (k(\varphi,\cdot)\varphi, h) +$$
$$+((\mathbf{u}\cdot\nabla)\varphi, h) - (f, h) \ \ \forall h \in H_0^1(\Omega)$$
$$\Phi_2(\varphi, \psi) = \varphi|_\Gamma - \psi \in H^{1/2}(\Gamma) \quad (31)$$

и перепишем слабую формулировку задачи 1 в виде $\Phi(\varphi, u) = 0$.

Рассматривая это равенство как условное ограничение на состояние $\varphi \in H^1(\Omega)$ и управления $f \in K_1$ и $\psi \in K_2$, сформулируем задачу условной минимизации:

$$\begin{gathered} J(\varphi, \psi) := \frac{\mu_0}{2} I(\varphi) + \frac{\mu_1}{2} \|f\|_\Omega^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\psi\|_{1/2,\Gamma}^2 \to \min, \\ \Phi(\varphi, u) = 0, \quad (\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K, \end{gathered} \tag{32}$$

где $I \colon H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ — слабо полунепрерывный снизу функционал.

Через

$$Z_{\text{ad}} := \{(\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K : \ \Phi(\varphi, u) = 0 \text{ и } J(\varphi, u) < \infty\}$$

обозначим множество допустимых пар задачи (32) и предположим, что выполняются следующие условия:

(H.4.1) $K_1 \subset L^2(\Gamma)$ и $K_2 \subset H^{1/2}(\Gamma)$ – непустые выпуклые замкнутые множества;

(H.4.2) $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$ и K_1, K_2 – ограниченные множества, или $\mu_i > 0$, $i = 0, 1, 2$, и функционал I ограничен снизу.

Ниже приведем примеры функционалов качества:

$$I_1(\varphi) := \|\varphi - \varphi^d\|_Q^2, \quad I_2(\varphi) := \|\varphi - \varphi^d\|_{1,Q}^2.$$

Здесь $\varphi^d \in L^2(Q)$ (или $\varphi^d \in H^1(Q)$) – заданные в подобласти $Q \subset \Omega$ функции.

Справедлива следующая теорема [1].

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* (H.2.1)–(H.2.6) *и* (H.4.1), (H.4.2), *функционал* $I \colon H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *слабо полунепрерывен и множество допустимых пар* Z_{ad} *не пусто. Тогда задача* (32) *имеет, по крайней мере, одно решение* $(\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K$.

5 Вывод системы оптимальности

В этом разделе мы выведем систему оптимальности для задачи управления (32) при конкретных коэффициентах диффузии и реакции:

$$\lambda(t) = \frac{1}{1 + t^2} + 1, \ \ k(t) = t^2, \ t \in \mathbb{R}.$$

Через $\lambda'(t)$ обозначим первую производную функции $\lambda(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Ясно, что

$$\lambda'(t) = \frac{-2t}{(1 + t^2)^2},$$

$$|\lambda'(\varphi)| \leq \lambda'_{\max} \text{ п.в. в } \Omega \ \ \forall \varphi \in H^1(\Omega), \ \ \lambda'_{\max} = 1.$$

Рассмотрим производную Фреше от оператора $F : H^1(\Omega) \times K \to Y \equiv H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$ по состоянию φ в точке локального минимума $(\hat{\varphi}, \hat{u}) = (\hat{\varphi}, \hat{f}, \hat{\psi})$ задачи (32). Дополнительно будем считать, что $\nabla \hat{\varphi} \in L^4(\Omega)^3$. (Данное условие заведомо выполняется для сильного решения задачи 1, см. разд. 3).

Указанная производная есть линейный непрерывный оператор

$$F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u) : H^1(\Omega) \to Y,$$

ставящий каждому элементу $h \in H^1(\Omega)$ элемент $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)h = (\hat y_1, \hat y_2) \in Y$.

Здесь $\hat y_1 \in H^{-1}(\Omega)$ и $\hat y_2 \in H^{1/2}(\Gamma)$ определяются по функциям $\hat\varphi$ и τ из следующих соотношений:

$$\langle \hat y_1, \tau\rangle = (\lambda'(\hat\varphi)\tau\nabla\hat\varphi, \nabla h) + (\lambda(\hat\varphi)\nabla\tau, \nabla h) + \\ +3(\hat\varphi^2\tau, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, h) \;\; \forall h \in H_0^1(\Omega), \\ \hat y_2 = \tau|_\Gamma. \tag{33}$$

Через $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)^* : Y^* \to H^1(\Omega)^*$ обозначим оператор, сопряженный к $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)$.

В соответствии с общей теорией гладко-выпуклых экстремальных задач [40], введем элемент $\mathbf{y}^* = (\theta, \zeta) \in Y^* = H_0^1(\Omega)\times H^{-1/2}(\Gamma)$, на который будем ссылаться, как на сопряженное состояние и введем Лагранжиан $\mathcal{L} : H^1(\Omega) \times K \times \mathbb{R} \times Y^* \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\mathcal{L}(\varphi, u, \lambda_0, \mathbf{y}^*) = \lambda_0 J(\varphi, u) + \langle \mathbf{y}^*, F(\varphi, u)\rangle_{Y^*\times Y} \equiv \lambda_0 J(\varphi, u) + \\ +\langle F_1(\varphi, u), \theta\rangle + \langle\zeta, F_2(\varphi)\rangle_\Gamma. \tag{34}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть выполняются условия* (H.2.1), (H.2.2) *и* (H.4.1), (H.4.2), *при этом*

$$\lambda(\varphi) = 1/(1+\varphi^2) + 1, \;\; k(\varphi) = \varphi^2$$

и элемент $(\hat\varphi, \hat u) \in H^1(\Omega) \times K$ – точка локального минимума в задаче (32), при этом $\nabla\hat\varphi \in L^4(\Omega)^3$.

Пусть так же функционал качества $I : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируем по Фреше по состоянию φ в точке $\hat\varphi$.

Тогда:

1) существует ненулевой множитель Лагранжа

$$(\lambda_0, \mathbf{y}^*) = (\lambda_0, \theta, \zeta) \in \mathbb{R}^+ \times Y^*,$$

с которым справедливо уравнение Эйлера–Лагранжа

$$F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)^*\mathbf{y}^* = -\lambda_0 J'_\varphi(\hat\varphi, \hat u) \text{ в } H^1(\Omega)^*,$$

эквивалентное соотношению

$$(\lambda'(\hat\varphi)\tau\nabla\hat\varphi, \nabla\theta) + (\lambda(\hat\varphi)\nabla\tau, \nabla\theta) + 3(\hat\varphi^2\tau, \theta) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, \theta) + \\ +\langle\zeta, \tau\rangle_\Gamma = -\lambda_0(\mu_0/2)\langle I'_\varphi(\hat\varphi), \tau\rangle) \;\forall\tau \in H^1(\Omega) \tag{35}$$

и справедлив принцип минимума

$$\mathcal{L}(\hat\varphi, \hat u, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \le \mathcal{L}(\hat\varphi, u, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \quad \forall u \in K$$

эквивалентный неравенствам

$$\lambda_0\mu_1(\hat f, f - \hat f) - (f - \hat f, \theta) \ge 0 \;\; \forall f \in K_1, \tag{36}$$

$$\lambda_0\mu_2(\hat\psi, \psi - \hat\psi)_{1/2,\Gamma} + \langle\zeta, \psi - \hat\psi\rangle_\Gamma \ge 0 \;\; \forall\psi \in K_2. \tag{37}$$

2) Если, к тому же, выполняется условие:

$$\lambda'_{\max}\tilde{C}_1\|\nabla\hat{\varphi}\|_{L^4(\Omega)^3} < \lambda_*, \tag{38}$$

где $\tilde{C}_1$ – положительная константа, зависящая от Ω, то нетривиальный множитель Лагранжа $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$, удовлетворяющий (35)–(37), является регулярным, т.е. имеет вид $(1, \mathbf{y}^*)$ и определяется единственным образом по паре $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$.

Доказательство.

Согласно [40, гл. 2], для доказательства существования множителя Лагранжа $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$ достаточно показать, что оператор

$$F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u}) : H^1(\Omega) \to Y$$

является Фредгольмовым. В силу (33), оператор $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u}) : H^1(\Omega) \to Y$ можно представить в виде

$$F'_\varphi = \Phi + \hat{\Phi} \equiv (\Phi_1, \Phi_2) + (\hat{\Phi}_1, 0).$$

Здесь

$$\Phi_2(\tau) = \tau|_\Gamma,$$

а операторы Φ_1 и $\hat{\Phi}_1 : H^1(\Omega) \to Y$ определяются по формулам

$$\langle \Phi_1(\tau), h\rangle = (\lambda(\hat{\varphi})\nabla\tau, \nabla h) + 3(\hat{\varphi}^2\tau, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, h) \ \ \forall h \in H_0^1(\Omega),$$

$$\langle \hat{\Phi}_1(\tau), h\rangle = (\lambda'(\hat{\varphi})\tau\nabla\hat{\varphi}, \nabla h) \ \ \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{39}$$

Покажем, что оператор $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : H^1(\Omega) \to Y$ – изоморфизм. Для этого следует доказать, что для любой пары $(f, \psi) \in Y$ существует единственное решение $\tau \in H^1(\Omega)$ линейной задачи

$$(\lambda(\hat{\varphi})\nabla\tau, \nabla h) + 3(\hat{\varphi}^2\tau, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, h) = \langle f, h\rangle \ \ \forall h \in H_0^1(\Omega), \tag{40}$$

$$\tau = \psi \text{ на } \Gamma. \tag{41}$$

Решение задачи (40), (41) будем искать в виде

$$\tau = \tilde{\tau} + \tau_0. \tag{42}$$

Здесь $\tau_0 \in H^1(\Omega)$ – функция лифтинга из леммы 2, а $\tilde{\tau} \in H_0^1(\Omega)$ – неизвестная функция.

Подставляя (42) в (40), получим

$$(\lambda(\hat{\varphi})\nabla\tilde{\tau}, \nabla h) + 3(\hat{\varphi}^2\tilde{\tau}, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde{\tau}, h) = \langle \tilde{f}, h\rangle \equiv$$

$$\equiv \langle f, h\rangle - (\lambda(\hat{\varphi})\nabla\tau_0, \nabla h) - 3(\hat{\varphi}^2\tau_0, h) - (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau_0, h) \ \ \forall h \in H_0^1(\Omega), \tag{43}$$

Из теоремы Лакса–Мильграма и лемм 1 и 2 вытекает существование решения $\tilde{\tau} \in H_0^1(\Omega)$ задачи (43), для которого справедлива оценка:

$$\|\tilde{\tau}\|_{1,\Omega} \le C_*\|\tilde{f}\|_{-1,\Omega} \equiv$$

$$\equiv C_*(\|f\|_{-1,\Omega} + C_\Gamma\|\psi\|_{1/2,\Gamma}(\lambda_{\max} + 3\|\hat{\varphi}\|^2_{L^4(\Omega)} + \gamma\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3})). \tag{44}$$

В таком случае, существует решение $\tau = \tilde{\tau} + \tau_0$ задачи (40), для которого справедлива оценка:

$$\|\tau\|_{1,\Omega} \le C_*\|\tilde{f}\|_{-1,\Omega} + C_\Gamma\|\psi\|_{1/2,\Gamma}. \tag{45}$$

Пусть τ_1 и τ_2 – два решения задачи (40), (41). Тогда разность $\tau = \tau_1 - \tau_2 \in H_0^1(\Omega)$ удовлетворяет соотношениям

$$(\lambda(\hat{\varphi})\nabla\tau, \nabla h) + 3(\hat{\varphi}^2 h, \tau) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, h) = 0 \ \ \forall h \in H_0^1(\Omega), \tag{46}$$

$$\tau = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{47}$$

Полагая $h = \tau$ в (46), приходим к равенству

$$(\lambda(\hat{\varphi})\nabla\tau, \nabla\tau) + 3(\hat{\varphi}^2\tau, \tau) = 0,$$

из которого в силу (5) вытекает, что $\tau = 0$ или $\tau_1 = \tau_2$ в Ω. В таком случае, оператор $\Phi : H^1(\Omega) \to Y$ – сюръективен и обратим. Тогда по теореме Банаха он является изоморфизмом.

Покажем, что оператор $\hat{\Phi} = (\hat{\Phi}_1, 0) : H^1(\Omega) \to Y$, определенный формулой (39), является непрерывным и компактным. Поскольку пространство $H^1(\Omega)$ непрерывно и компактно вкладывается в $L^p(\Omega)$, где $p < 6$, то указанный факт вытекает из следующей оценки:

$$|(\lambda'(\hat{\varphi})\tau\nabla\hat{\varphi}, \nabla h)| \leq \lambda'_{\max}\|\tau\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla\hat{\varphi}\|_{L^4(\Omega)^3}\|\nabla h\|_{L^2(\Omega)^3},$$

В таком случае, оператор $F'_\varphi(\varphi, u) : H^1(\Omega) \to Y$ – Фредгольмов, как сумма изоморфизма $\Phi : H^1(\Omega) \to Y$ и непрерывного компактного оператора $\hat{\Phi} : H^1(\Omega) \to Y$.

Для доказательства второго утверждения теоремы 6 достаточно показать, что однородное уравнение (35) (при $\lambda_0 = 0$) имеет только тривиальное решение $\mathbf{y}^* = (\theta, \zeta) \equiv \mathbf{0}$. Предположим противное, т.е., что существует по крайней мере одно нетривиальное решение $\mathbf{y}^* = (\theta, \zeta) \in Y^*$ уравнения (35) при $\lambda_0 = 0$, где элементы $\hat{\varphi}$ и $\hat{u}$ связаны соотношением $F(\hat{\varphi}, \hat{u}) = 0$.

Полагая $\tau = \theta$ в (35) при $\lambda_0 = 0$, получим

$$(\lambda(\hat{\varphi})\nabla\theta, \nabla\theta) + (\lambda'(\hat{\varphi})\,\theta\,\nabla\hat{\varphi}, \nabla\theta) + 3(\hat{\varphi}^2\theta, \theta) = 0 \tag{48}$$

Из (48) выводим, что

$$\lambda_*\|\theta\|_{1,\Omega}^2 \leq \lambda'_{\max}\tilde{C}_1\|\nabla\hat{\varphi}\|_{L^4(\Omega)^3}\,\|\theta\|_{1,\Omega}^2, \tag{49}$$

где $\tilde{C}_1$ – положительная константа, зависящая от Ω.

Из (49) вытекает, что если выполняются условия (38), то $\theta = 0$ п.в. в Ω. В таком случае

$$\langle\zeta, \tau\rangle_\Gamma = 0 \ \ \forall\tau \in H^1(\Omega)$$

и, следовательно, $\zeta = 0$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Последнее противоречит предположению о нетривиальности множителя Лагранжа $(\theta, \zeta) \in Y^*$. Единственность регулярного множителя Лагранжа $(1, \mathbf{y}^*)$ при выполнении условий (38) вытекает из Фредгольмовости оператора $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u}) : H^1(\Omega) \to Y$. ■

6 Заключение

В настоящей работе доказано локальное существование и единственность сильного решения неоднородной краевой задачи для уравнения реакции–диффузии–конвекции с переменными коэффициентами и получена его априорная оценка. На слабых решениях указанной краевой задачи рассматривается задача граничного управления, для которой выводится система оптимальности. Установлены достаточные условия регулярности данной системы.

References

[1] R.V. Brizitskii *Boundary control problem for reaction–diffusion–convection equation with variable coefficients*, Sib. El. Math. Rep. **22** (2025) 623–634.

[2] G.V. Alekseev, O.V. Soboleva, *Inhomogeneous boundary value problems for the generalized Boussinesq model of mass transfer*, Mathematics. **12**:3 (2024) 391.

[3] E.S. Baranovskii, R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia, *Optimal control problems for the reaction-diffusion-convection equation with variable coefficients*, Nonlinear Analysis: Real World Appl. **75** (2024) 103979.

[4] R.V. Brizitskii, *Boundary value and control problems for mass transfer equations with variable coefficients*, J. Dynam. Control Syst. **30**:2 (2024) 24.

[5] R.V. Brizitskii, Zh.Yu. Saritskaya, *Analysis of properties of solutions to control problems for mass transfer equations with variable coefficients*, Sib. El. Math. Rep. **22** (2025) 125–142.

[6] R.V. Brizitskii, Zh.Yu. Saritskaya, *Boundary value and extremal problems for the nonlinear convection–diffusion–reaction equation*, Sib. El. Math. Rep. **12** (2015) 447–456.

[7] R.V. Brizitskii, Zh.Yu. Saritskaya, A.I. Byrganov, *Multiplicative control problems for nonlinear convection–diffusion–reaction equation*, Sib. El. Math. Rep. **13** (2016) 352–360.

[8] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaya, *Boundary control problem for a nonlinear convection–diffusion–reaction equation*, Comp. Math. Math. Phys. **58** (12) (2018) 2053–2063.

[9] R.V. Brizitskii, V.S. Bystrova, Z.Y. Saritskaia, *Analysis of boundary value and extremum problems for a nonlinear reaction–diffusion–convection equation*, Diff. Equat. **57**:5 (2021) 615–629.

[10] A.Y. Chebotarev, G.V. Grenkin, A.E. Kovtanyuk, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Diffusion approximation of the radiative–conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **57** (2018) 290–298.

[11] A. Kovtanyuk, A. Chebotarev, A. Astrakhantseva, *Inverse extremum problem for a model of endovenous laser ablation*, J. Inv. Ill-Posed Probl. **29**:3 (2021) 467–476.

[12] A.E. Kovtanyuk, A.Y. Chebotarev, N.D. Botkin, V.L. Turova, I.N. Sidorenko, R. Lampe, *Continuum model of oxygen transport in brain*, J. Math. Analys. Appl. **474**:2 (2019) 1352–1363.

[13] Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Turova V.L., Sidorenko I.N., Lampe R., *Nonstationary model of oxygen transport in brain tissue*, Computational and Mathematical Methods in Medicine. **2020** (2020) 4861654.

[14] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia, *Analysis of inhomogeneous boundary value problems for generalized Boussinesq model of mass transfer*, J. Dynam. Control Syst. **29**:4 (2023) 1809–1828.

[15] S.A. Lorca, J.L. Boldrini, *Stationary solutions for generalized Boussinesq models*, J. Dif. Eq. **124** (1996) 389–406.

[16] T. Kim, *Steady Boussinesq system with mixed boundary conditions including friction conditions*, Appl. Math. **67** (2022) 593–613.

[17] A. Bermudez, R. Munoz-Sola, R. Vazquez, *Analysis of two stationary magnetohydrodynamics systems of equations including Joule heating*, J. Math. Anal. Appl. **368** (2010) 444–468.

[18] E.S. Baranovskii, M.A. Artemov, *Existence of optimal control for a nonlinear-viscous fluid model*, Int. J. Differ. Equ. **2016** (2016) Article ID 9428128.

[19] R. Duan, A. Guo, C. Zhu, *Global strong solution to compressible Navier–Stokes equations with density dependent viscosity and temperature dependent heat conductivity*, J. Differ. Equ. **262** (2017) 4314–4335.

[20] E.S. Baranovskii, A.A. Domnich, M.A. Artemov, *Optimal boundary control of non-isothermal viscous fluid flow*, Fluids **4**:3 (2019) Article ID 133.

[21] E.S. Baranovskii, A.A. Domnich, *Model of a nonuniformly heated viscous flow through a bounded domain*, Differ. Equ. **56**:3 (2020) 304–314.

[22] E.S. Baranovskii, E. Lenes, E. Mallea-Zepeda, J. Rodriguez, L. Vasquez, *Control problem related to 2D Stokes equations with variable density and viscosity*, Symmetry **13**:11 (2021) Article ID 2050.

[23] E.S. Baranovskii, *Optimal boundary control of the Boussinesq approximation for polymeric fluids*, J. Optim. Theory Appl. **189** (2021) 623–645.

[24] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia, *Multiplicative control problems for nonlinear reaction–diffusion–convection model*, J. Dynam. Control Syst. **27**:2 (2021) 379–402.

[25] Z.Y. Saritskaia, *Boundary value problem for nonlinear mass–transfer equations under Dirichlet condition*, Sib. El. Math. Rep. **19** (2022) 360–370.

[26] G.V. Alekseev, R.V. Brizitskii, *Theoretical analysis of boundary value problems for generalized Boussinesq model of mass transfer with variable coefficients*, Symmetry **14**:12 (2022) Article ID 2580.

[27] E.S. Baranovskii, R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia, *Multiplicative control problem for the stationary mass transfer model with variable coefficients*, Applied Mathematics and Optimization. **90**:2 (2024) 46.

[28] E.S. Baranovskii, R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia, *Boundary value and control problems for the stationary heat transfer model with variable coefficients*, Journal of Dynamical and Control Systems **30**:3 (2024) 26.

[29] E.S. Baranovskii, *Strong solutions of the incompressible Navier-Stokes-Voigt model*, Mathematics. **8**:2 (2020) Article ID 181.

[30] M. Ruzicka, V. Shelukhin, M.M. dos Santos, *Steady flows of Cosserat–Bingham fluids*, Math. Meth. Appl. Sc. **40** (2017) 2746–2761.

[31] V.V. Shelukhin, *Thermodynamics of two-phase granular fluids*, J. Non-Newtonian Fluid Mech. **262** (2018) 25–37.

[32] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solvability of unsteady equations of multi–component viscous compressible fluids*, Izv. Math. **821** (2018) 140–185.

[33] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solubility of unsteady equations of the three–dimensional motion of two-component viscous compressible heat–conducting fluids*, Izv. Math. **85**:4 (2021) 755–812.

[34] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Global unique solvability of the initial–boundary value problem for the equations of one–dimensional polytropic flows of viscous compressible multifluids*, J. Math. Fluid Mech. **21**:9 (2019) 1–9.

[35] D.A. Prokudin, *On stabilization of the solution to the initial boundary value problem for one–dimensional isothermal equations of viscous compressible multicomponent media dynamics*, Mathamatics. **11** (2023) Article ID 3065.

[36] E. Mallea-Zepeda, E. Ortega-Torres, *Control problem for a magneto–micropolar flow with mixed boundary conditions for the velocity field*, J. Dyn. Control Syst. **25** (2019) 599–618.

[37] V. Girault, P.A. Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms*, Berlin. Springer–Verlag, 1986.

[38] G.V. Alekseev, *Optimization in the stationary problems of the heat–mass transfer and magnetic hydrodynamics*, Nauchiy Mir: Moscow, 2010 (in Russian).

[39] R. Temam, *Navier-Stokes Equations*, North-Holland: Amsterdam, The Netherlands, 1977.

[40] A.V. Fursikov, *Optimal control of distributed systems: Theory and applications*, Providence, R.I.: Am. Math. Soc., 2000.

Roman Victorovich Brizitskii
Institute of Applied Mathematics FEB RAS,
str. Radio, 7,
690041, Vladivostok, Russia
Email address: mlnwizard@mail.ru

Zhanna Yurievna Saritskaia
Institute of Applied Mathematics FEB RAS,
str. Radio, 7,
690041, Vladivostok, Russia
Email address: zhsar@icloud.com