

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ И  
ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО  
УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ–КОНВЕКЦИИ

Р.В. Бризицкий 

AND Ж.Ю. Сарицкая 

**Abstract:** The local existence and uniqueness of a strong solution to inhomogeneous boundary value problem for the reaction–diffusion–convection equation with variable coefficients is proved and its apriory estimate is obtained. For the boundary value problem under consideration, a control problem is studied for which an optimality system is derived.

**Keywords:** nonlinear reaction–diffusion–convection equation, variable coefficients, weak solution, maximum principle, strong solution, control problem, extremum problem, optimality system

---

BRIZITSKII, R.V. AND SARITSKAIA, Zh.YU. ON PROPERTIES OF SOLUTIONS TO BOUNDARY VALUE AND EXTREMUM PROBLEMS FOR NONLINEAR REACTION–DIFFUSION–CONVECTION EQUATION.

© 2025 Бризицкий Р.В.

Работа выполнена в рамках госзадания Института прикладной математики ДВО РАН (075-00459-25-00).

Поступила 30 июля 2025 г., опубликована 31 декабря 2025 г.

## 1 Введение. Постановка краевой задачи

Настоящая работа продолжает исследования статьи [1], в которой доказано глобальное существование слабого решения следующей краевой задачи, рассматриваемой в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma$ :

$$-\operatorname{div}(\lambda(\varphi)\nabla\varphi) + k(\varphi, \mathbf{x})\varphi + \mathbf{u} \cdot \nabla\varphi = f \text{ в } \Omega, \quad \varphi = \psi \text{ на } \Gamma. \quad (1)$$

Здесь  $\varphi$  – концентрация (загрязняющего) вещества,  $\mathbf{u}$  – заданный вектор скорости,  $\lambda(\varphi) > 0$  – коэффициент диффузии,  $k(\varphi, \mathbf{x}) \geq 0$  – коэффициент реакции,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $f$  – объемная плотность источников вещества.

На задачу (1) при заданных функциях  $\lambda, \mathbf{u}, k, f$  и  $\psi$  будем ссылаться ниже, как на задачу 1.

В [1] так же установлен принцип максимума и минимума для концентрации  $\varphi$  и на слабых решениях задачи 1 доказана разрешимость задачи управления, роль управления в которой играет граничная функция  $\psi$ .

В данной работе доказывается локальное существование и единственность сильного решения задачи 1 и выводится его априорная оценка. Здесь отметим отсутствие требования ограниченности по соответствующей  $L^p$ -норме коэффициента реакции  $k(\varphi, \cdot)$ , используемого в [2], что позволяет рассматривать часто встречающиеся на практике степенные коэффициенты реакции. Ранее подобные априорные оценки выводились для однородных краевых задач (см. [3, 4]).

Используя подход [5], для рассматриваемой задачи управления выводится система оптимальности и устанавливаются достаточные условия ее регулярности.

В дополнение к [1, 3, 4, 5] отметим работы [6, 7, 8, 9], посвященные исследованию краевых и экстремальных задач для моделей реакции–диффузии–конвекции с переменными коэффициентами, а также статьи [10, 11, 12, 13], содержащие результаты аналогичных исследований для ряда близких моделей. Здесь же отметим работы [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28], в которых исследованы краевые задачи и задачи управления для моделей тепломассопереноса, обобщающих приближение Буссинеска. Так же отметим работы [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36], посвященные сложным реологическим моделям динамики жидкости.

## 2 Слабое решение краевой задачи и его свойства

Ниже мы будем использовать пространства Соболева  $H^s(D)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $H^0(D) \equiv L^2(D)$ , где  $D$  обозначает область  $\Omega$  или ее границу  $\Gamma$ . Соответствующие пространства вектор–функций будем обозначать как  $H^s(D)^3$  и  $L^2(D)^3$ . Скалярные произведения и нормы в пространствах  $H^s(D)$  и  $H^s(D)^3$  или в  $L^2(D)$  и  $L^2(D)^3$  обозначаются как  $(\cdot, \cdot)_{s,D}$  и  $\|\cdot\|_{s,D}$  или  $(\cdot, \cdot)_D$  и  $\|\cdot\|_D$ . Через  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$  и  $|\cdot|_{1,\Omega}$  обозначим норму и полунорму в  $H^1(\Omega)$  или  $H^1(\Omega)^3$ .

Введем функциональное пространство для вектора скорости  $\mathbf{u}$ :

$$Z = \{\mathbf{v} \in L^4(\Omega)^3 : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega\}$$

и функциональное множество

$$L^q(D) = \{h \in L^q(D) : h \geq 0 \text{ п.в. в } D\}, \quad 1 \leq q \leq \infty.$$

Для произвольного гильбертова пространства  $H$  через  $H^*$  обозначим сопряженное к нему пространство.

Пусть выполняются следующие условия:

(Н.2.1)  $\Omega$  – ограниченная область в пространстве  $\mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma \in C^{0,1}$ ;

(Н.2.2)  $f \in L^2(\Omega)^3$ ,  $\mathbf{u} \in Z$ ,  $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$ ;

(Н.2.3) для любой функции  $w \in H^1(\Omega)$  справедливо вложение  $k(w, \cdot) \in L^p_+(\Omega)$  для любого  $p \geq 5/3$ , где  $p$  не зависит от  $w$ ; и на любом шаре  $B_r = \{w \in H^1(\Omega) : \|w\|_{1,\Omega} \leq r\}$  радиуса  $r$  выполняется неравенство:

$$\|k(w_1, \cdot) - k(w_2, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq L \|w_1 - w_2\|_{L^4(\Omega)} \quad \forall w_1, w_2 \in H^1(\Omega).$$

Здесь константа  $L$  зависит от  $r$ , но не зависит от  $w_1, w_2 \in B_r$ ;

(Н.2.4) нелинейность  $k(\varphi, \cdot)\varphi$  является монотонной в следующем смысле:

$$(k(\varphi_1, \cdot)\varphi_1 - k(\varphi_2, \cdot)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) \geq 0 \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega);$$

(Н.2.5) функция  $k(\varphi, \cdot)$  ограничена в том смысле, что существуют положительные константы  $A$  и  $B$ , зависящие от  $k$ , такие, что

$$\|k(\varphi, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq A \|\varphi\|_{1,\Omega}^r + B \quad \text{для всех } \varphi \in H^1(\Omega) \text{ при } p \geq 5/3, r \geq 0.$$

(Н.2.6) функция  $\lambda(\tau)$  – непрерывная при  $\tau \in \mathbb{R}$  и существуют положительные константы  $\lambda_{\min}$  и  $\lambda_{\max}$  такие, что

$$0 < \lambda_{\min} \leq \lambda(\tau) \leq \lambda_{\max} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что условия (Н.2.3)–(Н.2.5) описывают оператор, действующий из  $H^1(\Omega)$  в  $L^p(\Omega)$ , где  $p \geq 5/3$  (подробно см. в [9]).

Напомним также, что по теореме вложения Соболева, пространства  $H^1(\Omega)$  и  $H^1(\Omega)^3$  вкладываются, соответственно, в  $L^s(\Omega)$  и  $L^s(\Omega)^3$  непрерывно при  $s \leq 6$  и компактно при  $s < 6$ , а также с некоторой константой  $C_s$ , зависящей от  $s$  и  $\Omega$ , справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^s(\Omega)} &\leq C_s \|h\|_{1,\Omega} \quad \forall h \in H^1(\Omega), \\ \|\mathbf{v}\|_{L^s(\Omega)^3} &\leq C_s \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3. \end{aligned} \quad (2)$$

Справедлива следующая техническая лемма (подробно см. в [37, 38]).

**Лемма 1.** Пусть выполняются условия (Н.2.1) и (Н.2.6),  $k_0 \in L^q_+(\Omega)$ ,  $q \geq 5/3$ ,  $\mathbf{u} \in Z$ , тогда существуют положительные константы  $\delta, \gamma$ , зависящие от  $\Omega$  или от  $\Omega$  и  $p$ , с которыми выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} |(\lambda(c)\nabla h, \nabla \eta)| &\leq \lambda_{\max} \|h\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega}, \\ |(\mathbf{u} \cdot \nabla h, \eta)| &\leq \gamma \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} \|h\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{L^4(\Omega)} \quad \forall c, h, \eta \in H^1(\Omega), \end{aligned} \quad (3)$$

$$|(k_0 h, \eta)| \leq \gamma_p \|k_0\|_{L^p(\Omega)} \|h\|_{1,\Omega}, \|\eta\|_{1,\Omega}, \quad \forall h, \eta \in H^1(\Omega), \quad p \geq 5/3, \quad (4)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla h, h) = 0, \quad (\nabla h, \nabla h) \geq \delta \|h\|_{1,\Omega}^2,$$

$$(\lambda(\eta) \nabla h, \nabla h) \geq \lambda_* \|h\|_{1,\Omega}^2, \quad \lambda_* = \delta \lambda_{\min} \quad \forall \eta \in H^1(\Omega), \quad h \in H_0^1(\Omega). \quad (5)$$

Будем использовать следующую лемму о лифтинге концентрации  $\varphi$  (см. [38]).

**Лемма 2.** *При выполнении условия (Н.2.1) для любой функции  $\psi \in H^s(\Gamma)$ ,  $s \geq 1/2$ , существует такая функция  $\varphi_0 \in H^{s+1/2}(\Omega)$ , что*

$$\varphi_0|_{\Gamma} = \psi, \quad \|\varphi_0\|_{s+1/2,\Omega} \leq C_{\Gamma} \|\psi\|_{s,\Gamma}. \quad (6)$$

Здесь  $C_{\Gamma}$  – константа, зависящая от  $\Omega$ .

Умножим уравнение в (1) на функцию  $h \in H_0^1(\Omega)$  и проинтегрируем по  $\Omega$ . Применяв формулу Грина, приходим к слабой формулировке задачи 1:

$$\begin{aligned} (\lambda(\varphi) \nabla \varphi, \nabla h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, h) + (k(\varphi, \mathbf{x}) \varphi, h) &= (f, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega), \\ \varphi &= \psi \quad \text{на } \Gamma. \end{aligned} \quad (7)$$

**Определение 1.** Функцию  $\varphi \in H^1(\Omega)$ , удовлетворяющую (7), назовем слабым решением задачи 1.

Справедлива следующая теорема [1].

**Теорема 1.** *Пусть выполняются условия (Н.2.1)–(Н.2.6). Тогда существует слабое решение  $\varphi \in H^1(\Omega)$  задачи 1 и справедлива априорная оценка*

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \leq M_{\varphi} \equiv C_*(\lambda_{\max} C_{\Gamma} \|\psi\|_{1/2,\Gamma} + M_l) + C_{\Gamma} \|\psi\|_{1/2,\Gamma}. \quad (8)$$

Здесь

$$M_l \equiv \|f\|_{\Omega} + C_{\Gamma} [\gamma \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} + \gamma_p (AC_{\Gamma}^r \|\psi\|_{1/2,\Gamma}^r + B)] \|\psi\|_{1/2,\Gamma}.$$

Пусть выполняется условие:

$$(Н.2.7) \quad f_{\min} \leq f \leq f_{\max} \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \psi_{\min} \leq \psi \leq \psi_{\max} \quad \text{п.в. на } \Gamma.$$

Здесь  $f_{\min}, f_{\max}, \psi_{\min}, \psi_{\max}$  – неотрицательные числа.

Будем считать, что коэффициент реакции имеет следующий вид:

(Н.2.8)  $k(\varphi, \mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) k_1(\varphi)$ , где  $k_1(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  – непрерывная функция,  $a(\mathbf{x}) \in L^{\infty}(\Omega)$ , причем  $0 < a_{\min} \leq a(\mathbf{x}) \leq a_{\max} < \infty$  п.в. в  $\Omega$  и функциональные уравнения

$$k_1(s) s = f_{\max}/a_{\min}, \quad s \in (0, +\infty), \quad (9)$$

$$k_1(t) t = f_{\min}/a_{\max}, \quad t \in (0, +\infty) \quad (10)$$

имеют, по крайней мере, по одному (положительному) корню  $s_*$  и  $t_*$ .

Справедлива следующая теорема [1].

**Теорема 2.** *Пусть выполняются условия (Н.2.1)–(Н.2.8). Тогда для концентрации  $\varphi$  справедлив следующий принцип максимума и минимума:*

$$\begin{aligned} m \leq \varphi \leq M \quad \text{п.в. в } \Omega, \\ M = \max\{\psi_{\max}, M_1\}, \quad m = \min\{\psi_{\min}, m_1\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $M_1$  – минимальный (положительный) корень уравнения (9), а  $m_1$  – максимальный (положительный) корень уравнения (10).

**Замечание 1.** Для степенных коэффициентов реакции параметры  $M_1$  и  $m_1$  легко вычисляются. Например, для  $k(\varphi) = |\varphi|$  получаем, что  $M_1 = f_{\max}^{1/2}$  и  $m_1 = f_{\min}^{1/2}$ .

### 3 Существование и единственность сильного решения

В данном разделе докажем локальное существование и единственность сильного решения задачи 1 и получим его априорную оценку.

Пусть выполняются следующие условия:

(Н.3.1)  $\Omega$  – ограниченная область в пространстве  $\mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma \in C^2$ ;

(Н.3.2) функция  $\lambda$  принадлежит  $C^1$ , причем

$$\lambda_{\min} \leq \lambda(s) \leq \lambda_{\max}, \quad \lambda'_{\min} \leq \lambda'(s) \leq \lambda'_{\max} \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

где  $\lambda_{\min}$ ,  $\lambda_{\max}$ ,  $\lambda'_{\min}$ ,  $\lambda'_{\max}$  – положительные числа;

(Н.3.3) условие (Н.2.3) выполняется при  $d \geq 2$  (вместо  $d \geq 3/2$ ) и справедлива следующая оценка:

$$\|k(\varphi, \cdot)\|_{L^d(\Omega)} \leq C_k \|\varphi\|_{2,\Omega}^r \quad \forall \varphi \in H^2(\Omega), \quad d \geq 2, \quad r \geq 1,$$

где  $C_k$  – положительная константа, зависящая от функции  $k$ , параметра  $d$  и  $\Omega$ ;

(Н.3.4)  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\psi \in H^{3/2}(\Gamma)$ .

**Определение 2.** Функцию  $\varphi \in H^2(\Omega)$ , удовлетворяющую уравнению в (1) п.в. в  $\Omega$  и граничному условию в (1) п.в. на  $\Gamma$ , назовем сильным решением задачи 1.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия (Н.3.1)–(Н.3.4) и условия малости

$$C'_0(\lambda'_{\max} C_\Gamma \|\psi\|_{3/2,\Gamma} + \lambda'_{\max} r + \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} + a C_k(r^s + C_\Gamma^s \|\psi\|_{3/2,\Gamma}^s)) \leq \lambda_{\min}/2,$$

$$C'_1 \lambda'_{\max} C_\Gamma \|\psi\|_{3/2,\Gamma} + a C'_1 C_k C_\Gamma \|\psi\|_{3/2,\Gamma} r^{s-1} \leq \lambda_{\min}/4, \quad s \geq 1. \quad (12)$$

Здесь

$$r = (4/\lambda_{\min})(\|f\|_\Omega + C'_1[C_\Gamma \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} \|\psi\|_{3/2,\Gamma} + \lambda_{\max} C_\Gamma \|\psi\|_{3/2,\Gamma} + C_\Gamma^{s+1} \|\psi\|_{3/2,\Gamma}^{s+1} + \lambda'_{\max} C_\Gamma^2 \|\psi\|_{3/2,\Gamma}^2]). \quad (13)$$

Тогда существует сильное решение  $\varphi \in H^2(\Omega)$  задачи 1 такое, что

$$-\operatorname{div}(\lambda(\varphi)\nabla\varphi) + \mathbf{u} \cdot \nabla\varphi + k(\varphi, \cdot)\varphi = f \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \varphi = \psi \quad \text{на } \Gamma \quad (14)$$

и справедлива априорная оценка:

$$\|\varphi\|_{2,\Omega} \leq M_\varphi^0 \equiv r + C_\Gamma \|\psi\|_{3/2,\Gamma}. \quad (15)$$

Здесь  $C_0$ ,  $C'_1$  – положительные константы, зависящие от  $\Omega$ .

**Доказательство.** Сильное решение  $\varphi$  задачи 1 будем так же искать в виде

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi_0, \quad (16)$$

где  $\varphi_0 \in H^{3/2}(\Gamma)$  – функция из леммы 2, а  $\tilde{\varphi} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  – неизвестная функция.

Подставим (16) в уравнение в (14). Получим

$$-\operatorname{div}(\lambda(\tilde{\varphi} + \varphi_0)\nabla(\tilde{\varphi} + \varphi_0)) + \mathbf{u} \cdot \nabla(\tilde{\varphi} + \varphi_0) + k(\tilde{\varphi} + \varphi_0, \cdot)(\tilde{\varphi} + \varphi_0) = f \text{ п.в. в } \Omega. \quad (17)$$

Рассмотрим далее линейный аналог задачи (17):

$$-\operatorname{div}(\lambda(c + \varphi_0)\nabla(\tilde{\varphi} + \varphi_0)) + \mathbf{u} \cdot \nabla(\tilde{\varphi} + \varphi_0) + k(c + \varphi_0, \cdot)(\tilde{\varphi} + \varphi_0) = f \text{ п.в. в } \Omega. \quad (18)$$

Существование сильного решения задачи (18) при выполнении условий (Н.3.1)–(Н.3.4) вытекает из свойства эллиптической регулярности (см. [39]). Другими словами, слабое решение  $\tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega)$  задачи (18) является его сильным решением из пространства  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , так что (18) выполняется п.в. в  $\Omega$ .

Умножим уравнение в (18) на функцию  $h \in L^2(\Omega)$  и проинтегрируем по  $\Omega$ . Получим

$$\begin{aligned} & -(\operatorname{div}(\lambda(c + \varphi_0)\nabla(\tilde{\varphi} + \varphi_0)), h) + (k(c + \varphi_0, \cdot)(\tilde{\varphi} + \varphi_0), h) + \\ & + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\varphi}, h) = (f, h) - (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_0, h) \quad \forall h \in L^2(\Omega). \end{aligned} \quad (19)$$

Используя равенство

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}(\lambda(c + \varphi_0)\nabla(\tilde{\varphi} + \varphi_0)) = \\ & = \lambda(c + \varphi_0)\Delta\tilde{\varphi} + \lambda(c + \varphi_0)\Delta\varphi_0 + \nabla\lambda(c + \varphi_0) \cdot \nabla(\tilde{\varphi} + \varphi_0) = \\ & = \lambda(c + \varphi_0)\Delta\tilde{\varphi} + \lambda(c + \varphi_0)\Delta\varphi_0 + \lambda'(c + \varphi_0)\nabla(c + \varphi_0) \cdot \nabla(\tilde{\varphi} + \varphi_0) = \\ & = \lambda(c + \varphi_0)\Delta\tilde{\varphi} + \lambda(c + \varphi_0)\Delta\varphi_0 + \\ & + (\lambda'(c + \varphi_0)(\nabla c \cdot \nabla\tilde{\varphi} + \nabla c \cdot \nabla\varphi_0 + \nabla\varphi_0 \cdot \nabla\tilde{\varphi} + \nabla\varphi_0 \cdot \nabla\varphi_0)), \end{aligned} \quad (20)$$

перепишем (19) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & -(\lambda(c + \varphi_0)\Delta\tilde{\varphi}, h) - (\lambda(c + \varphi_0)\Delta\varphi_0, h) + (k(c + \varphi_0, \cdot)(\tilde{\varphi} + \varphi_0), h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\tilde{\varphi}, h) = \\ & = (\lambda'(c + \varphi_0)(\nabla c \cdot \nabla\tilde{\varphi} + \nabla c \cdot \nabla\varphi_0 + \nabla\varphi_0 \cdot \nabla\tilde{\varphi} + \nabla\varphi_0 \cdot \nabla\varphi_0), h) + \\ & + (f, h) - (\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi_0, h) \quad \forall h \in L^2(\Omega). \end{aligned} \quad (21)$$

Равенство (21) определяет отображение  $G : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  действующее по формуле  $G(c) = \tilde{\varphi}$  для любой функции  $c \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . При этом функция  $\tilde{\varphi} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  является сильным решением задачи (21).

Полагая  $h = \Delta\tilde{\varphi}$  в (21), приходим к равенству

$$\begin{aligned} & -(\lambda(c + \varphi_0)\Delta\tilde{\varphi}, \Delta\tilde{\varphi}) - (\lambda(c + \varphi_0)\Delta\varphi_0, \Delta\tilde{\varphi}) + \\ & + (k(c + \varphi_0, \cdot)(\tilde{\varphi} + \varphi_0), \Delta\tilde{\varphi}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\tilde{\varphi}, \Delta\tilde{\varphi}) = \\ & = (\lambda'(c + \varphi_0)(\nabla c \cdot \nabla\tilde{\varphi} + \nabla c \cdot \nabla\varphi_0 + \nabla\varphi_0 \cdot \nabla\tilde{\varphi} + \nabla\varphi_0 \cdot \nabla\varphi_0), \Delta\tilde{\varphi}) + \\ & + (f, \Delta\tilde{\varphi}) - (\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi_0, \Delta\tilde{\varphi}), \end{aligned} \quad (22)$$

из которого выводим неравенство:

$$\begin{aligned} & \lambda_{\min} \|\Delta \tilde{\varphi}\|_{\Omega} \leq \\ & C'_0 (\lambda'_{\max} C_{\Gamma} \|\psi\|_{3/2, \Gamma} + \lambda'_{\max} \|\Delta c\|_{\Omega} + \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} + a C_k (\|\Delta c\|_{\Omega}^s + C_{\Gamma}^s \|\psi\|_{3/2, \Gamma}^s)) \|\Delta \tilde{\varphi}\|_{\Omega} + \\ & \quad + \|f\|_{\Omega} + C'_1 [C_{\Gamma} \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} \|\psi\|_{3/2, \Gamma} + \lambda_{\max} C_{\Gamma} \|\psi\|_{3/2, \Gamma} + \\ & \quad + C_{\Gamma}^{s+1} \|\psi\|_{3/2, \Gamma}^{s+1} + \lambda'_{\max} C_{\Gamma}^2 \|\psi\|_{3/2, \Gamma}^2 + \\ & \quad \lambda'_{\max} C_{\Gamma} \|\psi\|_{3/2, \Gamma} \|\Delta c\|_{\Omega} + a C_k C_{\Gamma} \|\psi\|_{3/2, \Gamma} \|\Delta c\|_{\Omega}^s], \quad s \geq 1. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь  $C'_0$  и  $C'_1$  – положительные константы, зависящие от  $\Omega$  и  $\Gamma$ .

При выполнении условий в (12) с учетом обозначения (13) из (23) приходи к оценке:

$$(1/2) \|\Delta \tilde{\varphi}\|_{\Omega} \leq (1/4)r + (1/4)r, \quad (24)$$

из которой явно вытекает, что оператор  $G$  переводит ограниченное замкнутое множество

$$\mathcal{B} = \{c \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : \|\Delta c\|_{\Omega} \leq r\} \quad (25)$$

в себя при конкретном значении  $r$ , определенном в (13).

Тем самым, при условиях малости (12) оператор  $G$  отображает множество  $\mathcal{B}$  определенное в (25) в себя. Как и в [26] имеем, что оператор  $G$  непрерывен и компактен на множестве  $\mathcal{B}$ . Тогда из теоремы Шаудера следует, что оператор  $G$  имеет неподвижную точку  $\tilde{\varphi} = G(\tilde{\varphi})$ , для которой справедлива оценка  $\|\tilde{\varphi}\|_{2, \Omega} \leq r$ . Тогда функция  $\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi_0$  является сильным решением задачи 1 и для нее справедлива априорная оценка (15). ■

Наконец, мы докажем единственность “малого” сильного решения  $\varphi$  задачи 1.

Пусть выполняется следующее условие:

(Н.3.5) функции  $\lambda$  и  $\lambda'$  – непрерывны по Липшицу и с положительными константами  $L_{\lambda}$  и  $L'_{\lambda}$  справедливы неравенства:

$$|\lambda(s_1) - \lambda(s_2)| \leq L_{\lambda} |s_1 - s_2|, \quad |\lambda'(s_1) - \lambda'(s_2)| \leq L'_{\lambda} |s_1 - s_2| \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Справедлива следующая теорема о единственности “малого” по норме пространства  $H^2(\Omega)$  сильного решения задачи 1.

**Теорема 4.** Пусть выполняются условия (Н.3.1)–(Н.3.5). Тогда существует положительное число  $\varepsilon > 0$  такое, что если существует сильное решение  $\varphi \in H^2(\Omega)$  задачи 1, удовлетворяющее неравенству  $\|\varphi\|_{2, \Omega} < \varepsilon$ , то такое решение единственно.

**Доказательство.** Умножим уравнение в (14) на функцию  $h \in L^2(\Omega)$  и проинтегрируем по  $\Omega$ . Получим

$$-(\operatorname{div}(\lambda(\varphi)\nabla\varphi), h) + (k(\varphi, \cdot)\varphi, h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi, h) = (f, h) \quad \forall h \in L^2(\Omega). \quad (26)$$

Используя равенство

$$\operatorname{div}(\lambda(\varphi)\nabla\varphi) = \lambda(\varphi)\Delta\varphi + \nabla\lambda(\varphi) \cdot \nabla\varphi = \lambda(\varphi)\Delta\varphi + \lambda'(\varphi)\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi \quad \text{в } \Omega, \quad (27)$$

перепишем (26) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & -(\lambda(\varphi)\Delta\varphi, h) + (k(\varphi, \cdot)\varphi, h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi, h) = \\ & = (\lambda'(\varphi)\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi, h) + (f, h) \quad \forall h \in L^2(\Omega). \end{aligned} \quad (28)$$

Пусть существуют два решения  $\varphi_i \in H^2(\Omega)$ ,  $i = 1, 2$ , уравнения (28), где  $\varphi_i = \psi$  на  $\Gamma$ . Из [3] вытекает, что их разность  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  удовлетворяет соотношению:

$$\begin{aligned} & -(\lambda(\varphi_1)\Delta\varphi, h) = (\lambda'(\varphi_1)\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi, h) - (k(\varphi_1, \cdot)\varphi, h) - (\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi, h) + \\ & \quad + ((\lambda'(\varphi_1) - \lambda'(\varphi_2))\nabla\varphi_1 + \lambda'(\varphi_2)\nabla\varphi) \cdot \nabla\varphi_2, h) + \\ & \quad + ((\lambda(\varphi_1) - \lambda(\varphi_2))\Delta\varphi_2, h) - (k(\varphi_1, \cdot) - k(\varphi_2, \cdot), \varphi_2 h) \quad \forall h \in L^2(\Omega). \end{aligned} \quad (29)$$

Полагая  $h = \Delta\varphi$  в (29) и учитывая свойства (Н.3.2), (Н.3.5), приходим к неравенству:

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}\|\Delta\varphi\|_{\Omega}^2 & \leq C'_1[\lambda'_{\max}\|\varphi_1\|_{2,\Omega}\|\Delta\varphi\|_{\Omega}^2 + C_k\|\varphi_1\|_{2,\Omega}^r\|\Delta\varphi\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3}\|\Delta\varphi\|_{\Omega}^2 + \\ & \quad + L'_\lambda\|\varphi_1\|_{2,\Omega}\|\varphi_2\|_{2,\Omega}\|\Delta\varphi\|_{\Omega}^2 + \lambda'_{\max}\|\varphi_1\|_{2,\Omega}\|\Delta\varphi\|_{\Omega}^2 + L_\lambda\|\varphi_1\|_{2,\Omega}\|\Delta\varphi\|_{\Omega}^2 + \\ & \quad \quad \quad + L\|\varphi_2\|_{2,\Omega}\|\Delta\varphi\|_{\Omega}^2]. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь  $C'_1$  – положительная константа, зависящая от  $\Omega$ .

Из (30) вытекает, что если

$$\begin{aligned} & C'_1[\lambda'_{\max}\|\varphi_1\|_{2,\Omega} + C_k\|\varphi_1\|_{2,\Omega}^r + \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} + \\ & \quad + L'_\lambda\|\varphi_1\|_{2,\Omega}\|\varphi_2\|_{2,\Omega} + \lambda'_{\max}\|\varphi_1\|_{2,\Omega} + L_\lambda\|\varphi_1\|_{2,\Omega} + L\|\varphi_2\|_{2,\Omega}] < \lambda_{\min}, \end{aligned}$$

то  $\|\Delta\varphi\|_{\Omega} = 0$  или  $\varphi_1 = \varphi_2$ . ■

#### 4 Постановка и разрешимость задачи управления

В данном разделе для задачи 1 рассмотрим задачу управления. Роль управлений играют функции  $f$  и  $\psi$ , которые могут изменяться в некоторых множествах  $K_1$  и  $K_2$ , соответственно. Положим  $K = K_1 \times K_2$ ,  $u = (f, \psi)$ , введем функциональное пространство  $Y = H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$  и определим оператор  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2): H^1(\Omega) \times K \rightarrow Y$ , действующий по формулам:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1(\varphi, f), h \rangle & = (\lambda(\varphi)\nabla\varphi, \nabla h) + (k(\varphi, \cdot)\varphi, h) + \\ & \quad + ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\varphi, h) - (f, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega) \\ \Phi_2(\varphi, \psi) & = \varphi|_{\Gamma} - \psi \in H^{1/2}(\Gamma) \end{aligned} \quad (31)$$

и перепишем слабую формулировку задачи 1 в виде  $\Phi(\varphi, u) = 0$ .

Рассматривая это равенство как условное ограничение на состояние  $\varphi \in H^1(\Omega)$  и управления  $f \in K_1$  и  $\psi \in K_2$ , сформулируем задачу условной минимизации:

$$\begin{aligned} J(\varphi, \psi) & := \frac{\mu_0}{2}I(\varphi) + \frac{\mu_1}{2}\|f\|_{\Omega}^2 + \frac{\mu_2}{2}\|\psi\|_{1/2,\Gamma}^2 \rightarrow \min, \\ \Phi(\varphi, u) & = 0, \quad (\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $I: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  – слабо полунепрерывный снизу функционал.

Через

$$Z_{\text{ad}} := \{(\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K : \Phi(\varphi, u) = 0 \text{ и } J(\varphi, u) < \infty\}$$

обозначим множество допустимых пар задачи (32) и предположим, что выполняются следующие условия:

(H.4.1)  $K_1 \subset L^2(\Gamma)$  и  $K_2 \subset H^{1/2}(\Gamma)$  – непустые выпуклые замкнутые множества;

(H.4.2)  $\mu_0 > 0$ ,  $\mu_1 \geq 0$ ,  $\mu_2 \geq 0$  и  $K_1$ ,  $K_2$  – ограниченные множества, или  $\mu_i > 0$ ,  $i = 0, 1, 2$ , и функционал  $I$  ограничен снизу.

Ниже приведем примеры функционалов качества:

$$I_1(\varphi) := \|\varphi - \varphi^d\|_Q^2, \quad I_2(\varphi) := \|\varphi - \varphi^d\|_{1,Q}^2.$$

Здесь  $\varphi^d \in L^2(Q)$  (или  $\varphi^d \in H^1(Q)$ ) – заданные в подобласти  $Q \subset \Omega$  функции.

Справедлива следующая теорема [1].

**Теорема 5.** Пусть выполняются условия (H.2.1)–(H.2.6) и (H.4.1), (H.4.2), функционал  $I: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  слабо полунепрерывен и множество допустимых пар  $Z_{\text{ad}}$  не пусто. Тогда задача (32) имеет, по крайней мере, одно решение  $(\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K$ .

## 5 Вывод системы оптимальности

В этом разделе мы выведем систему оптимальности для задачи управления (32) при конкретных коэффициентах диффузии и реакции:

$$\lambda(t) = \frac{1}{1+t^2} + 1, \quad k(t) = t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Через  $\lambda'(t)$  обозначим первую производную функции  $\lambda(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Ясно, что

$$\lambda'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2},$$

$$|\lambda'(\varphi)| \leq \lambda'_{\max} \text{ п.в. в } \Omega \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad \lambda'_{\max} = 1.$$

Рассмотрим производную Фреше от оператора  $F: H^1(\Omega) \times K \rightarrow Y \equiv H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$  по состоянию  $\varphi$  в точке локального минимума  $(\hat{\varphi}, \hat{u}) = (\hat{\varphi}, \hat{f}, \hat{\psi})$  задачи (32). Дополнительно будем считать, что  $\nabla \hat{\varphi} \in L^4(\Omega)^3$ . (Данное условие заведомо выполняется для сильного решения задачи 1, см. разд. 3).

Указанная производная есть линейный непрерывный оператор

$$F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u}): H^1(\Omega) \rightarrow Y,$$

ставящий каждому элементу  $h \in H^1(\Omega)$  элемент  $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u})h = (\hat{y}_1, \hat{y}_2) \in Y$ .

Здесь  $\hat{y}_1 \in H^{-1}(\Omega)$  и  $\hat{y}_2 \in H^{1/2}(\Gamma)$  определяются по функциям  $\hat{\varphi}$  и  $\tau$  из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \langle \hat{y}_1, \tau \rangle &= (\lambda'(\hat{\varphi})\tau \nabla \hat{\varphi}, \nabla h) + (\lambda(\hat{\varphi})\nabla \tau, \nabla h) + \\ &+ 3(\hat{\varphi}^2 \tau, h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

$$\hat{y}_2 = \tau|_{\Gamma}. \quad (33)$$

Через  $F'_{\varphi}(\hat{\varphi}, \hat{u})^* : Y^* \rightarrow H^1(\Omega)^*$  обозначим оператор, сопряженный к  $F'_{\varphi}(\hat{\varphi}, \hat{u})$ .

В соответствии с общей теорией гладко-выпуклых экстремальных задач [40], введем элемент  $\mathbf{y}^* = (\theta, \zeta) \in Y^* = H_0^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ , на который будем ссылаться, как на сопряженное состояние и введем Лагранжиан  $\mathcal{L} : H^1(\Omega) \times K \times \mathbb{R} \times Y^* \rightarrow \mathbb{R}$  по формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi, u, \lambda_0, \mathbf{y}^*) &= \lambda_0 J(\varphi, u) + \langle \mathbf{y}^*, F(\varphi, u) \rangle_{Y^* \times Y} \equiv \lambda_0 J(\varphi, u) + \\ &+ \langle F_1(\varphi, u), \theta \rangle + \langle \zeta, F_2(\varphi) \rangle_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (34)$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.** Пусть выполняются условия (Н.2.1), (Н.2.2) и (Н.4.1), (Н.4.2), при этом

$$\lambda(\varphi) = 1/(1 + \varphi^2) + 1, \quad k(\varphi) = \varphi^2$$

и элемент  $(\hat{\varphi}, \hat{u}) \in H^1(\Omega) \times K$  – точка локального минимума в задаче (32), при этом  $\nabla \hat{\varphi} \in L^4(\Omega)^3$ .

Пусть так же функционал качества  $I : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно дифференцируем по Фреше по состоянию  $\varphi$  в точке  $\hat{\varphi}$ .

Тогда:

1) существует ненулевой множитель Лагранжа

$$(\lambda_0, \mathbf{y}^*) = (\lambda_0, \theta, \zeta) \in \mathbb{R}^+ \times Y^*,$$

с которым справедливо уравнение Эйлера–Лагранжа

$$F'_{\varphi}(\hat{\varphi}, \hat{u})^* \mathbf{y}^* = -\lambda_0 J'_{\varphi}(\hat{\varphi}, \hat{u}) \text{ в } H^1(\Omega)^*,$$

эквивалентное соотношению

$$\begin{aligned} (\lambda'(\hat{\varphi})\tau \nabla \hat{\varphi}, \nabla \theta) + (\lambda(\hat{\varphi})\nabla \tau, \nabla \theta) + 3(\hat{\varphi}^2 \tau, \theta) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, \theta) + \\ + \langle \zeta, \tau \rangle_{\Gamma} = -\lambda_0(\mu_0/2) \langle I'_{\varphi}(\hat{\varphi}), \tau \rangle \quad \forall \tau \in H^1(\Omega) \end{aligned} \quad (35)$$

и справедлив принцип минимума

$$\mathcal{L}(\hat{\varphi}, \hat{u}, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \leq \mathcal{L}(\hat{\varphi}, u, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \quad \forall u \in K$$

эквивалентный неравенствам

$$\lambda_0 \mu_1(\hat{f}, f - \hat{f}) - (f - \hat{f}, \theta) \geq 0 \quad \forall f \in K_1, \quad (36)$$

$$\lambda_0 \mu_2(\hat{\psi}, \psi - \hat{\psi})_{1/2, \Gamma} + \langle \zeta, \psi - \hat{\psi} \rangle_{\Gamma} \geq 0 \quad \forall \psi \in K_2. \quad (37)$$

2) Если, к тому же, выполняется условие:

$$\lambda'_{\max} \tilde{C}_1 \|\nabla \hat{\varphi}\|_{L^4(\Omega)^3} < \lambda_*, \quad (38)$$

где  $\tilde{C}_1$  – положительная константа, зависящая от  $\Omega$ , то нетривиальный множитель Лагранжа  $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$ , удовлетворяющий (35)–(37), является регулярным, т.е. имеет вид  $(1, \mathbf{y}^*)$  и определяется единственным образом по паре  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ .

**Доказательство.**

Согласно [40, гл. 2], для доказательства существования множителя Лагранжа  $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$  достаточно показать, что оператор

$$F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u}) : H^1(\Omega) \rightarrow Y$$

является Фредгольмовым. В силу (33), оператор  $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u}) : H^1(\Omega) \rightarrow Y$  можно представить в виде

$$F'_\varphi = \Phi + \hat{\Phi} \equiv (\Phi_1, \Phi_2) + (\hat{\Phi}_1, 0).$$

Здесь

$$\Phi_2(\tau) = \tau|_\Gamma,$$

а операторы  $\Phi_1$  и  $\hat{\Phi}_1 : H^1(\Omega) \rightarrow Y$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1(\tau), h \rangle &= (\lambda(\hat{\varphi})\nabla\tau, \nabla h) + 3(\hat{\varphi}^2\tau, h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\tau, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega), \\ \langle \hat{\Phi}_1(\tau), h \rangle &= (\lambda'(\hat{\varphi})\tau\nabla\hat{\varphi}, \nabla h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (39)$$

Покажем, что оператор  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : H^1(\Omega) \rightarrow Y$  – изоморфизм. Для этого следует доказать, что для любой пары  $(f, \psi) \in Y$  существует единственное решение  $\tau \in H^1(\Omega)$  линейной задачи

$$(\lambda(\hat{\varphi})\nabla\tau, \nabla h) + 3(\hat{\varphi}^2\tau, h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\tau, h) = \langle f, h \rangle \quad \forall h \in H_0^1(\Omega), \quad (40)$$

$$\tau = \psi \text{ на } \Gamma. \quad (41)$$

Решение задачи (40), (41) будем искать в виде

$$\tau = \tilde{\tau} + \tau_0. \quad (42)$$

Здесь  $\tau_0 \in H^1(\Omega)$  – функция лифтинга из леммы 2, а  $\tilde{\tau} \in H_0^1(\Omega)$  – неизвестная функция.

Подставляя (42) в (40), получим

$$\begin{aligned} &(\lambda(\hat{\varphi})\nabla\tilde{\tau}, \nabla h) + 3(\hat{\varphi}^2\tilde{\tau}, h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\tilde{\tau}, h) = \langle \tilde{f}, h \rangle \equiv \\ &\equiv \langle f, h \rangle - (\lambda(\hat{\varphi})\nabla\tau_0, \nabla h) - 3(\hat{\varphi}^2\tau_0, h) - (\mathbf{u} \cdot \nabla\tau_0, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (43)$$

Из теоремы Лакса–Мильграма и лемм 1 и 2 вытекает существование решения  $\tilde{\tau} \in H_0^1(\Omega)$  задачи (43), для которого справедлива оценка:

$$\begin{aligned} &\|\tilde{\tau}\|_{1,\Omega} \leq C_* \|\tilde{f}\|_{-1,\Omega} \equiv \\ &\equiv C_* (\|f\|_{-1,\Omega} + C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma} (\lambda_{\max} + 3\|\hat{\varphi}\|_{L^4(\Omega)}^2 + \gamma\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3})). \end{aligned} \quad (44)$$

В таком случае, существует решение  $\tau = \tilde{\tau} + \tau_0$  задачи (40), для которого справедлива оценка:

$$\|\tau\|_{1,\Omega} \leq C_* \|\tilde{f}\|_{-1,\Omega} + C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma}. \quad (45)$$

Пусть  $\tau_1$  и  $\tau_2$  – два решения задачи (40), (41). Тогда разность  $\tau = \tau_1 - \tau_2 \in H_0^1(\Omega)$  удовлетворяет соотношениям

$$(\lambda(\hat{\varphi})\nabla\tau, \nabla h) + 3(\hat{\varphi}^2\tau, h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\tau, h) = 0 \quad \forall h \in H_0^1(\Omega), \quad (46)$$

$$\tau = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (47)$$

Полагая  $h = \tau$  в (46), приходим к равенству

$$(\lambda(\hat{\varphi})\nabla\tau, \nabla\tau) + 3(\hat{\varphi}^2\tau, \tau) = 0,$$

из которого в силу (5) вытекает, что  $\tau = 0$  или  $\tau_1 = \tau_2$  в  $\Omega$ . В таком случае, оператор  $\Phi : H^1(\Omega) \rightarrow Y$  – сюръективен и обратим. Тогда по теореме Банаха он является изоморфизмом.

Покажем, что оператор  $\hat{\Phi} = (\hat{\Phi}_1, 0) : H^1(\Omega) \rightarrow Y$ , определенный формулой (39), является непрерывным и компактным. Поскольку пространство  $H^1(\Omega)$  непрерывно и компактно вкладывается в  $L^p(\Omega)$ , где  $p < 6$ , то указанный факт вытекает из следующей оценки:

$$|(\lambda'(\hat{\varphi})\tau \nabla \hat{\varphi}, \nabla h)| \leq \lambda'_{\max} \|\tau\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla \hat{\varphi}\|_{L^4(\Omega)^3} \|\nabla h\|_{L^2(\Omega)^3},$$

В таком случае, оператор  $F'_\varphi(\varphi, u) : H^1(\Omega) \rightarrow Y$  – Фредгольмов, как сумма изоморфизма  $\Phi : H^1(\Omega) \rightarrow Y$  и непрерывного компактного оператора  $\hat{\Phi} : H^1(\Omega) \rightarrow Y$ .

Для доказательства второго утверждения теоремы 6 достаточно показать, что однородное уравнение (35) (при  $\lambda_0 = 0$ ) имеет только тривиальное решение  $\mathbf{y}^* = (\theta, \zeta) \equiv \mathbf{0}$ . Предположим противное, т.е., что существует по крайней мере одно нетривиальное решение  $\mathbf{y}^* = (\theta, \zeta) \in Y^*$  уравнения (35) при  $\lambda_0 = 0$ , где элементы  $\hat{\varphi}$  и  $\hat{u}$  связаны соотношением  $F(\hat{\varphi}, \hat{u}) = 0$ .

Полагая  $\tau = \theta$  в (35) при  $\lambda_0 = 0$ , получим

$$(\lambda(\hat{\varphi})\nabla\theta, \nabla\theta) + (\lambda'(\hat{\varphi})\theta \nabla\hat{\varphi}, \nabla\theta) + 3(\hat{\varphi}^2\theta, \theta) = 0 \quad (48)$$

Из (48) выводим, что

$$\lambda_* \|\theta\|_{1,\Omega}^2 \leq \lambda'_{\max} \tilde{C}_1 \|\nabla\hat{\varphi}\|_{L^4(\Omega)^3} \|\theta\|_{1,\Omega}^2, \quad (49)$$

где  $\tilde{C}_1$  – положительная константа, зависящая от  $\Omega$ .

Из (49) вытекает, что если выполняются условия (38), то  $\theta = 0$  п.в. в  $\Omega$ . В таком случае

$$\langle \zeta, \tau \rangle_\Gamma = 0 \quad \forall \tau \in H^1(\Omega)$$

и, следовательно,  $\zeta = 0$  в  $H^{-1/2}(\Gamma)$ .

Последнее противоречит предположению о нетривиальности множителя Лагранжа  $(\theta, \zeta) \in Y^*$ . Единственность регулярного множителя Лагранжа  $(1, \mathbf{y}^*)$  при выполнении условий (38) вытекает из Фредгольмовости оператора  $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u}) : H^1(\Omega) \rightarrow Y$ . ■

## 6 Заключение

В настоящей работе доказано локальное существование и единственность сильного решения неоднородной краевой задачи для уравнения реакции–диффузии–конвекции с переменными коэффициентами и получена его априорная оценка. На слабых решениях указанной краевой задачи рассматривается задача граничного управления, для которой выводится система оптимальности. Установлены достаточные условия регулярности данной системы.

## References

- [1] R.V. Brizitskii *Boundary control problem for reaction–diffusion–convection equation with variable coefficients*, Sib. El. Math. Rep. **22** (2025) 623–634.
- [2] G.V. Alekseev, O.V. Soboleva, *Inhomogeneous boundary value problems for the generalized Boussinesq model of mass transfer*, Mathematics. **12**:3 (2024) 391.
- [3] E.S. Baranovskii, R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia, *Optimal control problems for the reaction–diffusion–convection equation with variable coefficients*, Nonlinear Analysis: Real World Appl. **75** (2024) 103979.
- [4] R.V. Brizitskii, *Boundary value and control problems for mass transfer equations with variable coefficients*, J. Dynam. Control Syst. **30**:2 (2024) 24.
- [5] R.V. Brizitskii, Zh.Yu. Saritskaya, *Analysis of properties of solutions to control problems for mass transfer equations with variable coefficients*, Sib. El. Math. Rep. **22** (2025) 125–142.
- [6] R.V. Brizitskii, Zh.Yu. Saritskaya, *Boundary value and extremal problems for the nonlinear convection–diffusion–reaction equation*, Sib. El. Math. Rep. **12** (2015) 447–456.
- [7] R.V. Brizitskii, Zh.Yu. Saritskaya, A.I. Byrganov, *Multiplicative control problems for nonlinear convection–diffusion–reaction equation*, Sib. El. Math. Rep. **13** (2016) 352–360.
- [8] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaya, *Boundary control problem for a nonlinear convection–diffusion–reaction equation*, Comp. Math. Math. Phys. **58** (12) (2018) 2053–2063.
- [9] R.V. Brizitskii, V.S. Bystrova, Z.Y. Saritskaia, *Analysis of boundary value and extremum problems for a nonlinear reaction–diffusion–convection equation*, Diff. Equat. **57**:5 (2021) 615–629.
- [10] A.Y. Chebotarev, G.V. Grenkin, A.E. Kovtanyuk, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Diffusion approximation of the radiative–conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **57** (2018) 290–298.
- [11] A. Kovtanyuk, A. Chebotarev, A. Astrakhantseva, *Inverse extremum problem for a model of endovenous laser ablation*, J. Inv. Ill-Posed Probl. **29**:3 (2021) 467–476.
- [12] A.E. Kovtanyuk, A.Y. Chebotarev, N.D. Botkin, V.L. Turova, I.N. Sidorenko, R. Lampe, *Continuum model of oxygen transport in brain*, J. Math. Anal. Appl. **474**:2 (2019) 1352–1363.
- [13] Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Turova V.L., Sidorenko I.N., Lampe R., *Nonstationary model of oxygen transport in brain tissue*, Computational and Mathematical Methods in Medicine. **2020** (2020) 4861654.
- [14] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia, *Analysis of inhomogeneous boundary value problems for generalized Boussinesq model of mass transfer*, J. Dynam. Control Syst. **29**:4 (2023) 1809–1828.
- [15] S.A. Lorca, J.L. Boldrini, *Stationary solutions for generalized Boussinesq models*, J. Dif. Eq. **124** (1996) 389–406.
- [16] T. Kim, *Steady Boussinesq system with mixed boundary conditions including friction conditions*, Appl. Math. **67** (2022) 593–613.
- [17] A. Bermudez, R. Munoz-Sola, R. Vazquez, *Analysis of two stationary magnetohydrodynamics systems of equations including Joule heating*, J. Math. Anal. Appl. **368** (2010) 444–468.
- [18] E.S. Baranovskii, M.A. Artemov, *Existence of optimal control for a nonlinear-viscous fluid model*, Int. J. Differ. Equ. **2016** (2016) Article ID 9428128.
- [19] R. Duan, A. Guo, C. Zhu, *Global strong solution to compressible Navier–Stokes equations with density dependent viscosity and temperature dependent heat conductivity*, J. Differ. Equ. **262** (2017) 4314–4335.
- [20] E.S. Baranovskii, A.A. Domnich, M.A. Artemov, *Optimal boundary control of non-isothermal viscous fluid flow*, Fluids **4**:3 (2019) Article ID 133.

- [21] E.S. Baranovskii, A.A. Domnich, *Model of a nonuniformly heated viscous flow through a bounded domain*, Differ. Equ. **56**:3 (2020) 304–314.
- [22] E.S. Baranovskii, E. Lenes, E. Mallea-Zepeda, J. Rodriguez, L. Vasquez, *Control problem related to 2D Stokes equations with variable density and viscosity*, Symmetry **13**:11 (2021) Article ID 2050.
- [23] E.S. Baranovskii, *Optimal boundary control of the Boussinesq approximation for polymeric fluids*, J. Optim. Theory Appl. **189** (2021) 623–645.
- [24] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia, *Multiplicative control problems for nonlinear reaction–diffusion–convection model*, J. Dynam. Control Syst. **27**:2 (2021) 379–402.
- [25] Z.Y. Saritskaia, *Boundary value problem for nonlinear mass–transfer equations under Dirichlet condition*, Sib. El. Math. Rep. **19** (2022) 360–370.
- [26] G.V. Alekseev, R.V. Brizitskii, *Theoretical analysis of boundary value problems for generalized Boussinesq model of mass transfer with variable coefficients*, Symmetry **14**:12 (2022) Article ID 2580.
- [27] E.S. Baranovskii, R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia, *Multiplicative control problem for the stationary mass transfer model with variable coefficients*, Applied Mathematics and Optimization. **90**:2 (2024) 46.
- [28] E.S. Baranovskii, R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia, *Boundary value and control problems for the stationary heat transfer model with variable coefficients*, Journal of Dynamical and Control Systems **30**:3 (2024) 26.
- [29] E.S. Baranovskii, *Strong solutions of the incompressible Navier–Stokes–Voigt model*, Mathematics. **8**:2 (2020) Article ID 181.
- [30] M. Ruzicka, V. Shelukhin, M.M. dos Santos, *Steady flows of Cosserat–Bingham fluids*, Math. Meth. Appl. Sc. **40** (2017) 2746–2761.
- [31] V.V. Shelukhin, *Thermodynamics of two-phase granular fluids*, J. Non-Newtonian Fluid Mech. **262** (2018) 25–37.
- [32] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solvability of unsteady equations of multi–component viscous compressible fluids*, Izv. Math. **82**1 (2018) 140–185.
- [33] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solvability of unsteady equations of the three–dimensional motion of two–component viscous compressible heat–conducting fluids*, Izv. Math. **85**:4 (2021) 755–812.
- [34] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Global unique solvability of the initial–boundary value problem for the equations of one–dimensional polytropic flows of viscous compressible multicomponents*, J. Math. Fluid Mech. **21**:9 (2019) 1–9.
- [35] D.A. Prokudin, *On stabilization of the solution to the initial boundary value problem for one–dimensional isothermal equations of viscous compressible multicomponent media dynamics*, Mathematics. **11** (2023) Article ID 3065.
- [36] E. Mallea-Zepeda, E. Ortega-Torres, *Control problem for a magneto–micropolar flow with mixed boundary conditions for the velocity field*, J. Dyn. Control Syst. **25** (2019) 599–618.
- [37] V. Girault, P.A. Raviart, *Finite element methods for Navier–Stokes equations. Theory and algorithms*, Berlin. Springer–Verlag, 1986.
- [38] G.V. Alekseev, *Optimization in the stationary problems of the heat–mass transfer and magnetic hydrodynamics*, Nauchiy Mir: Moscow, 2010 (in Russian).
- [39] R. Temam, *Navier–Stokes Equations*, North-Holland: Amsterdam, The Netherlands, 1977.
- [40] A.V. Fursikov, *Optimal control of distributed systems: Theory and applications*, Providence, R.I.: Am. Math. Soc., 2000.

ROMAN VICTOROVICH BRIZITSKII  
INSTITUTE OF APPLIED MATHEMATICS FEB RAS,  
STR. RADIO, 7,  
690041, VLADIVOSTOK, RUSSIA  
*Email address:* [mlnwizard@mail.ru](mailto:mlnwizard@mail.ru)

ZHANNA YURIEVNA SARITSKAIA  
INSTITUTE OF APPLIED MATHEMATICS FEB RAS,  
STR. RADIO, 7,  
690041, VLADIVOSTOK, RUSSIA  
*Email address:* [zhsar@icloud.com](mailto:zhsar@icloud.com)