S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 23, № 1, стр. 69–88 (2026) УДК 517.977
https://doi.org/10.33048/semi.2026.23.005 MSC 49N05,93C70

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА, ДЕШЕВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ И ДВУМЯ ТОЧКАМИ СМЕНЫ ВИДА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.Р. Данилин, А.А. Шабуров

Представлено Е.М. Рудым

Abstract: We consider the optimal control problem with integral convex performance index for a linear system in the class of piecewise continuous controls with smooth geometric constraints on the control. Such problems are called cheap control problems. We study the case where the optimal control of the limit problem remains unchanged, whereas for the original problem there are two points at which the control form is changed. Using the auxiliary parameter method, we show that the solution may have expansion in the Poincare sense in any asymptotic sequence of rational functions of the small parameter or its logarithms.

Keywords: optimal control, cheap control, asymptotic expansion, singularly perturbed problem, small parameter.

Danilin, A.R., Shaburov, A.A., Asymptotics of a Solution to an Optimal Control Problem with Integral Convex Performance Index, Cheap Control, and two switching points of control.

Поступила 23 июля 2025 г., опубликована 2 марта 2026 г.

1 Введение

Рассматривается задача оптимального управления [1, 2, 3] для линейной системы с постоянными коэффициентами с интегральным выпуклым критерием качества в классе кусочно–непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями. При этом интегральное слагаемое в критерии качества содержит в качестве множителя малый параметр. В работах, посвященных сингулярно возмущенным задачам управления, такие задачи называются задачами с дешевым управлением (см., например, обзоры [4, 5, 6]). Но, (см., например, статьи [7, 8]) в опубликованных работах при анализе линейно-квадратичных задач с дешевым управлением строится асимптотика решения только при условии отсутствия ограничений на оптимальное управление.

При стремлении малого параметра к нулю исходная задача с дешевым управлением сводится к задаче оптимального управления с терминальным критерием качества. Отметим, что в предельной задаче оптимальное управление может иметь разрывы, в то время как у исходной задачи оптимальное управление непрерывно во всех точках. В статье рассмотрен случай наличия двух точек смены вида оптимального управления во внутреннем разложении. Асимптотика оптимального управления находится через построение асимптотики определяющего вектора. Заметим, что в отличие от предыдущих работ асимптотика определяющего вектора содержит слагаемые с $\ln\varepsilon$, а не только степенные слагаемые по малому параметру.

2 Постановка задачи, определяющие соотношения и основные определения

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления в классе кусочно-непрерывных управлений:

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = Ax_\varepsilon + By_\varepsilon + Cu, & x_\varepsilon(0) = x^0, \quad t \in [0;T], \\ \varepsilon^2 \dot{y}_\varepsilon = -y_\varepsilon + u, & y_\varepsilon(0) = y^0, \quad \|u\| \leqslant 1, \end{cases} \tag{1}$$

где $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $y_\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^m$, A, B, C — постоянные матрицы соответствующей размерности, с интегральным выпуклым критерием качества

$$J_\varepsilon(u) := \frac{1}{2}\|x_\varepsilon(T;u)\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^T \|u(t)\|^2\,dt \to \min. \tag{2}$$

Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма в соответствующем конечномерном векторном пространстве, x^0 и y^0 — известные векторы, $x_\varepsilon(\cdot;u)$ — решение системы (1) при заданном управлении $u(\cdot)$, а $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Будем обозначать через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в соответствующем конечномерном векторном пространстве, а в качестве символа транспонирования матриц используется, как и в [3, с. 132], знак *, например, B^*.

Запишем управляемую систему из (1) в матричном виде

$$\begin{cases} \dot{z}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon z_\varepsilon + \mathcal{B}_\varepsilon u_\varepsilon, \\ z_\varepsilon(0) = z^0, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$z_\varepsilon = \begin{pmatrix} x_\varepsilon \\ y_\varepsilon \end{pmatrix}, \; z^0 := \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix}, \; \mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} A & B \\ O & -\varepsilon^{-2} I \end{pmatrix}, \; \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} C \\ \varepsilon^{-2} I \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Здесь и далее, O—нулевая матрица, I—матрица тождественного отображения соответствующего конечномерного пространства.

Предположение 1. *Система из* (3) *вполне управляема, что эквивалентно вследствие критерия Калмана* [2, с. 91, теорема 5] *условию*

$$\operatorname{rank}(\mathcal{B}_\varepsilon, \mathcal{A}_\varepsilon \mathcal{B}_\varepsilon, \ldots, \mathcal{A}_\varepsilon^{n+m-1} \mathcal{B}_\varepsilon) = n + m.$$

Непосредственным вычислением матричной экспоненты из (4) получаем, что

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} e^{At} & \varepsilon^2 W(t,\varepsilon) \\ O & e^{-t/(\varepsilon^2)} I \end{pmatrix}, \; e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} e^{At} C + W(t,\varepsilon) \\ \varepsilon^{-2} e^{-t/(\varepsilon^2)} I \end{pmatrix},$$

где $W(t,\varepsilon) := (I + \varepsilon^2 A)^{-1}(e^{At} - e^{-t/(\varepsilon^2)} I) B$.

В силу [9, формулы (23) и (27)], принимая во внимание соотношение $\nabla(\|\zeta\|^2/2) = \zeta$, запишем уравнение для определяющего вектора

$$\widetilde{l}_\varepsilon = -x_\varepsilon(T; u_\varepsilon^{opt}) = -\nabla(\|x_\varepsilon(T; u_\varepsilon^{opt})\|^2/2),$$

$$-\widetilde{l}_\varepsilon = e^{AT} x^0 + \varepsilon^2 W(T,\varepsilon) y^0 + \int\limits_0^T \widetilde{V}(t,\varepsilon) u_\varepsilon^{opt}(T-t)\, dt, \tag{5}$$

где $u_\varepsilon^{opt}(T-t) = \frac{\widetilde{V}^*(t,\varepsilon)\widetilde{l}_\varepsilon}{S_\varepsilon(\|\widetilde{V}^*(t,\varepsilon)\widetilde{l}_\varepsilon\|)}$, $\widetilde{V}(t,\varepsilon) := e^{At} C + W(t,\varepsilon)$,

$$S_\varepsilon(\xi) := \begin{cases} \varepsilon, & \xi \in [0; \varepsilon), \\ \xi, & \xi \geqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{6}$$

Как показано в [9, Теорема 1] предельной задачей для (1)–(2) будет задача

$$\begin{cases} \dot{x_0} = A_0 x_0 + B_0 u, & t \in [0; T], \quad \|u\| \leqslant 1, \\ x_0(0) = x^0, & J_0(u_0) := \frac{1}{2}\|x_0(T; u)\|^2 \to \min, \end{cases} \tag{7}$$

где $A_0 := A$, $B_0 := B + C$.

Предположение 2. *Система из предельной задачи (7) вполне управляема и x^0 таково, что ограничения на управление в задаче (7) по существу.*

При выполнении предположения 2 (см. [9, формулы (24), (25) и Теорема 3]) ненулевой вектор $l_0 \in \mathbb{R}^m$, определяющий оптимальное управление в задаче (7): $u_0^{opt}(T-t) = \frac{B_0^* e^{A^*t} l_0}{\|B_0^* e^{A^*t} l_0\|}$, удовлетворяет уравнению

$$-l_0 = e^{AT}x^0 + \int\limits_0^T e^{At} B_0 \, \frac{B_0^* e^{A^*t} l_0}{\|B_0^* e^{A^*t} l_0\|} \, dt. \tag{8}$$

и справедливо предельное соотношение $\widetilde{l}_\varepsilon \longrightarrow l_0$ при $\varepsilon \to 0$. Вместо вектора $\widetilde{l}_\varepsilon$ удобно рассмотреть вектор

$$l_\varepsilon := (I + \varepsilon^2 A^*)^{-1} \widetilde{l}_\varepsilon, \text{ или, что то же самое } \widetilde{l}_\varepsilon = (I + \varepsilon^2 A^*) l_\varepsilon.$$

Отметим, что $l_\varepsilon \longrightarrow l_0$ при $\varepsilon \to 0$, и, зная асимптотическое разложение вектора l_ε, стандартно получается асимптотическое разложение вектора $\widetilde{l}_\varepsilon$. Тогда уравнение (5) примет вид

$$\begin{gathered} 0 = (I + \varepsilon^2 A)(I + \varepsilon^2 A^*) l_\varepsilon + (I + \varepsilon^2 A) e^{AT} x^0 + \\ + \varepsilon^2 (e^{AT} - e^{-T/(\varepsilon^2)} I) B y^0 + \int\limits_0^T V(t,\varepsilon) \, \frac{V^*(t,\varepsilon) l_\varepsilon}{S_\varepsilon(\|V^*(t,\varepsilon) l_\varepsilon\|)} \, dt, \end{gathered} \tag{9}$$

где

$$V(t,\varepsilon) := (I + \varepsilon^2 A) \widetilde{V}(t,\varepsilon) = (I + \varepsilon^2 A) e^{At} C + (e^{At} - e^{-t/(\varepsilon^2)} I) B. \tag{10}$$

В работе, как и в [10] используются степенные ряды от многих скалярных переменных $v_1, \ldots, v_n$ со скалярными или векторными коэффициентами, т. е. каждое слагаемое таких рядов имеет вид $\beta_{k_1,\ldots,k_n} v_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot v_n^{k_n}$, $k_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,где $\beta_{k_1,\ldots,k_n}$ — скалярные или векторные константы.

Через $R(v_1, \ldots, v_n; i)$ (возможно, с индексами, для различия степенных рядов одинаковой структуры в одной формуле, или в процессе выкладок преобразований) будем обозначать известные на момент рассмотрения степенные ряды от величин $v_1, \ldots, v_n$, минимальная степень слагаемых в которых не меньше i, т. е. если $\beta_{k_1,\ldots,k_n} v_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot v_n^{k_n}$ — слагаемое из рассматриваемого ряда, то $k_1 + \ldots + k_n \geqslant i$.

Через $R(v_1, \ldots, v_n; i; t)$ (возможно, с индексами) будем обозначать известные на момент рассмотрения степенные ряды от величин $v_1, \ldots, v_n$ с коэффициентами $\beta_{k_1,\ldots,k_n}(t)$, зависящими от t гладким образом, минимальная степень слагаемых в которых не меньше i.

Замечание 1. *Когда в качестве одного из аргументов степенного ряда указывается конечномерный вектор, это лишь сокращение записи набора его скалярных координат в фиксированном базисе.*

Замечание 2. *Будем в данной работе представлять степенные ряды в виде*

$$R(v;i) := R(v_1,\dots,v_n;i) = \sum_{s=i}^{\infty} P_s(v),$$

где $P_s(v) := P_s(v_1,\dots,v_n)$ *— однородные степени* s *полиномы от* $v = (v_1,\dots,v_n)$ *со скалярными или векторными коэффициентами.*

Замечание 3. *Все рассматриваемые в статье степенные ряды являются сходящимися при достаточной малости их аргументов, т. е. в некоторой окрестности нуля.*

Отметим следующие соотношения для степенных рядов, проверяемые непосредственно по определению:

$$\begin{gathered}
P_i(\omega) = R(\omega;i),\ R(\omega_j;i) = R(\omega;i),\\
R(\omega;i) + R(v;i) = R(\omega,v;i),\ R(\omega;i) = R(\omega;j), (j < i),\\
R(\omega;i)\cdot R(v;j) = R(\omega,v;i+j),\ \sum_{k=0}^{\infty} R(\omega;i+k) = R(\omega;i),\\
R\big(R(w;i),v_2,\dots,v_k;j\big) = R(w,v_2,\dots,v_k;j),\ j \geqslant 0,\ i \geqslant 1.
\end{gathered} \tag{11}$$

Указанные равенства надо понимать в следующем смысле: выражение, стоящее слева всегда имеет вид выражения, стоящего справа (при соответствующих коэффициентах, среди которых может быть много нулевых), но не наоборот.

Замечание 4. *Об использовании индексов. Без дополнительных пояснений для скалярных констант, векторных констант, однородных полиномов степени* s *и степенных рядов, будем использовать обозначения:* K, K_j, f, $\tilde{f}$, f_j, P_s, $P_{s,j}$, R *и* R_j *соответственно. Дополнительный индекс* j *используется для "индивидуальности" однотипных объектов. Тем самым, однотипные объекты без дополнительных индексов, вообще говоря, различны.*

В силу того, что сумма сходящегося в окрестности нуля степенного ряда есть функция аналитическая в этой окрестности, то в силу формулы Тейлора для таких рядов справедлива оценка

$$\|R(v_1,\dots,v_n;i)\| = O(\|v\|^i),\ v \to 0,\ v := (v_1,\dots,v_n),\ \|v\| = |v_1| + \ldots + |v_n|.$$

Под степенным асимптотическим разложением функции $w(v)$ при $v \to 0$ стандартно понимается степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(v)$, такой, что

$$\forall\, N \in \mathbb{N} \quad w(v) - \sum_{n=0}^{N} P_n(v) = o(\|v\|^N).$$

Под асимптотическим разложением функции $w(v)$ (в смысле Эрдейи) при $v \to 0$ по стандартной калибровочной последовательности $\{\|v\|^s\}$

понимается ряд $\sum\limits_{s=0}^{\infty} W_s(v)$, такой, что

$$\forall\, S \in \mathbb{N} \quad w(v) - \sum_{s=0}^{S} W_s(v) = o(\|v\|^S).$$

Отметим, что если все $W_s(v)$ — однородные полиномы, то асимптотическое разложение в смысле Эрдейи совпадает со степенным асимптотическим разложением.

Асимптотическое разложение функции $w(v)$ будем обозначать следующим образом:

$$w(v) \stackrel{as}{=} \sum_{s=0}^{\infty} W_s(v) \text{ при } v \to 0.$$

Замечание 5. *Сходящийся в окрестности нуля степенной ряд есть асимптотическое разложение своей суммы.*

Построение асимптотического разложения вектора будем осуществлять при выполнении следующего предположения

Предположение 3. *Для некоторого $\alpha > 0$ при всех $t \in [0;T]$ справедливо неравенство*

$$\|B_0^* e^{A^* t} l_0\| = \|(C^* + B^*) e^{A^* t} l_0\| \geqslant \alpha.$$

Наша цель — с помощью уравнения (9) получить систему асимптотических равенств, содержащих малые величины ε, $\Delta l := l_\varepsilon - l_0 \to 0$ (и возможно другие малые параметры), из которых можно будет найти асимптотическое разложение определяющего вектора l_ε и точек смены вида оптимального управления (если таковые появятся).

3 Внешнее асимптотическое разложение и условия наличия или отсутствия точек смены вида оптимального управления

Мы будем использовать обозначение $\mathbb{O}$ — асимптотический нуль относительно степенной асимптотической последовательности, для функций φ_ε при $\varepsilon \to +0$, если $\forall \gamma > 0 : \varphi_\varepsilon = o(\varepsilon^\gamma)$ при $\varepsilon \to 0$. Например, $e^{-T/(\varepsilon^2)} = \mathbb{O}$.

Поскольку (9) имеет вид

$$0 = R(\varepsilon^2, \Delta l; 0) + \mathbb{O} + \int\limits_0^T V(t,\varepsilon)\, \frac{V^*(t,\varepsilon) l_\varepsilon}{S_\varepsilon(\|V^*(t,\varepsilon) l_\varepsilon\|)}\, dt, \qquad (12)$$

то необходимо построить асимптотическое разложение интеграла из этого равенства. Отметим, что здесь $R(\varepsilon^2, \Delta l; 0)$ есть сумма четырех полиномов:

$$R(\varepsilon^2, \Delta l; 0) := P_0(\varepsilon^2, \Delta l) + P_1(\varepsilon^2, \Delta l) + P_2(\varepsilon^2, \Delta l) + P_3(\varepsilon^2, \Delta l),$$

где

$$P_0(\varepsilon^2, \Delta l) := l_0 + e^{AT}x^0,$$

$$P_1(\varepsilon^2, \Delta l) := \varepsilon^2 A l_0 + \varepsilon^2 A^* l_0 + \triangle l + \varepsilon^2 A e^{AT} x^0 + \varepsilon^2 e^{AT} B y^0,$$

$$P_2(\varepsilon^2, \Delta l) := \varepsilon^4 AA^* l_0 + \varepsilon^2 (A + A^*)\Delta l, \quad P_3(\varepsilon^2, \Delta l) := \varepsilon^4 AA^* \Delta l.$$

Поскольку подынтегральное выражение в интеграле из (12) имеет существенно разные асимптотические разложения по ε при больших t ($t \geqslant \varepsilon^{2q}$, $q \in (0;1)$) и малых $t \in (0;\varepsilon^{2q})$, то для нахождения асимптотики интеграла из (12) естественно применить метод вспомогательного параметра (см., например, [11, § 30. II]).

Разобьем этот интеграл на две части

$$\int\limits_0^T = \int\limits_0^\mu + \int\limits_\mu^T =: I_1 + I_2, \text{ при } \mu = \varepsilon^{2q}, \quad q \in (0;1). \tag{13}$$

Рассмотрим сначала интеграл I_2. Отметим, что в силу (13) при $t \geqslant \mu$ имеет место асимптотическая оценка $e^{-t/(\varepsilon^2)} = \mathbb{O}$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому в силу (10) при $\varepsilon \to 0$

$$V(t,\varepsilon) = C_0(t) + \varepsilon^2 A e^{At} C + \mathbb{O},$$
$$V^*(t,\varepsilon)(l_0 + \triangle l) = C_0^*(t) l_0 + C_0^*(t)\Delta l + \varepsilon^2 C^* e^{A^* t} A^*(l_0 + \triangle l) + \mathbb{O},$$

где $C_0(t) := e^{A_0 t} B_0$.

В силу предположения 3 справедливо неравенство $\|V^*(t,\varepsilon)(l_0+\Delta l)\| \geqslant \alpha/2$ при всех малых Δl, поэтому при всех таких Δl и при всех $t \geqslant \mu$:

$$S_\varepsilon(\|V^*(t,\varepsilon)(l_0 + \Delta l)\|) = \|V^*(t,\varepsilon)(l_0 + \Delta l)\|.$$

Тем самым подынтегральное выражение в (12) раскладывается в степенной ряд по Δl с коэффициентами, гладко зависящими от t

$$\frac{V(t,\varepsilon)V^*(t,\varepsilon)(l_0 + \Delta l)}{\|V^*(t,\varepsilon)(l_0 + \Delta l)\|} \overset{as}{\equiv} \frac{C_0(t)C_0^*(t)l_0}{\|C_0^*(t)l_0\|} + \varepsilon^2 f(t) + R(\varepsilon^2, \Delta l; 2; t) +$$

$$+ \frac{\|C_0^*(t)l_0\|^2 C_0(t)C_0^*(t)\Delta l - C_0(t)C_0^*(t)l_0 \Big\langle C_0^*(t)l_0, C_0^*(t)\Delta l \Big\rangle}{\|C_0^*(t)l_0\|^3},$$

где $f(t)$ — известная гладкая функция:

$$f(t) := \frac{Ae^{At} C C_0^*(t) l_0 + C_0(t) C^* A^* e^{A^* t} l_0}{\|C_0^*(t)l_0\|} -$$

$$- \frac{C_0(t)C_0^*(t)l_0 \langle C_0^*(t)l_0, C^* A^* e^{A^* t} l_0\rangle}{\|C_0^*(t)l_0\|^3}.$$

В силу чего и (8)

$$I_2 = \int\limits_0^T + \int\limits_\mu^0 \stackrel{as}{=} \int\limits_0^T \frac{\|C_0^*(t)l_0\|^2 C_0(t)C_0^*(t)\Delta l - C_0(t)C_0^*(t)l_0\Big\langle C_0^*(t)l_0, C_0^*(t)\Delta l\Big\rangle}{\|C_0^*(t)l_0\|^3}\,dt - \\ - l_0 - e^{AT}x^0 + \varepsilon^2\widetilde{f} + R_1(\varepsilon^2,\Delta l;2) + \int\limits_\mu^0 \frac{V(t,\varepsilon)V^*(t,\varepsilon)(l_0+\Delta l)}{\|V^*(t,\varepsilon)(l_0+\Delta l)\|}\,dt, \tag{14}$$

где $\widetilde{f} := \int\limits_0^T f(t)dt,\ R_1(\varepsilon^2,\Delta l;2) := \int\limits_0^T R(\varepsilon^2,\Delta l;2,t)dt$ — известные величины.

Отметим, что линейный оператор D, определенный равенством

$$D\Delta l := \int\limits_0^T \frac{\|C_0^*(t)l_0\|^2 C_0(t)C_0^*(t)\Delta l - C_0(t)C_0^*(t)l_0\Big\langle C_0^*(t)l_0, C_0^*(t)\Delta l\Big\rangle}{\|C_0^*(t)l_0\|^3}\,dt$$

в силу неравенства Коши–Буняковского является неотрицательным самосопряженным оператором, т. е. $\langle D\Delta l, \Delta l\rangle \geqslant 0$ при всех Δl.

Для нахождения асимптотики последнего слагаемого в (14) разложим $e^{A_0 t}$ и $e^{A_0^* t}$ в ряды Тейлора в окрестности нуля. В результате при малых t, ε и Δl получим $\frac{V(t,\varepsilon)V^*(t,\varepsilon)(l_0+\Delta l)}{\|V^*(t,\varepsilon)(l_0+\Delta l)\|} \stackrel{as}{=} R(\varepsilon^2,\Delta l;0,t)$. Поэтому

$$\int\limits_\mu^0 \frac{V(t,\varepsilon)V^*(t,\varepsilon)(l_0+\Delta l)}{\|V^*(t,\varepsilon)(l_0+\Delta l)\|}\,dt \stackrel{as}{=} \mu R_1(\varepsilon^2,\Delta l,\mu;0),$$

и, тем самым,

$$I_2 \stackrel{as}{=} -l_0 - e^{AT}x^0 + D\Delta l + \varepsilon^2\widetilde{f} + R_1(\varepsilon^2,\Delta l;2) + \mu R_1(\varepsilon^2,\Delta l,\mu;0). \tag{15}$$

Рассмотрим теперь I_1. Сделав в нем замену переменной $\tau = t/(\varepsilon^2)$, получим

$$I_1 = \varepsilon^2 \int\limits_0^{\mu/(\varepsilon^2)} E(\tau,\varepsilon)\,\frac{E^*(\tau,\varepsilon)(l_0+\Delta l)}{S_\varepsilon(\|E^*(\tau,\varepsilon)(l_0+\Delta l)\|)}\,dt, \tag{16}$$

где

$$E(\tau,\varepsilon) = (I+\varepsilon^2 A)e^{A\varepsilon^2\tau}C + \Big(e^{A\varepsilon^2\tau} - e^{-\tau}I\Big)B. \tag{17}$$

Отметим, что при $\tau \in [0;\mu/(\varepsilon^2)]$ справедливо соотношение $\varepsilon^2\tau \in [0,\mu]$ и тем самым $\varepsilon^2\tau$ мало. Раскладывая экспоненту в (17) в ряд Тейлора в окрестности нуля, получим

$$E(\tau,\varepsilon) = C + B - e^{-\tau}B + R(\varepsilon^2,\varepsilon^2\tau;1) = \Phi_0(\tau) + O(\mu) + O(\varepsilon^2),\ \varepsilon \to 0, \tag{18}$$

где

$$\Phi_0(\tau) := C + B - e^{-\tau}B, \tag{19}$$

а в $R(\varepsilon^2,\varepsilon^2\tau;1)$ содержатся в частности слагаемые $\varepsilon^2 AC$ и $\varepsilon^2\tau AB_0$. Тем самым в силу ограниченности функции $\Phi_0(\tau)$ на $[0;+\infty)$

$$E^*(\tau,\varepsilon)(l_0+\Delta l) = \Phi_0^*(\tau)l_0 + O(\Delta l) + O(\mu) + O(\varepsilon^2),\ \varepsilon \to 0. \tag{20}$$

Поскольку в силу предположения 3

$$\|B_0^* l_0\| \geqslant \alpha, \tag{21}$$

то существует $\widetilde{\tau}$ такое, что

$$\forall\, \tau \in [\widetilde{\tau}; +\infty) \quad \varphi_0(\tau) := \|\Phi_0^*(\tau) l_0\| \geqslant \frac{\alpha}{2}. \tag{22}$$

Таким образом, если

$$\min_{\tau\in[0;\widetilde{\tau}]} \varphi_0(\tau) > 0, \tag{23}$$

то найдется $\alpha_0 > 0$ такое, что

$$\forall\, \tau \geqslant 0 \quad \varphi_0(\tau) \geqslant \alpha_0 > 0. \tag{24}$$

Из (20) и (24) следует, что при всех малых ε и Δl будет выполняться неравенство $\|E^*(\tau,\varepsilon)(l_0+\Delta l)\| \geqslant \frac{\alpha_0}{2} > 0$ и, тем самым у оптимального управления на $[0;\mu]$ тоже не будет точек смены его вида.

4 Случай отсутствия точек смены вида оптимального управления

При выполнении неравенства (23) оптимальное управление не имеет точек смены вида, поэтому

$$I_1 = \varepsilon^2 \int\limits_0^{\mu/(\varepsilon^2)} E(\tau,\varepsilon)\, \frac{E^*(\tau,\varepsilon)(l_0+\Delta l)}{\|E^*(\tau,\varepsilon)(l_0+\Delta l)\|}\, dt.$$

Тогда в силу (18), (19), (24) получим

$$\begin{aligned} &\tfrac{E(\tau,\varepsilon)E^*(\tau,\varepsilon)(l_0+\Delta l)}{\|E^*(\tau,\varepsilon)(l_0+\Delta l)\|} = \tfrac{\Phi_0(\tau)\Phi_0^*(\tau)l_0}{\varphi_0(\tau)} + R(\varepsilon^2,(\varepsilon^2\tau),\Delta l;1;\tau) = \\ &= \big(\Phi_0(\tau) + R_1(\varepsilon^2,(\varepsilon^2\tau);1)\big)\tfrac{\left(\Phi_0^*(\tau)+R_1^*(\varepsilon^2,(\varepsilon^2\tau);1)\right)(l_0+\Delta l)}{\left\|\left(\Phi_0^*(\tau)+R_1^*(\varepsilon^2,(\varepsilon^2\tau);1)\right)(l_0+\Delta l)\right\|}, \end{aligned} \tag{25}$$

где коэффициенты, зависящие от τ в R, не указанные явно, имеют вид $(\varphi_0(\tau))^{-k}$. Поэтому асимптотика I_1 получится стандартным способом выделения неинтегрируемых особенностей (см., например [10]). Найдем в качестве примера асимптотику интеграла от первого слагаемого в (25). Так как $e^{-\tau} \overset{as}{=} \mathbb{O}$ при $\tau \to +\infty$ относительно последовательности $\{\tau^{-k}\}$, то

$$\frac{\Phi_0(\tau)\Phi_0^*(\tau)l_0}{\varphi_0(\tau)} \overset{as}{=} \frac{B_0 B_0^* l_0}{\|B_0^* l_0\|} + \mathbb{O}, \quad \tau \to +\infty$$

и, тем самым, функция

$$\varphi_1(\tau) := \frac{\Phi_0(\tau)\Phi_0^*(\tau)l_0}{\varphi_0(\tau)} - \frac{B_0 B_0^* l_0}{\|B_0^* l_0\|}$$

интегрируемая на $[0;+\infty)$ и ее асимптотика при $\tau\to+\infty$ равна нулю. Поэтому

$$\varepsilon^2\int\limits_0^{\mu/(\varepsilon^2)}\frac{\Phi_0(\tau)\Phi_0^*(\tau)l_0}{\varphi_0(\tau)}\,d\tau=\varepsilon^2\int\limits_0^{+\infty}\varphi_1(\tau)\,d\tau+\varepsilon^2\int\limits_{+\infty}^{\mu/(\varepsilon^2)}\varphi_1(\tau)\,d\tau+ \\ +\varepsilon^2\int\limits_0^{\mu/(\varepsilon^2)}\frac{B_0B_0^*l_0}{\|B_0^*l_0\|}\,d\tau\ =:\ \varepsilon^2 f_1+\mu\frac{B_0B_0^*l_0}{\|B_0^*l_0\|}+\mathbb{O}, \tag{26}$$

где $f_1:=\int\limits_0^{+\infty}\varphi_1(\tau)\,d\tau$ — известная величина. Вся же асимптотика интеграла будет иметь вид

$$I_1\stackrel{as}{=}\varepsilon^2\widetilde{f}_1+R(\varepsilon^2,\Delta l;2)+\mu R_1(\mu,\Delta l;0). \tag{27}$$

Таким образом, с учетом (15)

$$I_1+I_2\stackrel{as}{=}-l_0-e^{AT}x^0+D\Delta l+f_2\varepsilon^2+R(\varepsilon^2,\Delta l;2),$$

где $f_2:=\widetilde{f}_1+\widetilde{f}$ — известная величина.

Поэтому асимптотическое равенство, соответствующее равенству (9), (с учетом того, что слагаемые с μ взаимно уничтожатся [11]) примет вид

$$0\stackrel{as}{=}(D+I)\Delta l+f_3\varepsilon^2+R(\varepsilon^2,\Delta l;2), \tag{28}$$

где $f_3:=f_2+(A+A^*)l_0+Ae^{At}x^0+e^{At}By^0$.

При этом оператор первого приближения $(D+I)>0$ обратим. Поэтому, применяя к (28) асимптотический аналог теоремы о неявно заданной функции [12, теорема 1] получим справедливость следующей теоремы

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения 1 – 3 и* (23)*. Тогда* Δl *раскладывается в степенной по* ε^2 *асимптотический ряд при* $\varepsilon\to+0$ *и, в частности,*

$$\Delta l=-\varepsilon^2(D+I)^{-1}f_3+O(\varepsilon^4).$$

5 Случай наличия точек смены вида оптимального управления

Далее предполагаем, что условие (23) не выполнено, а существует хотя бы одно τ_0 такое, что $\varphi_0(\tau_0)=0$, или, что то же самое с учетом (19)

$$\exists\,\tau_0\in[0;+\infty):\quad \Phi_0^*(\tau_0)l_0=0. \tag{29}$$

Отметим, что если (29) выполнено, то $C^*l_0=-(1-e^{-\tau_0})B^*l_0$ и в силу (21)

$$C^*l_0\neq0\neq B^*l_0,\qquad (1-e^{-\tau_0})=\frac{\|C^*l_0\|}{\|B^*l_0\|}.$$

Поэтому τ_0 единственно и условие (29) эквивалентно условию

$$\Big(C^*l_0\uparrow\downarrow B^*l_0\Big)\wedge\Big(0<\|C^*l_0\|<\|B^*l_0\|\Big).$$

Утверждение 1. *Пусть выполнено условие* (29). *Тогда* $\Delta l = O(\varepsilon^2)$ *при* $\varepsilon \to +0$.

Доказательство. Оценим I_1 в этом случае, представив его в виде

$$I_1 = \varepsilon^2 \int\limits_0^{\widetilde{\tau}} \frac{E(\tau,\varepsilon)E^*(\tau,\varepsilon)(l_0+\Delta l)}{S_\varepsilon(\|E^*(\tau,\varepsilon)(l_0+\Delta l)\|)}\,dt + \varepsilon^2 \int\limits_{\widetilde{\tau}}^{\mu/(\varepsilon^2)} \frac{E(\tau,\varepsilon)E^*(\tau,\varepsilon)(l_0+\Delta l)}{\|E^*(\tau,\varepsilon)(l_0+\Delta l)\|}\,dt. \tag{30}$$

В силу (17) функция $E(\tau,\varepsilon)$ ограничена, а $\left\|\frac{E^*(\tau,\varepsilon)(l_0+\Delta l)}{S_\varepsilon(\|E^*(\tau,\varepsilon)(l_0+\Delta l)\|)}\right\| \leqslant 1$. Поэтому первое слагаемое в (30) имеет порядок $O(\varepsilon^2)$. На промежутке $[\widetilde{\tau};\mu/(\varepsilon^2)]$ выполняется неравенство $\|E^*(\tau,\varepsilon)(l_0+\Delta l)\| \geqslant \alpha_0/2$, поэтому разложение (25) справедливо при $\tau \geqslant \widetilde{\tau}$ и, в силу (26) получаем, что

$$I_1 \overset{as}{=} \mu\frac{B_0B_0^*l_0}{\|B_0^*l_0\|} + O(\mu\|\Delta l\|) + O(\varepsilon^2) + O(\mu^2),$$

или, взяв $\mu = \varepsilon$ (при $q = 1/2$), $I_1 \overset{as}{=} \varepsilon\frac{B_0B_0^*l_0}{\|B_0^*l_0\|} + O(\varepsilon\|\Delta l\|) + O(\varepsilon^2)$.

Таким образом в данном случае (28) принимает вид

$$0 = (D+I)\Delta l + O(\|\Delta l\|^2 + \varepsilon\|\Delta l\| + \varepsilon^2). \tag{31}$$

Поскольку $D \geqslant 0$, то оператор $(D+I)$ имеет ограниченный обратный и (31) принимает вид

$$\|\Delta l\| \leqslant K(\|\Delta l\|^2 + \varepsilon\|\Delta l\| + \varepsilon^2), \quad \text{или} \quad \|\Delta l\|(1 - K\|\Delta l\| - K\varepsilon) \leqslant K\varepsilon^2,$$

что при малых ε и $\|\Delta l\|$ дает соотношение

$$\|\Delta l\| = O(\varepsilon^2),\ \varepsilon \to +0. \tag{32}$$

□

В силу (32) удобно перейти от Δl к новой малой величине ρ:

$$\rho := \varepsilon^{-1}\Delta l = O(\varepsilon),\ \varepsilon \to +0. \tag{33}$$

Теперь рассмотрим точки переключения вида оптимального управления, т.е. решения уравнения

$$\varphi(\Delta\tau,\varepsilon,\rho) := \|E^*(\tau_0+\Delta\tau,\varepsilon)(l_0+\varepsilon\rho)\| = \varepsilon, \quad (\tau_0+\Delta\tau) \in [0;\widetilde{\tau}], \tag{34}$$

при заданных ε и ρ, удовлетворяющих условию (32).

В силу (17) при выполнении (29) получим, что при $\Delta\tau \in [-\tau_0;\widetilde{\tau}-\tau_0]$ справедливо равенство

$$E^*(\tau_0+\Delta\tau,\varepsilon)(l_0+\varepsilon\rho) = e^{-\tau_0}(1-e^{-\Delta\tau})B^*l_0 + E_1^*(\Delta\tau,\varepsilon,\rho), \tag{35}$$

где

$$\begin{aligned} E_1^*(\Delta\tau,\varepsilon,\rho) := \Big(\varepsilon^2C^*A^*e^{A^*\varepsilon^2(\tau_0+\Delta\tau)} + B^*\Big(e^{A^*\varepsilon^2(\tau_0+\Delta\tau)} - I\Big)\Big)\, l_0 + \\ + E^*(\tau_0+\Delta\tau,\varepsilon)\varepsilon\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^{2+n}), \end{aligned} \tag{36}$$

и все ее производные любого порядка ограничены при

$$(\tau_0+\Delta\tau)\in[0;\mu/(\varepsilon^2)],\quad \varepsilon\in[0;\varepsilon_0],\quad \|\varepsilon\rho\|\leqslant 1.$$

В частности

$$\begin{gathered}\varphi(\Delta\tau,\varepsilon,\rho)\in C(\mathbb{R}^{2+n})\cap C^\infty(\mathbb{R}^{2+n}\setminus N_\varphi),\\ N_\varphi:=\{(\Delta\tau,\varepsilon,\rho):\varphi(\Delta\tau,\varepsilon,\rho)=0\},\end{gathered}\tag{37}$$

и при $\tau=\tau_0+\Delta\tau\leqslant\widetilde{\tau}$ и всех ρ, удовлетворяющих (33), в силу (32) справедливо асимптотическое при $\varepsilon\to+0$ равенство

$$\begin{aligned}\varphi(\Delta\tau,\varepsilon,\rho)=\Big\|e^{-\tau_0}(1-e^{-\Delta\tau})B^*l_0+O(\varepsilon^2)\Big\|=\\ =\Big\|e^{-\tau_0}\Delta\tau B^*l_0+O(\Delta\tau^2)+O(\varepsilon^2)\Big\|.\end{aligned}\tag{38}$$

Утверждение 2. *Пусть выполнены предположения 1 – 3 и* (29), *а* $\beta_1>0$ *такова, что* $\beta_1e^{-\tau_0}\|B^*l_0\|\leqslant 1/2$. *Тогда существует* ε_0 *такое, что при всех* $\varepsilon\in[0;\varepsilon_0]$ *и* ρ, *удовлетворяющих* (32) *справедливы следующие соотношения*

1. *Если* $|\Delta\tau|\leqslant\varepsilon\beta_1$, *то* $\varphi(\Delta\tau,\varepsilon,\rho)<\varepsilon$.
2. *Если* $|\Delta\tau|\geqslant\varepsilon\beta_1$, *то* $\varphi(\Delta\tau,\varepsilon,\rho)>0$.

Доказательство. 1. В силу (38) и условий утверждения справедлива цепочка неравенств

$$\varphi(\Delta\tau,\varepsilon,\rho)\leqslant e^{-\tau_0}|\Delta\tau|\cdot\|B^*l_0\|+K\varepsilon^2\leqslant\varepsilon\Big(\frac12+K\varepsilon\Big)<\varepsilon$$

при $0<1/2+K\varepsilon<1$.

2. Аналогично п. 1 этого доказательства

$$\varphi(\Delta\tau,\varepsilon,\rho)\geqslant e^{-\tau_0}\Big|1-e^{-\Delta\tau}\Big|\cdot\|B^*l_0\|-K\varepsilon^2\geqslant e^{-\tau_0}\Big(e^{\beta_1\varepsilon}-1\Big)\|B^*l_0\|-K\varepsilon^2=$$
$$=\varepsilon\Big(e^{-\tau_0}\frac{e^{\beta_1\varepsilon}-1}{\varepsilon}\|B^*l_0\|-K\varepsilon\Big).$$

Но при $\varepsilon\to0$ выражение в скобках (после равенства) стремится к $e^{-\tau_0}\beta_1\|B^*l_0\|$, поэтому при всех достаточно малых ε это выражение положительно. □

Утверждение 3. *Пусть выполнены предположения 1 – 3 и* (29), *а* $\beta_2>0$ *такова, что* $\beta_2e^{-\tau_0}\|B^*l_0\|\leqslant 2$. *Тогда существует* ε_0 *такое, что при всех* $\varepsilon\in[0;\varepsilon_0]$ *и* ρ, *удовлетворяющих* (32) *выполняется неравенство* $\varphi(\pm\varepsilon\beta_2,\varepsilon,\rho)>\varepsilon$.

Доказательство. В силу (38) и условий утверждения справедлива цепочка неравенств

$$\varphi(\pm\varepsilon\beta_2,\varepsilon,\rho)\geqslant e^{-\tau_0}\varepsilon\beta_2\cdot\|B^*l_0\|-K\varepsilon^2\geqslant\varepsilon\Big(2-K\varepsilon\Big)>\varepsilon$$

при $2-K\varepsilon>1$. □

В силу теоремы о промежуточном значении из утверждений 1 и 2 вытекает следствие

Следствие 1. *Пусть выполнены условия утверждений 1 и 2.*

Тогда существуют $\Delta\tau_{1,\varepsilon,\rho} \in (-\beta_2\varepsilon; -\beta_1\varepsilon)$ *и* $\Delta\tau_{2,\varepsilon,\rho} \in (\beta_1\varepsilon; \beta_2\varepsilon)$ *такие, что* $\varphi(\Delta\tau_{i,\varepsilon,\rho}, \varepsilon, \rho) = \varepsilon$, $i = 1, 2$.

Покажем, что кроме $\Delta\tau_{1,\varepsilon,\rho}$ и $\Delta\tau_{2,\varepsilon,\rho}$ других решений уравнения (34) нет.

Утверждение 4. *Пусть выполнены предложения утверждений 1 – 2. Тогда существует* ε_0 *такое, что при всех* $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ *и* ρ, *удовлетворяющих* (32) *функция* $\varphi(\cdot, \varepsilon, \rho)$ *строго убывает на* $[-\tau_0; -\beta_1\varepsilon]$ *и строго возрастает на* $[\beta_1\varepsilon; \tilde{\tau} - \tau_0]$.

Доказательство. В силу (37) и утверждения 1 функция $\varphi(\cdot, \varepsilon, \rho)$ дифференцируема на обоих указанных промежутках. В силу (35)

$$\frac{\partial\varphi(\Delta\tau,\varepsilon,\rho)}{\partial\Delta\tau} = \frac{1}{\varphi(\Delta\tau,\varepsilon,\rho)}\times$$

$$\times\left\langle e^{-\tau_0}(1 - e^{-\Delta\tau})B^* l_0 + E_1^*(\Delta\tau, \varepsilon, \rho), e^{-\tau_0}e^{-\Delta\tau}\Delta\tau B^* l_0 + \frac{\partial E_1^*(\Delta\tau,\varepsilon,\rho)}{\partial\Delta\tau}\right\rangle. \tag{39}$$

При этом в силу (35) и (36)

$$E_1^*(\Delta\tau, \varepsilon, \rho) = O(\varepsilon^2), \quad \frac{\partial E_1^*(\Delta\tau, \varepsilon, \rho)}{\partial\Delta\tau} = O(\varepsilon^2).$$

Поэтому второй сомножитель в (39), определяющий знак производной, имеет вид

$$\Phi := \left\langle e^{-\tau_0}(1 - e^{-\Delta\tau})B^* l_0 + O(\varepsilon^2), e^{-\tau_0}e^{-\Delta\tau}\Delta\tau B^* l_0 + O(\varepsilon^2)\right\rangle =$$

$$K_1(1 - e^{-\Delta\tau})e^{-\Delta\tau} + O(\varepsilon^2),$$

где $K_1 = e^{-2\tau_0}\|B^* l_0\|^2$.

Если $\Delta\tau > 0$, то

$$\Phi \geqslant K_1(1 - e^{-\beta_1\varepsilon})e^{\tau_0 - \tau_1} - K\varepsilon^2 = \varepsilon\left(K_1\frac{1 - e^{-\beta_1\varepsilon}}{\varepsilon}e^{\tau_0 - \tau_1} - K\varepsilon\right).$$

При этом выражение в скобках стремится при $\varepsilon \to +0$ к $K_1\beta_1 e^{\tau_0 - \tau_1} > 0$. Поэтому $\Phi > 0$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Если $\Delta\tau < 0$, то

$$\Phi \leqslant -K_1(e^{\beta_1\varepsilon} - 1) + K\varepsilon^2 = \varepsilon\left(-K_1\frac{e^{\beta_1\varepsilon} - 1}{\varepsilon} + K\varepsilon\right).$$

При этом выражение в скобках стремится при $\varepsilon \to +0$ к $-K_1\beta_1 < 0$. Поэтому $\Phi < 0$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. □

Итак, кроме $\Delta\tau_{1,\varepsilon,\rho}$ и $\Delta\tau_{2,\varepsilon,\rho}$ других решений уравнения (34) нет. При этом, в силу следствия 1:

$$\Delta\tau_{i,\varepsilon,\rho} = O(\varepsilon), i = 1, 2. \tag{40}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения 1 – 3 и (29). Тогда для $\Delta\tau_{i,\varepsilon,\rho}$, $i=1,2$ — точек смены вида оптимального управления и при $(\varepsilon+\|\rho\|)\to 0$ справедливы асимптотические разложения*

$$\Delta\tau_{i,\varepsilon,\rho} \overset{as}{=} \varepsilon\big(\eta_i + R_i(\varepsilon,\rho;1)\big),\ \text{где } \eta_i = (-1)^i\frac{e^{\tau_0}}{\|B^*l_0\|},\ i=1,2. \tag{41}$$

Доказательство. Пусть $\eta_{i,\varepsilon,\rho}$ $(i=1,2)$ определены равенством

$$\Delta\tau_{i,\varepsilon,\rho} = \varepsilon\eta_{i,\varepsilon,\rho}. \tag{42}$$

1. В силу (40) $\eta_{i,\varepsilon,\rho}$ ограничены и удовлетворяют равенствам

$$\left\| e^{-\tau_0}\frac{1-e^{-\varepsilon\eta_{i,\varepsilon,\rho}}}{\varepsilon}B^*l_0 + O(\varepsilon)\right\| = 1,\ i=1,2. \tag{43}$$

Пусть η_i — произвольная предельная при $\varepsilon\to+0$, $\rho\to 0$ точка $\eta_{i,\varepsilon,\rho}$, т. е. $\eta_{i,\varepsilon_k,\rho_k}\to\eta_i$ для некоторых последовательностей $\{\varepsilon_k\}$ и $\{\rho_k\}$ таких, что $\varepsilon_k\to+0$ и $\rho_k\to 0$ при $k\to+\infty$. Переходя в (43) к пределу при $k\to+\infty$, получим $\|e^{-\tau_0}\eta_i B^*l_0\|=1$. Откуда с учетом знаков η_i

$$\eta_i = (-1)^i\frac{e^{\tau_0}}{\|B^*l_0\|},\ i=1,2.$$

Из единственности этих частичных пределов следует, что

$$\lim_{\varepsilon,\rho\to 0}\eta_{i,\varepsilon,\rho} = (-1)^i\frac{e^{\tau_0}}{\|B^*l_0\|},\ i=1,2.$$

2. Теперь рассмотрим функцию (см. (35) и (36))

$$\psi(\eta,\varepsilon,\rho) := \varepsilon^{-1}\varphi(\varepsilon\eta,\varepsilon,\rho) - 1 = \|e^{-\tau_0}\varepsilon^{-1}(1-e^{-\varepsilon\eta})B^*l_0 +$$

$$+\left(\varepsilon C^*A^*e^{A^*\varepsilon^2(\tau_0+\varepsilon\eta)} + \varepsilon^{-1}B^*\left(e^{A^*\varepsilon^2(\tau_0+\varepsilon\eta)} - I\right)\right)l_0 + E^*(\tau_0+\varepsilon\eta,\varepsilon,\rho)\| -$$

$$-1 =: \|\Psi(\eta,\varepsilon,\rho)\| - 1.$$

Поскольку $\varepsilon^{-1}(1-e^{-\varepsilon\eta}) = \eta + \varepsilon\eta^2R((\varepsilon\eta);0)$ — бесконечно дифференцируема при всех ε и η, и

$$\varepsilon^{-1}B^*\left(e^{A^*\varepsilon^2(\tau_0+\varepsilon\eta)} - I\right) = \varepsilon B^*A^*(\tau_0+\varepsilon\eta) +$$

$$+\frac{\varepsilon^3B^*\left(A^*\right)^2}{2!}(\tau_0+\varepsilon\eta)^2 + \varepsilon^{-1}R(\varepsilon^2(\tau_0+\varepsilon\eta);3)$$

— бесконечно дифференцируема при всех ε и η, то и $\Psi(\eta,\varepsilon,\rho)$ бесконечно дифференцируема при всех η, ε и ρ, и

$$\Psi(\eta,0,0) = e^{-\tau_0}\eta B^*l_0, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial\eta}(\eta,0,0) = e^{-\tau_0}B^*l_0,\ i=1,2. \tag{44}$$

Таким образом, $\psi(\eta,\varepsilon,\rho)$ бесконечно дифференцируема во всех точках (η,ε,ρ) таких, что $\Psi(\eta,\varepsilon,\rho)\neq 0$. В частности и в малых окрестностях точек $(\eta_i,0,0)$, $i=1,2$.

В силу определения $\psi(\eta,\varepsilon,\rho)$ справедливы равенства $\psi(\eta_i,\varepsilon,\rho)=0, i=1,2$. Поскольку в силу (44)

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}(\eta_i,0,0)=\left\langle \Psi(\eta,0,0),\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}(\eta,0,0)\right\rangle=\eta_i e^{-2\tau_0}\|B^*l_0\|^2\neq 0,$$

то применима теорема о функции, заданной неявно и, тем самым, справедливы асимптотические разложения

$$\eta_{i,\varepsilon,\rho}\overset{as}{=}\eta_i+R_i(\varepsilon,\rho;1),\ i=1.2. \tag{45}$$

Из (45) в силу (42) следует (41). □

6 Асимптотическое разложение интеграла I_1 при выполнении условия (29)

Рассмотрим асимптотику интеграла I_1 при выполнении условия (29).

В силу (6) определения функции S интеграл (16) можно записать в виде суммы четырех интегралов

$$I_1=\varepsilon^2\int\limits_0^{\tau_0+\Delta\tau_{1,\varepsilon,\rho}}E(\tau,\varepsilon)\,\tfrac{E^*(\tau,\varepsilon)(l_0+\Delta l)}{\|E^*(\tau,\varepsilon)(l_0+\Delta l)\|}\,d\tau+$$
$$+\varepsilon^2\int\limits_{\tau_0+\Delta\tau_{1,\varepsilon,\rho}}^{\tau_0+\Delta\tau_{2,\varepsilon,\rho}}\tfrac{E(\tau,\varepsilon)\,E^*(\tau,\varepsilon)(l_0+\Delta l)}{\varepsilon}\,d\tau+\varepsilon^2\int\limits_{\tau_0+\Delta\tau_{2,\varepsilon,\rho}}^{\widetilde{\tau}}E(\tau,\varepsilon)\,\tfrac{E^*(\tau,\varepsilon)(l_0+\Delta l)}{\|E^*(\tau,\varepsilon)(l_0+\Delta l)\|}\,d\tau+$$
$$+\varepsilon^2\int\limits_{\widetilde{\tau}}^{\mu/(\varepsilon^2)}E(\tau,\varepsilon)\,\tfrac{E^*(\tau,\varepsilon)(l_0+\Delta l)}{\|E^*(\tau,\varepsilon)(l_0+\Delta l)\|}\,d\tau\ =:\ I_{1,1}+I_{1,2}+I_{1,3}+I_{1,4}.$$

Отметим, что в силу (22) при $\tau\geqslant\widetilde{\tau}$ справедливо асимптотическое разложение (25). Поэтому асимптотика интеграла $I_{1,4}$ имеет такой же вид, как в (27), а поскольку асимптотика I_2 (внешнее разложение) не зависит от наличия точек смены вида управления на промежутке $[0;\mu)$, то (с учетом равенства $\Delta l=\varepsilon\rho$) получим:

$$I_{1,4}+I_2\overset{as}{=}-l_0-e^{AT}x^0+D\varepsilon\rho+f_4\varepsilon^2+R(\varepsilon^2,\varepsilon\rho;2), \tag{46}$$

где $f_4:=\tilde{f}+\int\limits_{\widetilde{\tau}}^{+\infty}\varphi_1(\tau)d\tau-\widetilde{\tau}\frac{B_0B_0^*l_0}{\|B_0^*l_0\|}$ — известный вектор.

Найдем теперь асимптотику оставшихся трех интегралов, сделав в них замену переменной интегрирования τ на $\xi:=\tau-\tau_0$, и найдя асимптотическое разложение получившихся подынтегральных разложений по степеням ε, ρ и ξ.

Поскольку в силу (17), (18) и (19)

$$E(\tau,\varepsilon)=\Phi_0(\tau)+\varepsilon^2Ae^{A\varepsilon^2\tau}C+\left(e^{A\varepsilon^2\tau}-I\right)B_0=$$
$$=\Phi_0(\tau_0)+\left(e^{-\tau_0}-e^{-\tau}\right)B+\varepsilon^2AC+R_1(\varepsilon^2\tau;1)+\varepsilon^2R_2(\varepsilon^2\tau;1)=$$
$$=\Phi_0(\tau_0)+\left(e^{-\tau_0}-e^{-\tau}\right)B+\varepsilon^2AC+R_1(\varepsilon^2,\varepsilon^2\tau;1),$$

то

$$\begin{aligned}\widetilde{E}(\xi,\varepsilon) := E(\tau_0+\xi,\varepsilon) = \Phi_0(\tau_0) + e^{-\tau_0}\bigl(1-e^{-\xi}\bigr)B + \\ +\varepsilon^2 AC + \varepsilon^2(\tau_0+\xi)R(\varepsilon^2(\tau_0+\xi);0),\end{aligned} \tag{47}$$

или с учетом (11)

$$\widetilde{E}(\xi,\varepsilon) = \Phi_0(\tau_0) + \psi_0(\xi)B + \varepsilon^2 R_1(\varepsilon^2,\varepsilon^2\xi;0) + \varepsilon^2\xi R_2(\varepsilon^2,\varepsilon^2\xi;0), \tag{48}$$

где $\psi_0(\xi) := e^{-\tau_0}\bigl(1-e^{-\xi}\bigr) =: \xi\psi_1(\xi)$.

Отметим, что $\psi_0(\xi)$ и $\psi_1(\xi)$ — аналитические всюду функции и

$$\psi_1(0) = e^{-\tau_0}, \qquad \min_{\xi\in[-\tau_0;\widetilde{\tau}-\tau_0]} \psi_1(\xi) =: \gamma_0 > 0, \tag{49}$$

а

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 R_1(\varepsilon^2,(\varepsilon^2\xi);0) = \varepsilon^2(AC+\tau_0 AB_0) + \varepsilon^2 R_2(\varepsilon^2,\varepsilon^2\xi;1) =: \\ =: \varepsilon^2\widehat{\Phi} + \varepsilon^2 R_2(\varepsilon^2,\varepsilon^2\xi;1),\end{aligned} \tag{50}$$

где $\widehat{\Phi} := AC + \tau_0 AB_0$.

Поскольку $\Phi_0^*(\tau_0)l_0 = 0$ в силу условия (29), то

$$\begin{aligned}\widetilde{E}^*(\xi,\varepsilon)(l_0+\varepsilon\rho) = \psi_0(\xi)B^*l_0 + \varepsilon^2\widehat{\Phi}^*l_0 + \varepsilon\psi_0(\xi)B^*\rho + \\ +\varepsilon^2 R_1^*(\varepsilon^2,\varepsilon^2\xi;1) + \varepsilon^2\xi R_2^*(\varepsilon^2,\varepsilon^2\xi;0) + \varepsilon R_3^*(\varepsilon^2,\varepsilon^2\xi;0)\rho.\end{aligned} \tag{51}$$

На отрезке $[\Delta\tau_{1,\varepsilon,\rho};\Delta\tau_{2,\varepsilon,\rho}]$ разложим функцию $\psi_0(\xi)$ в ряд Маклорена. Тогда в силу (48) и (51) получим

$$\widetilde{E}(\xi,\varepsilon)\widetilde{E}^*(\xi,\varepsilon)(l_0+\varepsilon\rho) = R(\varepsilon^2,\varepsilon^2\xi,\varepsilon\rho,\xi;1). \tag{52}$$

При интегрировании слагаемого ряда (52), имеющего общий порядок k

$$D_{k_1,k_2,k_3,k_4}\varepsilon^{2k_1}(\varepsilon^2\xi)^{k_2}\varepsilon^{k_3}P_{k_3}(\rho)\xi^{k_4},\ k_1+k_2+k_3+k_4=k,$$

по отрезку $[\Delta\tau_{1,\varepsilon,\rho};\Delta\tau_{2,\varepsilon,\rho}]$ получим слагаемое вида

$$D_{k_1,k_2,k_3,k_4}\varepsilon^{2k_1+2k_2+k_3}P_{k_3}(\rho)\frac{1}{k_2+k_4+1}\Bigl(\Delta\tau_{2,\varepsilon,\rho}^{k_2+k_4+1} - \Delta\tau_{1,\varepsilon,\rho}^{k_2+k_4+1}\Bigr)$$

с минимальным порядком слагаемых (при $k_1=k_2=k_3=0$, $k_4=1$) ε^2 (см. (41)). Тем самым асимптотическое разложение интеграла $I_{1,2}$ имеет вид

$$I_{1,2} = \varepsilon\int\limits_{\Delta\tau_{1,\varepsilon,\rho}}^{\Delta\tau_{2,\varepsilon,\rho}} \widetilde{E}(\xi,\varepsilon)\,\widetilde{E}^*(\xi,\varepsilon)(l_0+\Delta l)\,d\xi \overset{as}{=} \varepsilon R(\varepsilon,\varepsilon\rho;1). \tag{53}$$

На множестве

$$[-\tau_0;\Delta\tau_{1,\varepsilon,\rho}]\bigcup[\Delta\tau_{2,\varepsilon,\rho};\widetilde{\tau}-\tau_0] \tag{54}$$

представим функцию (51) в виде

$$\widetilde{E}^*(\xi,\varepsilon)(l_0+\varepsilon\rho) = \xi\Bigl(\psi_1(\xi)B^*l_0 + \frac{\varepsilon}{\xi}P_{1,1}(\varepsilon,\rho) + \varepsilon\psi_1(\xi)B^*\rho + \varepsilon^2 R_1^*(\varepsilon^2,\varepsilon^2\xi;1) + $$

$$+\varepsilon^2\xi R_2^*(\varepsilon^2,\varepsilon^2\xi;0) + \varepsilon R_3^*(\varepsilon^2,\varepsilon^2\xi;1)\rho\Bigr),$$

где $P_{1,1}(\varepsilon,\rho) := \Phi_0^*(\tau_0)\rho + \varepsilon\widehat{\Phi}^* l_0$ и, тем самым

$$\widetilde{E}^*(\xi,\varepsilon)(l_0+\varepsilon\rho) = \xi\Big(\psi_1(\xi)B^* l_0 + \psi_1(\xi)B^*\varepsilon\rho + R\big(\varepsilon^2,\varepsilon^2\xi,\varepsilon^2/\xi,\varepsilon\rho,\varepsilon\rho/\xi;1\big)\Big), \tag{55}$$

где

$$R\big(\varepsilon^2,\varepsilon^2\xi,\varepsilon^2/\xi,\varepsilon\rho,\varepsilon\rho/\xi;1\big) := \frac{\varepsilon}{\xi}P_{1,1}(\varepsilon,\rho) + R\big(\varepsilon^2,\varepsilon^2\xi,\varepsilon^2/\xi,\varepsilon\rho,\varepsilon\rho/\xi;2\big).$$

Отметим, что на (54) справедлива асимптотическая оценка $\varepsilon/\xi = O(1)$. Поэтому на этом множестве

$$\psi_1(\xi)B^*\varepsilon\rho + R\big(\varepsilon^2,\varepsilon^2\xi,\varepsilon^2/\xi,\varepsilon\rho,\varepsilon\rho/\xi;1\big) = O(\varepsilon),$$

а в силу (49) $\|\psi_1(\xi)B^* l_0\| \geqslant \gamma_0\|B^* l_0\|$. Таким образом,

$$\|\widetilde{E}^*(\xi,\varepsilon)(l_0+\varepsilon\rho)\|^{-1} \stackrel{as}{=}$$
$$\stackrel{as}{=} |\xi\psi_1(\xi)|^{-1}\cdot\|B^* l_0\|^{-1}\Big(1 + R\big(\varepsilon^2,\varepsilon^2\xi,\varepsilon^2/\xi,\varepsilon\rho,\varepsilon\rho/\xi;1,\xi\big)\Big),$$

где коэффициенты, зависящие от ξ, не указанные явно, имеют вид $(\psi_1(\xi))^{-k}$ $(k \geqslant 0)$ — аналитические всюду функции.

Поэтому на (54) в силу (48) и (55) справедливо асимптотическое разложение

$$\frac{\widetilde{E}^*(\xi,\varepsilon)(l_0+\varepsilon\rho)}{\|\widetilde{E}^*(\xi,\varepsilon)(l_0+\varepsilon\rho)\|} \stackrel{as}{=} \operatorname{sign}(\xi)\Big(\frac{B^* l_0}{\|B^* l_0\|} + R_1\big(\varepsilon^2,\varepsilon^2\xi,\varepsilon^2/\xi,\varepsilon\rho,\varepsilon\rho/\xi;1,\xi\big)\Big).$$

Таким образом в силу (47)

$$\begin{aligned}\widetilde{E}(\xi,\varepsilon)\tfrac{\widetilde{E}^*(\xi,\varepsilon)(l_0+\varepsilon\rho)}{\|\widetilde{E}^*(\xi,\varepsilon)(l_0+\varepsilon\rho)\|} &= \operatorname{sign}(\xi)\Big(\Phi_0(\tau_0) + \psi_0(\xi)B + R\big(\varepsilon^2,\varepsilon^2\xi;1\big)\Big)\times\\ &\times\Big(\tfrac{B^* l_0}{\|B^* l_0\|} + R_1\big(\varepsilon^2,\varepsilon^2\xi,\varepsilon^2/\xi,\varepsilon\rho,\varepsilon\rho/\xi;1,\xi\big)\Big) =\\ &= \operatorname{sign}(\xi)\Big(\tfrac{\Phi_0(\tau_0)B^* l_0}{\|B^* l_0\|} + R_2\big(\varepsilon^2,\varepsilon^2\xi,\varepsilon^2/\xi,\varepsilon\rho,\varepsilon\rho/\xi;1,\xi\big)\Big),\end{aligned}$$

где коэффициенты, зависящие от ξ, не указанные явно в R_2, имеют вид $(\psi_0(\xi)^{k_1}(\psi_1(\xi))^{-k_2}$, $(k_1 \in \{0,1\}$, $k_2 \geqslant 0)$ — аналитические всюду функции.

Поэтому

$$I_{1,1} = \varepsilon^2\int\limits_{-\tau_0}^{\Delta\tau_{1,\varepsilon,\rho}} \widetilde{E}(\xi,\varepsilon)\frac{\widetilde{E}^*(\xi,\varepsilon)(l_0+\varepsilon\rho)}{\|\widetilde{E}^*(\xi,\varepsilon)(l_0+\varepsilon\rho)\|}\,d\xi \stackrel{as}{=}$$

$$\stackrel{as}{=} -\varepsilon^2\int\limits_{-\tau_0}^{\Delta\tau_{1,\varepsilon,\rho}}\Big(\frac{\Phi_0(\tau_0)B^* l_0}{\|B^* l_0\|} + R_2\big(\varepsilon^2,\varepsilon^2\xi,\varepsilon^2/\xi,\varepsilon\rho,\varepsilon\rho/\xi;1,\xi\big)\Big)\,d\xi,$$

а

$$I_{1,3} \stackrel{as}{=} \varepsilon^2\int\limits_{\Delta\tau_{2,\varepsilon,\rho}}^{\widetilde{\tau}-\tau_0}\Big(\frac{\Phi_0(\tau_0)B^* l_0}{\|B^* l_0\|} + R_2\big(\varepsilon^2,\varepsilon^2\xi,\varepsilon^2/\xi,\varepsilon\rho,\varepsilon\rho/\xi;1,\xi\big)\Big)\,d\xi.$$

Рассмотрим подробнее асимптотику интеграла $I_{1,1}$:

$$I_{1,1} \overset{as}{=} -\varepsilon^2 \frac{\Phi_0(\tau_0)B^* l_0}{\|B^* l_0\|}(\triangle\tau_{1,\varepsilon,\rho} + \tau_0) -$$

$$-\varepsilon^2 \int\limits_{-\tau_0}^{\Delta\tau_{1,\varepsilon,\rho}} \Big(R_2\big(\varepsilon^2, \varepsilon^2\xi, \varepsilon^2/\xi, \varepsilon\rho, \varepsilon\rho/\xi; 1, \xi\big)\Big)\, d\xi.$$

Проинтегрируем одно слагаемое из R_2 :

$$g(\xi) := G\varepsilon^{2k_1+2k_2+2k_3+k_4+k_5} P_{k_4}(\rho) P_{k_5}(\rho) \xi^{k_2-k_3-k_5} (\psi_0(\xi))^{k_6} (\psi_1(\xi))^{-k_7},$$

заметив, что в окрестности точки $\tau_{1,\varepsilon,\rho}$ справедливо разложение

$$\xi^{k_2-k_3-k_5}(\psi_0(\xi))^{k_6}(\psi_1(\xi))^{-k_7} \overset{as}{=} R(\xi; k_2 - k_3 - k_5 + k_6),$$

$$\int\limits_{-\tau_0}^{\Delta\tau_{1,\varepsilon,\rho}} g(\xi)\, d\xi = G_1 + G_2 \ln\big(\triangle\tau_{1,\varepsilon,\rho}\big) + R(\triangle\tau_{1,\varepsilon,\rho}; k_2 - k_3 - k_5 + k_6 + 1),$$

где G и G_1 — некоторые константы.

При этом $G_2 \neq 0$ тогда и только тогда, когда $k_2 - k_3 - k_5 + k_6 < 0$. С учетом (41) и (11) получим:

$$\int\limits_{-\tau_0}^{\triangle\tau_{1,\varepsilon,\rho}} g(\xi)\, d\xi = R(\varepsilon, \rho; 2(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5) + k_6) \times$$

$$\times \left(G_2 \ln\varepsilon + R(\varepsilon, \rho; 0) + \varepsilon^{2k_2-k_5+k_6} R(\varepsilon, \rho; 1)\right).$$

Учитывая неотрицательность всех k_i получим асимптотику интеграла $I_{1,1}$:

$$I_{1,1} \overset{as}{=} \varepsilon^2 R_1(\varepsilon, \varepsilon\rho; 1) + \varepsilon^2 \ln\varepsilon R_2(\varepsilon^2, \varepsilon\rho; 1). \tag{56}$$

Аналогично показывается, что

$$I_{1,3} \overset{as}{=} \varepsilon^2 R_3(\varepsilon, \varepsilon\rho; 1) + \varepsilon^2 \ln\varepsilon R_4(\varepsilon^2, \varepsilon\rho; 1). \tag{57}$$

Таким образом, учитывая (46), (53), (56) и (57), получим асимптотическое равенство, соответствующее основному уравнению (28):

$$0 \overset{as}{=} (D + I)\varepsilon\rho + \varepsilon^2 f_5 + \varepsilon^2 R_5(\varepsilon, \varepsilon\rho; 1) + \varepsilon^2 \ln\varepsilon R_6(\varepsilon^2, \varepsilon\rho; 1), \tag{58}$$

где $f_5 := f_4 + (A + A^*)\, l_0 + \left(Ae^{AT}x^0 + e^{AT}By^0\right)$.

К этому равенству (после сокращения на ε и Замечания 2) применима [12, Теорема 1], дающее разложение вектора ρ:

$$\rho \overset{as}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^k Q_{k-1}(\ln\varepsilon), \tag{59}$$

где Q_{k-1} — полином степени $k - 1$ общего вида. Полученное разложение вектора можно немного уточнить. Покажем, что слагаемые с $\ln\varepsilon$

действительно присутствуют в (58). Из формул (48), (50) и (51) непосредственным вычислением получим, что среди слагаемых ряда R_2 есть слагаемое вида

$$g_1(\xi) := -\frac{\varepsilon}{\xi e^{-\tau_0}\|B^*l_0\|^2}\widehat{l}\langle B^*l_0, P_{1,1}(\varepsilon,\rho)\rangle, \quad \text{где} \quad \widehat{l} := \frac{\Phi_0(\tau_0)B^*l_0}{\|B^*l_0\|}.$$

Тогда с учетом разложения (40) и $\mathrm{sign}(\xi)$ получим следующее слагаемое

$$-\int\limits_{-\tau_0}^{\Delta\tau_{1,\varepsilon,\rho}} g_1(\xi)\,d\xi + \int\limits_{\Delta\tau_{2,\varepsilon,\rho}}^{\widetilde{\tau}-\tau_0} g_1(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{\varepsilon}{e^{-\tau_0}\|B^*l_0\|^2}\widehat{l}\langle B^*l_0, P_{1,1}(\varepsilon,\rho)\rangle \cdot \big(2\ln\varepsilon + \ln|\eta_1\eta_2| - \ln|-\tau_0| - \ln|\tilde{\tau}-\tau_0|\big) =$$

$$= R_7(\varepsilon^2, \varepsilon\rho; 1) + \ln\varepsilon R_8(\varepsilon^2, \varepsilon\rho; 1),$$

причем коэффициент $\frac{2\Phi_0(\tau_0)B^*l_0}{\|B^*l_0\|^3 e^{-\tau_0}}\langle B^*l_0; \widehat{\Phi}^*l_0\rangle$ перед $\varepsilon^2\ln\varepsilon$ отличен от нуля.

Кроме этого, из (58) в силу обратимости линейного оператора $(D+I)$ следует, что

$$\rho = \varepsilon f_6 + O\big(\varepsilon^2\big) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

где $f_6 := -(D+I)\,f_5$. Возвращаясь к вектору с учетом разложения (59), получаем следующую теорему

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения 1 – 3 и* (29). *Тогда* l_ε *раскладывается при* $\varepsilon \to +0$ *в асимптотический ряд вида*

$$l_\varepsilon \overset{as}{=} l_0 + \varepsilon^2 f_6 + \sum_{k=1}^{+\infty}\varepsilon^{k+2}Q_{k-1}(\ln\varepsilon).$$

7 Заключение

Вектор, определяющий вид оптимального управления в задаче с интегральным выпуклым критерием качества и дешёвым управлением имеет разложение в смысле Пуанкаре по асимптотической последовательности, состоящей из функций вида $\{1, \varepsilon^2, \varepsilon^{k+2}\ln^i\varepsilon\}$ при $k, i \in \mathbb{N}, 0 \leqslant i \leqslant k-1$. Таким образом, задача (1)–(2) оказалась более сложной, чем в статье [10]. Ответ на вопрос, будет ли всегда асимптотика определяющего вектора в задачах дешёвого управления в случае матриц системы и управления общего вида давать разложение в смысле Пуанкаре, требует дальнейшего исследования.

References

[1] N.N. Krassovskii, *Theory of control of motion: Linear systems*, Nauka, Moscow, 1968. Zbl 0172.12702

[2] E.B. Lee, L. Markus, *Foundations of optimal control theory*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1967. Zbl 0159.13201

[3] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko, *The mathematical theory of optimal processes*, John Wiley & Sons, Inc., New York and London, 1962. Zbl 0102.32001

[4] M.G. Dmitriev, G.A. Kurina, *Singular perturbations in control problems*, Autom. Remote Control, **67**:1 (2006), 1–43. Zbl 1126.93301

[5] G.A. Kurina, M.A. Kalashnikova, *Singularly perturbed problems with multi-tempo fast variables*, Autom. Remote Control, **83**:11 (2022), 1679–1723. Zbl 1508.93210

[6] Y. Zhang, D.S. Naidu, C. Cai, Y. Zou, *Singular perturbation and time scales in control theories and applications: an overview 2002–2012*, Int. J. Inform. Systems Sci., **9**:1 (2014), 1–36.

[7] M.A. Kalashnikova, G.A. Kurina, *Direct scheme for the asymptotic solution of linear-quadratic problems with cheap controls of different costs*, Differ. Equ., **55**:1 (2019), 84–104. Zbl 1418.49036

[8] N.T. Hoai, *Asymptotic solution of a singularly perturbed linear-quadratic problem in critical case with cheap control*, J. Optim. Theory Appl., **175**:2 (2017), 324–340. Zbl 1380.49002

[9] A.R. Danilin, A.A. Shaburov, *Asymptotics of solutions of linear singularly perturbed optimal control problems with a convex integral performance index and a cheap control*, Differ. Equ., **59**:1 (2023), 87–102. Zbl 1511.49005

[10] A.R. Danilin, A.A. Shaburov, *Asymptotics of solution to indirect optimal control problem with integral convex performance index and cheap control*, J. Math. Sci., New York, **284**:1 (2024), 59–71. Zbl 1555.49045

[11] A.M. Il'in, A.R. Danilin, *Asymptotic methods in analysis*, Fizmatlit, Moscow, 2009. Zbl 1211.34003

[12] A.R. Danilin, O.O. Kovrizhnykh *Asymptotics of a solution to a time-optimal control problem with an unbounded target set in the critical case*, Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN, **28**:1 (2022), 58–73. MR4412487

Aleksei Rufimovich Danilin
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS),
str. S.Kovalevskaya, 16,
620077, Yekaterinburg, Russia
Email address: dar@imm.uran.ru

Alexander Alexandrovich Shaburov
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS),
str. S.Kovalevskaya, 16,
620077, Yekaterinburg, Russia
Email address: alexandershaburov@mail.ru