Вязкие решения уравнения фильтрации с младшими членами

Ал.С. Терсенов

Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of Crete
tersenov@uoc.gr

Ар.С. Терсенов

Институт математики им. С.Л. Соболева
aterseno@math.nsc.ru

Adstract. In this article, sufficient conditions are given for the existence of a viscosity solution to the first initial boundary value problem for the equation of porous media type with low order terms.

Keywords: porous media equation, viscosity solution.

УДК 517.95

MSC 35A01, 35D40

§ 1 Введение и основные результаты

Рассмотрим уравнение фильтрации с младшими членами

$$u_t = (u^m)_{xx} + F(t,x,u,u_x), \quad \text{в} \quad \Omega_T = (0,T) \times (-l,l), \quad m > 1, \tag{1.1}$$

удовлетворяющее граничным условиям Дирихле

$$u(t,-l) = u(t,l) = 0,$$

а также начальному условию

$$u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \quad u_0(-l) = u_0(l) = 0,$$

где функция u_0 непрерывна по Гельдеру с показателем $1/m$:

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leq C|x-y|^{\frac{1}{m}}. \tag{1.2}$$

Сделав в уравнении (1.1) замену переменных

$$v = \frac{m}{m-1} u^{m-1},$$

мы получаем уравнение фильтрации для давления $v(t,x)$

$$v_t = (m-1)vv_{xx} + v_x^2 + G(t,x,v,v_x), \quad \text{в} \quad \Omega_T, \tag{1.3}$$

которое удовлетворяет граничным условиям

$$v(t,-l) = v(t,l) = 0, \tag{1.4}$$

а также начальному условию

$$v(0,x) = v_0(x) = \frac{m}{m-1} u_0^{m-1}(x), \quad v_0(-l) = v_0(l) = 0. \tag{1.5}$$

Заметим, что из (1.2) вытекает, что $v_0(x)$ удовлетворяет

$$|v_0(x) - v_0(y)| \leq C_0 |x-y|^{\alpha}, \quad \alpha = \frac{m-1}{m}, \tag{1.6}$$

с некоторой постоянной C_0. Здесь $G(t,x,v,v_x) = F(t,x,u,u_x)$ при указанной замене переменных. В дальнейшем будем рассматривать задачу (1.3)–(1.5), для которой и докажем существование вязкого по Лионсу решения.

Уравнению (1.3) при $G = 0$ посвящено большое количество работ. Не имея возможность привести полный список соответствующей литературы, отметим лишь монографии [1], [13] и ссылки в них. В случае $G = 0$ были получены оптимальные результаты о гладкости решений по пространственной переменной как задачи Дирихле, так и задачи Коши. В первом случае была доказана непрерывность решения по Гельдеру с показателем $\frac{1}{m}$, во втором – непрерывность решения по Гельдеру с показателем $\frac{1}{m-1}$.

Дадим определение вязкого решения задачи (1.3)–(1.5) следуя [14] (см. также [5], [10]).

Определение 1. *Будем говорить, что непрерывная, неотрицательная функция $v(t,x)$ является вязким субрешением (суперрешением) задачи* (1.3)–(1.5) *в некоторой точке* $(t_0,x_0) \in \Omega_T$, *если для любой функции $\phi(t,x) \in \mathbb{C}^{1,2}(\Omega_T)$, которая касается сверху (снизу) функции v в точке* (t_0,x_0) *выполняется*

$$\phi_t - (m-1)\phi\phi_{xx} - \phi_x^2 - G(t,x,\phi,\phi_x)\Big|_{(t_0,x_0)} \leq 0 \ (\geq 0),$$

$$v(t,-l) \leq 0, \quad v(t,l) \leq 0,$$

$$v(0,x) \leq v_0(x) \ (\geq v_0(x)), \quad x \in \Omega.$$

Вязким решением задачи (1.3)–(1.5) *в точке* (t_0,x_0) *является непрерывная, неотрицательная функция $v(t,x)$, которая одновременно является суб- и суперрешением.*

Основным результатом статьи является теорема существования вязкого решения (1.3)–(1.5) (см. теорему 1) в случае, когда правая часть, в частности, может иметь произвольный полиномиальный рост по производной от решения. Кроме того, доказана непрерывность решения по Гельдеру по переменной x с показателем α (см. лемму 2.2). С.Н. Кружковым [9] был получен результат о характере непрерывности по t решения линейного параболического уравнения, если априори известен модуль непрерывности по пространственным переменным. Было доказано, что непрерывность решения по Гельдеру по переменной x линейного уравнения с показателем $\sigma \in (0,1]$, влечет непрерывность решения по Гельдеру по переменной t с показателем $\frac{\sigma}{2+\sigma}$. Показатель непрерывности по Гельдеру по переменной t был улучшен Б. Гилдингом [6], где было доказано, что он равен $\frac{\sigma}{2}$. В лемме 2.3 мы обобщили результат Кружкова–Гилдинга на случай, когда в уравнении присутствует правая часть нелинейная по производной от решения. Отметим, что в случае, если есть оценка максимума модуля градиента решения, результат Кружкова-Гилдинга может быть перенесен и на квазилинейные уравнения. Но, как уже было отмечено выше, такой гладкостью решения уравнения вида (1.3) не обладают.

Доказательство теоремы существования вязкого решения задачи (1.3)–(1.5) проведем методом регуляризации исходной краевой задачи. В связи с этим, отметим работы [2, 11], в которых было доказано существование вязкого решения в случае $G = G(u)$ также с помощью регуляризации.

Предположим, что в (1.3) функция G удовлетворяет

$$G(t, y, z_1, q) - G(t, x, z_2, q) \geq 0, \tag{1.7}$$

$$G(t, x, z_1, -q) - G(t, y, z_2, -q) \geq 0 \tag{1.8}$$

при $t \in [0, T]$, $-l \leq y < x \leq l$, $z_1 < z_2$, $q \geq 0$, а также условиям

$$G(t, x, z, q) \leq 0, \quad z \geq 0,\ q \in \mathbb{R}; \qquad G(t, x, z, 0) = 0, \tag{1.9}$$

при $x \in [-l, l]$, $t \in [0, T]$. Приведем простой пример функции G, удовлетворяющей (1.7)—(1.9):

$$G(t, x, z, q) = f(t, z)g(t, q),$$

где $g(t, q) \geq 0 \quad \forall q, \quad g(t, 0) = 0$, а $f(t, z)$ невозрастающая по z и такая, что $f(t, z) \geq 0$ при $z \leq 0$.

Для того, чтобы доказать существование вязкого решения задачи (1.3)–(1.5) с помощью предельного перехода необходимо получить равномерные относительно параметра регуляризации оценки Гельдера решений регуляризованной задачи. Получение оценки Гельдера по времени базируется на упомянутом выше обобщении результата Кружкова-Гилдинга. В связи с этим будем предполагать, что G удовлетворяет следующему неравенству по переменной q

$$\max_{(t,x) \in \Omega_T, |z| \leq M} |G(t, x, z, q)| \leq \kappa_0(1 + |q|^p), \tag{1.10}$$

с некоторой постоянной κ_0 и каким-либо фиксированным $p \geq 0$. Сформулируем теперь основной результат настоящей статьи.

Теорема 1. *Предположим, что функция* $G(t, x, z, q) \in \mathbb{C}^{\frac{\beta}{2}, \beta, \beta, \beta}_{t,x,z,q}((0, T) \times (-l, l) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *с некоторым показателем* $\beta \in (0, 1)$ *и выполнены условия* (1.7)—(1.9), (1.10). *Тогда существует вязкое решение* $v(t, x)$ *задачи* (1.3)—(1.5) *такое, что*

$$|v(t, x) - v(t, y)| \leq C_0 |x - y|^\alpha, \quad \alpha = \frac{m-1}{m}, \quad x, y \in [-l, l],\ t \in [0, T],$$

$$|v(t_1, x) - v(t_2, x)| \leq C_1 |t_1 - t_2|^\gamma, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\max\{2, p\}}, \quad x \in (-l, l),\ t_1, t_2 \in (0, T),$$

где постоянная C_0 *из* (1.6), *а постоянная* C_1 *зависит лишь от* $C_0, \kappa_0, l, \alpha, p$ *и* $d = dist(x, \partial\Omega)$.

Статья структурирована следующим образом. Второй параграф посвящен получению априорных оценок решения регуляризованной задачи, не зависящих от параметра регуляризации. В третьем параграфе приводится доказательство теоремы 1.

§ 2 Априорные оценки решения регуляризованной задачи

Для доказательства теоремы 1 мы строим последовательность классических решений v_μ следующих регуляризованных задач, где уравнение (1.3) остается неизменным

$$v_{\mu t} = (m-1) v_\mu v_{\mu xx} + v_{\mu x}^2 + G(t, x, v_\mu, v_{\mu x}), \quad \text{в} \quad \Omega_T, \tag{2.1}$$

краевые условия (1.4) заменяются условиями

$$v_\mu(t, -l) = v_\mu(t, l) = \mu > 0, \tag{2.2}$$

а начальное условие (1.5) принимает вид

$$v_\mu(0,x)=v_{0\mu}(x)\geq\mu,\quad v_{0\mu}(\pm l)=\mu, \tag{2.3}$$

где функция $v_{0\mu}(x)$ – гладкая функция удовлетворяющая соотношениям

$$|v_{0\mu}(x)-v_{0\mu}(y)|\leq C_0|x-y|^\alpha, \tag{2.4}$$

$$||v_{0\mu}(x)-v_0(x)||_{\mathbb{C}^\alpha([-l,l])}\to 0\quad\text{при}\quad\mu\to 0. \tag{2.5}$$

Дадим для удобства читателя определение классического решения задачи (2.1)–(2.3).

Определение 2. *Функцию $v_\mu(t,x)\in\mathbb{C}^{1,2}_{t,x}(\Omega_T)\cap\mathbb{C}^0(\overline{\Omega}_T)$, удовлетворяющую уравнению* (2.1) *в каждой точке области, а также начально краевым условиям* (2.2), (2.3), *понимаемым поточечно, будем называть классическим решением задачи* (2.1)–(2.3).

В этом параграфе мы получим равномерную по μ оценку максимума модуля решений задачи (2.1), (2.2), (2.3). Также получим равномерную по μ оценку Гельдера этих же решений.

Рассмотрим задачу (2.1)–(2.3) и, для простоты, в дальнейших выкладках опустим μ у функции v_μ, положив $v(t,x)=v_\mu(t,x)$, $v_0(x)=v_{0\mu}(x)$. В новых обозначениях задача (2.1)–(2.3) принимает вид

$$v_t=(m-1)vv_{xx}+v_x^2+G(t,x,v,v_x)\quad\text{в}\quad\Omega_T, \tag{2.6}$$

$$v(t,-l)=v(t,l)=\mu>0, \tag{2.7}$$

$$v(0,x)=v_0(x)\geq\mu,\quad v_0(\pm l)=\mu, \tag{2.8}$$

где $v_0(x)$ – гладкая функция, удовлетворяющая соотношению

$$|v_0(x)-v_0(y)|\leq C_0|x-y|^\alpha, \tag{2.9}$$

где постоянная C_0 из (1.6). Докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. *Для любого классического решения задачи* (2.6)–(2.8) *в $\overline{\Omega}_T$ верны оценки*

$$\mu\leq v(t,x)\leq C_0(l-x)^\alpha+\mu, \tag{2.10}$$

$$\mu\leq v(t,x)\leq C_0(l+x)^\alpha+\mu. \tag{2.11}$$

Доказательство. Заметим, что доказательство левого неравенства в (2.10), (2.11) вытекает из принципа максимума, примененного к задаче (2.6)–(2.8).

Рассмотрим функцию $h=C_0(l+x)^\alpha$, $|x|<l$. Напомним, что $\alpha=\frac{m-1}{m}>0$. Легко видеть, что $h'>0$, $h''<0$. Функция h удовлетворяет уравнению

$$(m-1)hh_{xx}-h_t=-h_x^2, \tag{2.12}$$

В то же время из (2.6) следует

$$(m-1)vv_{xx}-v_t=-v_x^2-G(t,x,v,v_x), \tag{2.13}$$

откуда, вычитая (2.12) из (2.13), для функции

$$w(t,x)=v(t,x)-h(l+x)-\mu,$$

получаем

$$Lw\equiv(m-1)vw_{xx}-w_t+(m-1)h_{xx}w=$$

$$h_x^2 - v_x^2 - \mu(m-1)h_{xx} - G(t,x,v,v_x) \geq h_x^2 - v_x^2 - G(t,x,v,v_x). \tag{2.14}$$

Предположим, что функция w достигает положительного максимума в некоторой точке $(t_0, x_0) \in \overline{\Omega}_T \setminus \Gamma_T$, где Γ_T – параболическая граница области Ω_T. С одной стороны, в точке (t_0, x_0) выполнены соотношения

$$w > 0, \quad w_{xx} \leq 0, \quad w_t \geq 0, \quad v > 0, \quad h_{xx} < 0,$$

что влечет за собой неравенство $Lw\Big|_{(t_0,x_0)} < 0$. С другой стороны, в точке (t_0, x_0) имеют место соотношения $w > 0$, $w_x = 0$. Откуда, используя (1.9), вытекает, что в точке (t_0, x_0)

$$v > h, \quad v_x = h_x, \quad v_x^2 = h_x^2, \quad G \leq 0.$$

Таким образом, из (2.14) получаем

$$Lw\Big|_{(t_0,x_0)} \equiv (m-1)vw_{xx} + (m-1)h_{xx}w - w_t\Big|_{(t_0,x_0)} \geq 0.$$

Это противоречит тому, что функция w достигает положительного максимума в $(t_0, x_0) \in \overline{\Omega}_T \setminus \Gamma_T$.

Рассмотрим w на Γ_T. Заметим, что из согласованности граничных и начальных условий рассматриваемой задачи, вытекает $v(0,-l) = v_0(-l) = \mu$, откуда при $t = 0$ имеем

$$w(0,x) = v_0(x) - (l+x)^\alpha - \mu = v_0(x) - v_0(-l) - (l+x)^\alpha \leq 0,$$

в силу (2.9). При $x = \pm l$ получаем

$$w(t,-l) = 0, \quad w(t,l) = -h(2l) < 0.$$

Следовательно,

$$v(t,x) \leq h(l+x) + \mu = (l+x)^\alpha + \mu.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\tilde{w}(t,x) = v(t,x) - h(l-x) - \mu.$$

Применяя к функции $\tilde{w}$ дословно все рассуждения, которые были проведены выше для функции w, легко показать, что она не может достигать положительного максимума внутри $\overline{\Omega}_T \setminus \Gamma_T$. Очевидно

$$\tilde{w}(0,x) = v_0(x) - (l-x)^\alpha - \mu = v_0(x) - v_0(l) - (l-x)^\alpha \leq 0.$$

При $x = \pm l$ получаем $\tilde{w}(t,-l) = -h(2l) < 0, \quad \tilde{w}(t,l) = 0$, следовательно,

$$v(t,x) \leq h(l-x) + \mu = (l-x)^\alpha + \mu. \qquad \square$$

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия* (1.7)—(1.9). *Тогда для любого классического решения задачи* (2.6)—(2.8) *верна оценка*

$$|v(t,x) - v(t,y) \leq C_0|x-y|^\alpha \quad \text{для всех } \ x, y \in [-l, l]. \tag{2.15}$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение (2.6) в точках (t,x) и (t,y)

$$v_t(t,x) = (m-1)v(t,x)v_{xx}(t,x) + v_x^2(t,x) + G(t,x,v(t,x),v_x(t,x)), \tag{2.16}$$

$$v_t(t,y) = (m-1)v(t,y)v_{yy}(t,y) + v_y^2(t,y) + G(t,y,v(t,y),v_y(t,y)). \qquad (2.17)$$

Вычитая (2.17) из (2.16), получим, что функция

$$V(t,x,y) = v(t,x) - v(t,y)$$

удовлетворяет следующему соотношению

$$L_1 V \equiv (m-1)v(t,x)V_{xx} + (m-1)v(t,y)V_{yy} - V_t =$$

$$v_y^2(t,y) - v_x^2(t,x) + G(t,y,v(t,y),v_y(t,y)) - G(t,x,v(t,x),v_x(t,x)).$$

Предположим, что $x > y$ и рассмотрим функцию $h(x-y) = C_0(x-y)^\alpha$. Заметим, что

$$h_{xx} = h'', \quad h_{yy} = h'', \quad h_x = h', \quad h_y = -h'.$$

Откуда вытекает, что

$$L_1 h(x-y) = (m-1)v(t,x)h_{xx} + (m-1)v(t,y)h_{yy} - h_t =$$

$$\frac{1-\frac{1}{\alpha}}{h}h'^2 v(t,x) + \frac{1-\frac{1}{\alpha}}{h}h'^2 v(t,y) = \frac{1-\frac{1}{\alpha}}{h}h'^2(v(t,x)+v(t,y)).$$

Для разности $W = V - h$ будем иметь

$$L_1 W \equiv (m-1)v(t,x)W_{xx} + (m-1)v(t,y)W_{yy} - W_t =$$

$$v_y^2(t,y) - v_x^2(t,x) + G(t,y,v(t,y),v_y(t,y)) - G(t,x,v(t,x),v_x(t,x)) -$$

$$\frac{1-\frac{1}{\alpha}}{h}h'^2(v(t,x)+v(t,y)). \qquad (2.18)$$

Рассмотрим функцию W в области

$$P = \{(t,x,y) : 0 < t < T, y < x, |x| < l, |y| < l\}.$$

Предположим, что W достигает своего положительного максимума в некоторой точке $(t_0,x_0,y_0) \in \overline{P} \setminus \Gamma$, где Γ – параболическая граница P. Тогда в этой точке $W_x(t_0,x_0,y_0) = W_y(t_0,x_0,y_0) = 0$. Как следствие, получаем $v_x(t_0,x_0) = v_y(t_0,y_0)$. Отметим также, что $W(t_0,x_0,y_0) > 0$, что влечет за собой $v(t_0,x_0) > v(t_0,y_0) > 0$. Учитывая вышеизложенное, а также (1.7), получаем из (2.18)

$$L_1 W\Big|_{(t_0,x_0,y_0)} =$$

$$v_y^2(t_0,y_0) - v_x^2(t_0,x_0) + G(t_0,y_0,v(t_0,y_0),h'(x_0-y_0)) - G(t_0,x_0,v(t_0,x_0),h'(x_0-y_0)) -$$

$$\frac{1-\frac{1}{\alpha}}{h(x_0-y_0)}h'^2(x_0-y_0)(v(t_0,x_0)+v(t_0,y_0)) > 0 \qquad (2.19)$$

поскольку $1 - 1/\alpha < 0$. С другой стороны в точке положительного максимума

$$L_1 W\Big|_{(t_0,x_0,y_0)} \equiv (m-1)v(t,x)W_{xx} + (m-1)v(t,y)W_{yy} - W_t\Big|_{(t_0,x_0,y_0)} \le 0,$$

что противоречит (2.19). Таким образом, функция W не может достигать положительного максимума внутри P.

Рассмотрим теперь W на Г. При $t = 0$

$$W(0, x, y) = v_0(x) - v_0(y) - h(x - y) \leq 0,$$

в силу (2.9). Из леммы 2.1. вытекают следующие два неравенства

$$W(t, l, y) = \mu - v(t, y) - h(l - y) \leq 0, \quad t \in (0, T), \quad y \in [-l, l],$$

$$W(t, x, -l) = v(t, x) - \mu - h(x + l) \leq 0, \quad t \in (0, T), \quad x \in [-l, l].$$

Из трех последних неравенств получаем, что

$$W\Big|_{\overline{P}} \leq 0$$

и, как следствие,

$$v(x) - v(y) \leq h(x - y) \quad \text{в} \quad \overline{P}. \tag{2.20}$$

Аналогично, вычитая (2.16) из (2.17), для разности $\widehat{W} = v(t, y) - v(t, x) - h(x - y)$ будем иметь

$$L_1\widehat{W} \equiv (m - 1)v(t, x)\widehat{W}_{xx} + (m - 1)v(t, y)\widehat{W}_{yy} - \widehat{W}_t =$$
$$v_x^2(t, x) - v_y^2(t, y) + G(t, x, v(t, x), v_x(t, x)) - G(t, y, v(t, y), v_y(t, y)) -$$
$$\frac{1 - \frac{1}{\alpha}}{h} h'^2(v(t, x) + v(t, y)) \quad \text{в} \quad P. \tag{2.21}$$

Предположим, что $\widehat{W}$ достигает своего положительного максимума в некоторой точке $(t_1, x_1, y_1) \in \overline{P} \setminus \Gamma$. Тогда $v_x(t_1, x_1) = v_y(t_1, y_1) = -h'(x_1 - y_1) < 0$. Отметим также, что $\widehat{W}(t_0, x_0, y_0) > 0$, что влечет за собой $0 < v(t_0, x_0) < v(t_0, y_0)$. Учитывая вышеизложенное, а также (1.8), получаем из (2.21)

$$L_1\widehat{W}\Big|_{(t_1, x_1, y_1)} =$$
$$v_x^2(t_1, x_1) - v_y^2(t_1, y_1) + G(t_1, x_1, v(t_1, x_1), -h'(x_1 - y_1)) - G(t_1, y_1, v(t_1, y_1), -h'(x_1 - y_1)) -$$
$$\frac{1 - \frac{1}{\alpha}}{h(x_1 - y_1)} h'^2(x_1 - y_1) \left(v(t_1, x_1) + v(t_1, y_1)\right) > 0. \tag{2.22}$$

С другой стороны в точке положительного максимума

$$L_1\widehat{W}\Big|_{(t_1, x_1, y_1)} = (m - 1)v(t, x)\widehat{W}_{xx} + (m - 1)v(t, y)\widehat{W}_{yy} - \widehat{W}_t\Big|_{(t_1, x_1, y_1)} \leq 0,$$

что противоречит (2.22). Таким образом, функция $\widehat{W}$ не может достигать положительного максимума внутри P.

Рассмотрим теперь $\widehat{W}$ на Г. При $t = 0$

$$\widehat{W}(0, x, y) = v_0(y) - v_0(x) - h(x - y) \leq 0,$$

в силу (2.9). Из Леммы 2.1. вытекают следующие два неравенства

$$\widehat{W}(t, l, y) = v(t, y) - \mu - h(l - y) \leq 0, \quad t \in (0, T), \quad y \in [-l, l],$$

$$\widehat{W}(t, x, -l) = \mu - v(t, x) - h(x + l) \leq 0, \quad t \in (0, T), \quad x \in [-l, l].$$

Из трех последних неравенств вытекает окончательно

$$\widehat{W}\Big|_{\overline{P}} \le 0$$

и, как следствие,

$$v(y) - v(x) \le h(x-y) \quad \text{в} \quad \overline{P}. \tag{2.23}$$

Из (2.20), (2.23) вытекает

$$|v(x) - v(y)| \le h(x-y) \quad \text{в} \quad \overline{P}.$$

В силу симметрии переменных x и y, случай $x < y$ исследуется аналогично. В результате мы получаем

$$|v(x) - v(y)| \le h(|x-y|) = C_0|x-y|^\alpha$$

при $t \in [0,T]$, $|x| \le l$, $|y| \le l$. Оценка (2.15) доказана. $\square$

Следующая лемма является обобщением результата Кружкова–Гилдинга, упомянутого во введении.

Лемма 2.3. *Для любого классического решения v задачи* (2.6)–(2.8)*, удовлетворяющего* (1.10)*,* (2.15)*, имеет место оценка*

$$|v(t_1,x) - v(t_2,x)| \le C_1|t_1-t_2|^\gamma, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\max\{2,p\}}, \quad x \in (-l,l), \quad t_1,t_2 \in (0,T), \tag{2.24}$$

где C_1 зависит от $C_0, \kappa_0, l, \alpha, p$ и $d = dist(x,\partial\Omega)$.

Доказательство. Фиксируем некоторую точку (t_0,x_0), где $t_0 \in [0,T-\tau]$, с некоторым $0 < \tau < T$ и $x_0 \in (-l,l)$. Рассмотрим параллелепипед

$$\Pi = \{(t,x) : t \in (t_0, t_0+\tau),\ x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)\},$$

где $0 < \rho \le d = \min\{|x_0 - l|, |x_0+l|\}$. Обозначим через

$$s = \max_{t\in[t_0,t_0+\tau]} |v(t,x_0) - v(t_0,x_0)|.$$

Заметим, что лемма 2.1 (при достаточно малых μ) дает оценку

$$\max_{\overline{\Omega}_T} v \le C_0 l^\alpha + 1 = M,$$

Далее для определенности считаем $p > 2$.

Положим

$$\mu(\rho,s) = K\frac{2s}{\rho^p} + \kappa_0,$$

где p, κ_0 – постоянные из (1.10), а постоянная K удовлетворяет

$$K > (m+3)Ml^{p-2} + \kappa_0(4M)^{p-1} > 0. \tag{2.25}$$

Введем функции

$$\theta_1(t,x) = v(t_0,x_0) + \left[C_0\rho^\alpha + (t-t_0)\mu(\rho,s) + \frac{s}{\rho^2}(x-x_0)^2\right],$$

$$\theta_2(t,x) = v(t_0,x_0) - \left[C_0\rho^\alpha + (t-t_0)\mu(\rho,s) + \frac{s}{\rho^2}(x-x_0)^2\right].$$

Из леммы 2.2 вытекает
$$|v(t_0,x_0)-v(t_0,x)|\le C_0\rho^\alpha.$$
Откуда
$$\theta_1(t_0,x)=v(t_0,x_0)+C_0\rho^\alpha+\frac{s}{\rho^2}(x-x_0)^2\ge v(t_0,x_0)+C_0\rho^\alpha=$$
$$v(t_0,x_0)-v(t_0,x)+C_0\rho^\alpha+v(t_0,x)\ge v(t_0,x).$$
Далее при $|x-x_0|=\rho$ имеем
$$\theta_1(t,x)\Big|_{|x-x_0|=\rho}=v(t_0,x_0)+C_0\rho^\alpha+(t-t_0)\mu(\rho,s)+s\ge$$
$$v(t_0,x_0)+C_0\rho^\alpha+s=v(t,x)\Big|_{|x-x_0|=\rho}+(v(t_0,x_0)-v(t,x_0)+s)+$$
$$(v(t,x_0)-v(t,x))\Big|_{|x-x_0|=\rho}+C_0\rho^\alpha\ge v(t,x)\Big|_{|x-x_0|=\rho}.$$
Таким образом,
$$\theta_1(t,x)\ge v(t,x)\ \text{ на параболической границе области }\ \Pi. \tag{2.26}$$

Рассмотрим линейный оператор
$$\mathcal{L}\equiv\frac{\partial}{\partial t}-(m-1)v\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$
Очевидно, $\mathcal{L}(\theta_1)=\mu(\rho,s)-(m-1)v2s/\rho^2$. Для $\tilde\theta=\theta_1-v$, получаем
$$\mathcal{L}(\tilde\theta)\equiv\tilde\theta_t-(m-1)v\tilde\theta_{xx}=\mu(\rho,s)-(m-1)v\frac{2s}{\rho^2}-v_x^2-G(t,x,v,v_x). \tag{2.27}$$
Предположим, что в некоторой точке $(\tilde t_0,\tilde x_0)\in\Pi$ функция $\tilde\theta$ достигает отрицательного минимума. Тогда в этой точке мы имеем
$$\tilde\theta_x\Big|_{(\tilde t_0,\tilde x_0)}=\theta_{1x}-v_x\Big|_{(\tilde t_0,\tilde x_0)}=\frac{2s}{\rho^2}(\tilde x_0-x_0)-v_x(\tilde t_0,\tilde x_0)=0,\quad \tilde\theta_{xx}(\tilde t_0,\tilde x_0)\ge 0,\quad \tilde\theta_t(\tilde t_0,\tilde x_0)\le 0,$$
и, как следствие равенства (2.27), получаем, что
$$\tilde\theta_t-(m-1)v\tilde\theta_{xx}\Big|_{(\tilde t_0,\tilde x_0)}=\mu(\rho,s)-(m-1)v(\tilde t_0,\tilde x_0)\frac{2s}{\rho^2}-$$
$$\left(\frac{2s}{\rho^2}(\tilde x_0-x_0)\right)^2-G\left(\tilde t_0,\tilde x_0,v(\tilde t_0,\tilde x_0),\frac{2s}{\rho^2}(\tilde x_0-x_0)\right)\ge$$
$$K\frac{2s}{\rho^p}+\kappa_0-(m-1)M\frac{2s}{\rho^2}-\left(\frac{2s}{\rho^2}(\tilde x_0-x_0)\right)^2-G\left(\tilde t_0,\tilde x_0,v(\tilde t_0,\tilde x_0),\frac{2s}{\rho^2}(\tilde x_0-x_0)\right). \tag{2.28}$$
Здесь мы использовали то, что $v\le M$ и $\mu(\rho,s)=K2s/\rho^p+\kappa_0$. Из (1.10) следует что
$$\left|G(\tilde t_0,\tilde x_0,v(\tilde t_0,\tilde x_0),\frac{2s}{\rho^2}(\tilde x_0-x_0))\right|\le\kappa_0\left(1+\left(\frac{2s}{\rho^2}|\tilde x_0-x_0|\right)^p\right). \tag{2.29}$$
Из (2.27), (2.29), учитывая, что $|\tilde x_0-x_0|\le\rho<l$, $s\le 2M$, получаем
$$\mathcal{L}(\tilde\theta)\Big|_{(\tilde t_0,\tilde x_0)}\ge K\frac{2s}{\rho^p}-(m-1)M\frac{2s}{\rho^2}-\left(\frac{2s}{\rho}\right)^2-\kappa_0\left(\frac{2s}{\rho}\right)^p=$$

$$\frac{2s}{\rho^p}\left(K-(m-1)M\rho^{p-2}-2s\rho^{p-2}-\kappa_0(2s)^{p-1}\right)\geq$$

$$\frac{2s}{\rho^p}\left(K-(m-1)Ml^{p-2}-4Ml^{p-2}-\kappa_0(4M)^{p-1}\right)=$$

$$\frac{2s}{\rho^p}\left(K-(m+3)Ml^{p-2}-\kappa_0(4M)^{p-1}\right)>0, \tag{2.30}$$

в силу (2.25). Что невозможно в точке отрицательного минимума.

В случае, когда $p\in[0,2]$ надо положить

$$\mu(\rho,s)=K\frac{2s}{\rho^2}+\kappa_0, \tag{2.31}$$

где постоянная K выбрана так, что

$$K>(m+3)M+\kappa_0(4M)^{p-1}l^{2-p}. \tag{2.32}$$

Тогда неравенство, аналогичное (2.30), будет иметь вид

$$\mathcal{L}(\tilde{\theta})\Big|_{(\tilde{t}_0,\tilde{x}_0)}\geq K\frac{2s}{\rho^2}-(m-1)M\frac{2s}{\rho^2}-\left(\frac{2s}{\rho}\right)^2-\kappa_0\left(\frac{2s}{\rho}\right)^p=$$

$$\frac{2s}{\rho^2}\left(K-(m-1)M-2s-\kappa_0(2s)^{p-1}\rho^{2-p}\right)\geq$$

$$\frac{2s}{\rho^2}\left(K-(m-1)M-4M-\kappa_0(4M)^{p-1}l^{2-p}\right)=$$

$$\frac{2s}{\rho^2}\left(K-(m+3)M-\kappa_0(4M)^{p-1}l^{2-p}\right)>0, \tag{2.33}$$

в силу (2.32). Таким образом, функция $\tilde{\theta}$ не может достигать отрицательного минимума в точке $(\tilde{t}_0,\tilde{x}_0)$. Принимая во внимание (2.26), мы заключаем, что

$$\theta_1(t,x)\geq v(t,x)\ \text{ в }\ \Pi.$$

Аналогично получаем неравенство

$$\theta_2(t,x)\leq v(t,x)\ \text{ в }\ \Pi.$$

Откуда уже сразу вытекает, что

$$|v(t,x)-v(t_0,x_0)|\leq C_0\rho^\alpha+(t-t_0)\mu(\rho,s)+\frac{s}{\rho^2}(x-x_0)^2,$$

и

$$|v(t,x_0)-v(t_0,x_0)|\leq C_0\rho^\alpha+\tau\mu(\rho,s),\quad \tau=t-t_0.$$

Следовательно

$$s=\max_{t\in[t_0,t_0+\tau]}|v(t,x_0)-v(t_0,x_0)|\leq C_0\rho^\alpha+\tau\mu(\rho,s)$$

и эта оценка имеет место для любого $\rho\in(0,d]$. При $p>2$ имеем

$$C_0\rho^\alpha+\tau\mu(\rho,s)=C_0\rho^\alpha+\tau\left(2Ks\rho^{-p}+\kappa_0\right)\leq\widetilde{K}\left[\rho^\alpha+\tau\left(1+s\rho^{-p}\right)\right],$$

где $\widetilde{K} = max\{C_0, M, 2K\}$. Таким образом, мы получаем следующее неравенство

$$s \leq \widetilde{K}\left[\rho^{\alpha} + \tau\left(1 + s\rho^{-p}\right)\right]. \tag{2.34}$$

Пусть $\tau \leq d^{\alpha+p}(2M)^{-1}$. Очевидно,

$$(\tau s)^{\frac{1}{\alpha+p}} \leq (\tau 2M)^{\frac{1}{\alpha+p}} \leq d$$

(напомним, что $s \leq 2M$). Следовательно, из (2.34), для $\rho_* = (\tau s)^{\frac{1}{\alpha+p}}$ получаем

$$s \leq \widetilde{K}\left[\rho_*^{\alpha} + \tau + \tau s \rho_*^{-p}\right] = \widetilde{K}\left[(\tau s)^{\frac{\alpha}{\alpha+p}} + \tau + \tau s(\tau s)^{\frac{-p}{\alpha+p}}\right] = \widetilde{K}\left[\tau + 2(\tau s)^{\frac{\alpha}{\alpha+p}}\right]. \tag{2.35}$$

Рассмотрим два случая: $\tau \leq (\tau s)^{\frac{\alpha}{\alpha+p}}$ и $\tau \geq (\tau s)^{\frac{\alpha}{\alpha+p}}$. В первом случае из (2.35) мы получаем

$$s \leq 3\widetilde{K}(\tau s)^{\frac{\alpha}{\alpha+p}},$$

откуда

$$s \leq \left(3\widetilde{K}\right)^{\frac{\alpha+p}{p}} \tau^{\frac{\alpha}{p}}.$$

Во втором случае из $\tau \geq (\tau s)^{\frac{\alpha}{\alpha+p}}$ следует, что

$$s \leq \tau^{\frac{p}{\alpha}} \leq \tau^{\frac{\alpha}{p}}$$

при $0 < \tau < 1$, так как $\frac{p}{\alpha} > \frac{\alpha}{p}$.

Предположим теперь, что $\tau \geq d^{\alpha+p}(2M)^{-1}$. Тогда

$$|v(t_0 + \tau, x_0) - v(t_0, x_0)| \leq 2M = \frac{2M}{\tau^{\frac{\alpha}{p}}}\tau^{\frac{\alpha}{p}} \leq (2M)^{\frac{\alpha+p}{p}} d^{-\frac{\alpha+p}{p}\alpha}\tau^{\frac{\alpha}{p}}.$$

Легко видеть, что в случае $p \in [0, 2]$ и выборе функции $\mu(\rho, s)$ из (2.31), показатель Гельдера по переменной t будет равен $\frac{\alpha}{2}$.

Таким образом, мы доказали, что имеет место оценка (2.24) с постоянной C_1

$$C_1 = \max\left\{1, (2M)^{\frac{\alpha+p}{p}} d^{-\alpha\frac{\alpha+p}{p}}, \left(3\tilde{K}^{\frac{\alpha+p}{p}}\right)\right\}.$$

□

§ 3 Доказательство теоремы 1.

Возвращаясь к прежним обозначениям $v = v_\mu$, рассмотрим задачу (2.1)–(2.3). Заметим, что при выполнении условия $G(t, x, v_\mu, 0) = 0$, для любого классического решения задачи (2.1)–(2.3) имеет место оценка $v_\mu \geq \mu$, что позволяет применить результаты, полученные в [12], [**??**], о существовании классического решения указанной задачи при выполнении условий (1.7)–(1.9) в предположении, что функция $G(t, x, v, q) \in \mathbb{C}^{\frac{\nu}{2};\nu}_{t;x,v,q}((0,T)\times(-l,l)\times\mathbb{R}^2)$ с некоторым показателем $\nu \in (0, 1)$ (см. теорему 1 в [12]).

Как известно [5], гладкая функция является вязким решением уравнения тогда и только тогда, когда она удовлетворяет ему в классическом смысле. Таким образом, классическое решение v_μ задачи (2.1)–(2.3) является также и вязким решением той же самой задачи. Сформулируем следующую лемму об аппроксимации [5, 8], имеющую место в теории вязких решений, применительно к нашему случаю.

Лемма об аппроксимации. *Рассмотрим задачу* (1.3)–(1.5). *Предположим, что существует семейство вязких равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных, на любом компактном подмножестве области* Ω_T, *решений* v_μ *задачи* (2.1)–(2.3), *причем выполнено условие* (2.5). *Тогда существует непрерывное в* Ω_T *вязкое решение* v *задачи* (1.3)–(1.5) *такое, что*

$$v = \lim_{\mu\to 0} v_\mu.$$

Для того, чтобы применить лемму об аппроксимации, достаточно получить равномерные по μ оценки Гельдера. Из лемм 2.1 и 2.2 мы получаем равномерную по μ оценку Гельдера по переменной x:

$$|v_\mu(t,x) - v_\mu(t,y)| \le C_0|x-y|^\alpha \quad \text{при} \quad t\in[0,T], \quad x,y\in[-l,l]. \tag{3.1}$$

Из леммы 3.1 следует равномерная по μ оценка Гельдера по переменной t

$$|v_\mu(t_1,x) - v_\mu(t_2,x)| \le C_1|t_1-t_2|^\gamma, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\max\{2,p\}}, \quad x\in(-l,l), \quad t_1,t_2\in(0,T). \tag{3.2}$$

Таким образом, последовательность v_μ классических решений задачи (2.1)–(2.3) принадлежит пространству $\mathbb{C}^{\gamma,\alpha}_{t,x}(\Omega_T)$, причем постоянные Гельдера как по времени так и по пространственной переменной не зависят от μ. Из (3.1), (3.2), переходя к подпоследовательности (оставляя те же обозначения), уже легко вытекает равномерная сходимость $v_\mu \rightrightarrows v \in \mathbb{C}^{\gamma,\alpha}_{t,x}$ при $\mu\to 0$. Заметим, что из представления краевых и начальных условий в (2.2), (2.3) легко следует их равномерная сходимость при $\mu\to 0$ к начально краевым условиям (1.4), (1.5). Теперь уже, используя лемму об аппроксимации, получаем, что $v=\lim_{\mu\to 0} v_\mu$ есть вязкое решение задачи (1.3)–(1.5). Из полученных выше оценок вытекает, что $v\in\mathbb{C}^{\gamma,\alpha}_{t,x}(\Omega_T)$. $\square$

Замечание. Что касается вопросов единственности, отметим работы [3], [4] в случае $G=0$, в которых было дано новое определение вязкого решения, позволившего преодолеть проблему отсутствия монотонности дифференциального уравнения (1.3) по переменной v. Как известно, в теории вязких решений монотонность дифференциального уравнения по решению является ключевым условием, позволяющим доказать теорему существования и единственности методом Ишии–Перрона [7].

(**Финансирование работы.** Ар.С. Терсеновым работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0008).

Литература

1. Antontsev, S. N.; Diaz, J. I.; Shmarev, S. I., Energy methods for free boundary problems. Applications to nonlinear PDEs and fluid mechanics. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. 48. Basel: Birkhauser. xi, 329 p. (2002). DOI: 10.1115/1.1483358

2. Ph. Benilan, M. Maliki, Approximation de la solution de viscositè d'un problemè d'Hamilton-Jacobi [Approximation of the viscosity solution of a Hamilton-Jacobi problem] // Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid (1996), V. 9 (2), 369–384. https://www.mat.ucm.es/serv/revmat/vol9-2/vol9-2h.pdf

3. C. Brandle, J.L. Vazquez. Viscosity solutions for quasilinear degenerate parabolic equations of porous medium type // In. Univ. Math. J. (2005), V. 54(3), pp. 817–860.

4. L. Caffarelli, J.L. Vazquez. Viscosity solutions for the porous medium equation //Differential equations: La Pietra 1996 (Florence), Proc. Sympos. Pure Math., 65 American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, pp. 13–26.
DOI: 10.1512/iumj.2005.54.2565

5. M.G. Crandall, H. Ishii, P.L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations // Bull. Amer. Math. Soc. (1992), V. 27, pp. 1–67.
https://www.math.stonybrook.edu/ blaine/UsersGuide.pdf

6. B.H. Gilding. Hölder continuity of solutions of parabolic equations // J. London Math. Soc. (1976), V. 13 (1), pp. 103–106.
DOI: 10.1112/jlms/s2-13.1.103

7. H. Ishii, P.L. Lions. Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations // J. Differ. Equ. (1990), V. 83, pp. 26–78.
DOI:10.1016/0022-0396(90)90068-Z

8. N. Katzourakis. An introduction to viscosity solutions for fully nonlinear PDE with applications to calculus of variations in L^∞. Springer briefs in mathematics, Springer (2015).
https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-319-12829-0.pdf

9. S.N. Kruzhkov, *Quasilinear parabolic equations and systems with two independent variables*, Trudy Sem. Petrovsk. 5 (1979), 217–272 (Russian). English transl. in Topics in Modern Math., Consultant Bureau, New York (1985).

10. P. Juutinen. On the definition of viscosity solutions for parabolic equations // Proc. Amer. Math. Soc. (2001), V. 129 (10), pp. 2907–2911. pp. 975–978.
DOI: 10.1090/S0002-9939-01-05889-0

11. M. Maliki, Viscosity solution for a degenerate parabolic problem, Partial differential equations // Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 229, Dekker, New York, 2002. Pages 249–258.
https://doi.org/10.1201/9780203910108

12. Al.S. Tersenov, Ar.S. Tersenov. On the Bernstein-Nagumo's condi-tion in the theory of nonlinear parabolic equations // Journal of Reine and Angewandte Mathematic 572, 197-217, (2004).
DOI: 10.1515/crll.2004.049

13. Vazquez, J. L., The porous medium equation. Mathematical theory. Oxford Mathematical Monographs; Oxford Science Publications. Oxford: Oxford University Press (ISBN 0-19-856903-3/hbk). xxii, 624 p. (2007).
DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198569039.001.0001

14. L. Wang. On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations I // Comm. Pure. Appl. Math. (1992), V. 45, pp. 27–76.
https://scispace.com/pdf/on-the-regularity-theory-of-fully-nonlinear-parabolic-dc17x74xyv.pdf