

**Итерационный метод решения системы уравнений
динамической теории упругости в частотной области с
предобуславливателем на основе метода отражений**

Д.А. НЕКЛЮДОВ.[orcid.pdf](#)

Abstract: This paper introduces a frequency-domain iterative solver for numerical simulation of elastic waves in 2D isotropic heterogeneous media. The method applies a right preconditioner to the first-order system of elastic equations, ensuring convergence for Krylov subspace iterative solvers. This preconditioning step consists of elastic wavefield simulation in a vertically inhomogeneous auxiliary model performed via the reflectivity method. As a byproduct the method can yield fully decomposed elastic wavefields, including P- and S-waves, as well as upgoing and downgoing components. The solver proposed in this paper has been validated via comparisons with exact analytical solutions and a time-domain reference solver. The method demonstrates good effectiveness for elastic wavefield simulation in a media with mild lateral velocity variations.

Keywords: elasticity, Krylov iterative solver, preconditioner, reflectivity method.

1 Введение

Численное моделирование процессов распространения сейсмических волн является основой многих технологий, применяемых в разведочной геофизике для определения физических параметров земных недр. Так, расчет сейсмических волновых полей при заданном распределении упругих параметров является основой такого популярного в настоящее время метода как обращение полных волновых полей (Full Waveform Inversion, FWI), [1],[2],[3]. Большинство практических решений для 3D моделирования, применяемых в промышленности, используют моделирование во временной области, однако развитие альтернативного подхода - моделирования в области временных частот - всегда оставалось в поле зрения исследователей. Для задач FWI, когда для оптимизации требуется лишь несколько частот, методы моделирования в частотной области могут оказаться вполне перспективными. Дискретизация волновых уравнений с помощью конечно-разностных или конечно-элементных аппроксимаций приводит к необходимости решать на каждой частоте систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Один из подходов предполагает решение этих уравнений прямыми методами [4]. Однако, для 3D-задач основным ограничением являются сотни гигабайт памяти, необходимые для моделирования даже акустических волновых полей, что делает применение прямых методов в практических условиях крайне затруднительными. Попытки решения этой проблемы включают применение техник сжатия данных на основе низкоранговых аппроксимаций матриц [5],[6].

Альтернативой прямым методам является использование итерационных методов крыловского типа [7]. В этом случае требования к оперативной памяти значительно снижаются. Матрицы, возникающие при моделировании волновых полей в сейсмических приложениях обладают неблагоприятными спектральными свойствами в силу того, что необходимо моделировать волновые процессы в неограниченных областях, т.е. использовать на границах расчетной области соответствующие поглощающие/неотражающие граничные условия (PML). Это приводит к неопределенности матриц коэффициентов и как следствие, к очень медленной сходимости итерационных методов (или даже вообще к их расходимости). Для решения этой проблемы необходимо применение предобуславливателей. В серии работ [8],[9],[10] в качестве такового для уравнения Гельмгольца был предложен оператор Лапласа с комплексным коэффициентом (shifted Laplacian, оператор сдвинутого Лапласа). Развитие этого подхода продолжает оставаться активной областью исследований ([11],[12],[13],[14]).

Данные наземной сейсмически содержат все типы сейсмических волн, при этом Р-волны часто являются наиболее слабой частью регистрируемого сигнала. Инверсия Р-волн требует тщательного подавления волн других типов в данных, поскольку они рассматриваются как помеха. Это одна из причин разработки методов обращения упругих волновых

полей, позволяющих использовать другие регистрируемые моды, такие как S-волны или поверхностные волны. Общеизвестно, что это позволяет получать более адекватные модели геологической среды [15]. Такой подход к FWI требует упругого прямого моделирования, основанного на решении системы уравнений динамической теории упругости.

На сегодняшний день активно продолжается разработка итерационных решателей в частотной области, предназначенных для моделирования волновых процессов в упругих средах ([16],[17],[18]).

В [21] был предложен предобуславливатель для итерационных методов крыловского типа, который расширяет на случай системы уравнений динамической теории упругости подход [20], разработанный для 3D уравнения Гельмгольца. В этом случае предобуславливатель представляет собой обратный оператор для системы уравнений динамической теории упругости первого порядка с затуханием для некоторой референтной вертикально-неоднородной модели среды. Этот метод был разработан для задач упругого FWI данных наземной сейсморазведки и продемонстрировал быструю сходимость для моделей с умеренными латеральными вариациями упругих параметров. Основное время вычислений в этом подходе занимает многократный расчет волновых полей в вертикально-неоднородной среде с затуханием для источника общего вида. Для этого использовался метод неполного разделения переменных через дискретное преобразование Фурье (ДПФ) с последующей конечно-разностной аппроксимацией производных по одной из пространственных переменных (по глубине), что требует достаточно мелкой дискретизации сетки по этому направлению, и решения набора систем линейных уравнений с разреженными матрицами.

Известен целый ряд весьма эффективных методов для расчета упругих волновых полей в вертикально-неоднородных средах: метод Алексева-Михайленко [22],[23], метод отражений [24],[25],[26], метод матричного пропагатора [27], а также подходы, описанные в [28],[29]. В данной работе рассматривается применение итерационного подхода из [21] в сочетании с предобуславливанием, основанным на методе отражений. Особенностью применения метода отражений в данном случае является тот факт, что здесь он используется для источников общего вида, т.е. не сосредоточенных в некоторой точке модели. Помимо полного отсутствия численной дисперсии, предложенный подход обладает интересной возможностью - возможностью полного разделения упругого волнового поля на независимые P- и S-компоненты, их нисходящие/восходящие составляющие для моделей с умеренными латеральными вариациями, что весьма полезно на практике при решении задач обращения полных волновых полей в упругой постановке (elastic Full Waveform Inversion, eFWI). Об актуальности eFWI говорит тот факт, что этой теме целиком посвящен недавний выпуск одного из ведущих журналов в области разведочной геофизики для практиков - The Leading Edge, см., например [30].

2 Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений динамической теории упругости первого порядка в двумерном случае в частотной области:

$$\begin{cases} i\omega\rho \cdot u_x - \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} = F_1(\omega, \vec{x}_s), \\ i\omega\rho \cdot u_z - \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} = F_2(\omega, \vec{x}_s), \\ i\omega \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (1)$$

где c_{ij} есть компоненты тензора Гука, ρ - плотность, u_x , u_z - компоненты вектора скоростей смещений, σ_{xx} , σ_{zz} , σ_{xz} - компоненты тензора напряжений. Функция $F_i(\omega, x_s)$, описывает воздействие источника расположенного в точке (x_s, z_s) . Далее для нас особый интерес будет представлять случай источника типа сосредоточенной вертикальной силы (сила, направленная вдоль оси z).

Последние три уравнения являются выражением закона Гука в классической форме. Для дальнейших выкладок переформулируем закон Гука в терминах "податливости" (compliance):

$$i\omega \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в случае идеальной упругости такое преобразование тензора Гука допустимо [31]. Смысл перехода к параметрам податливости - избавиться от произведений параметров модели на производные скоростей смещений по пространственным координатам.

В изотропном случае для источника типа сосредоточенной силы в направлении координатной оси z модифицированная система динамической теории упругости первого порядка принимает следующий вид:

$$\begin{cases} i\omega\rho \cdot u_x - \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \\ i\omega\rho \cdot u_z - \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} = F(\omega)\delta(x - x_s, z - z_s), \\ i\omega \cdot a(x, z)\sigma_{xx} - i\omega \cdot b(x, z)\sigma_{zz} - \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \\ -i\omega \cdot b(x, z)\sigma_{xx} + i\omega \cdot a(x, z)\sigma_{zz} - \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \\ i\omega \cdot c(x, z)\sigma_{xz} - \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $F(\omega)$ описывает форму импульса в источнике, коэффициенты a , b , c выражаются через параметры Ламэ λ и μ :

$$a = \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)}, \quad b = \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)}, \quad c = \frac{1}{\mu}.$$

Перепишем систему в матричной форме:

$$L(\vec{v}) = i\omega M(x, z)\vec{v} - P\frac{\partial}{\partial x}\vec{v} - Q\frac{\partial}{\partial z}\vec{v} = \vec{f}. \quad (3)$$

Вектор \vec{v} определяется как $\vec{v} = (\vec{u}_x, \vec{u}_z, \vec{\sigma}_{xx}, \vec{\sigma}_{zz}, \vec{\sigma}_{zx})$. Матрицы M , P , Q имеют следующий вид:

$$M(x, z) = \begin{pmatrix} \rho(x, z) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho(x, z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(x, z) & -b(x, z) & 0 \\ 0 & 0 & -b(x, z) & a(x, z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c(x, z) \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы рассматриваем исходную дифференциальную задачу в неограниченной области и предполагаем, что решение удовлетворяет принципу предельного поглощения. В работах [32],[33] было показано, что подобная постановка задачи гарантирует существование решения для широкого класса неограниченных областей. Подобная постановка рассматривалась для моделирования скалярных волновых полей в частотной области, описываемых уравнением Гельмгольца [19],[20].

Введем вспомогательный оператор L_0 , коэффициенты которого зависят только от одной переменной z (глубины):

$$L_0 := i\omega M_0(z) - P\frac{\partial}{\partial x} - Q\frac{\partial}{\partial z}.$$

В элементы матрицы $M_0(z)$ вводится комплексный множитель. Физически это соответствует введению эффекта затухания в процесс распространения упругих волн:

$$M_0(z) = \begin{pmatrix} \rho_0(z) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_0(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 + i\beta)a_0(z) & -(1 + i\beta)b_0(z) & 0 \\ 0 & 0 & -(1 + i\beta)b_0(z) & (1 + i\beta)a_0(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1 + i\beta)c_0(z) \end{pmatrix}.$$

Функции $a_0(z)$, $b_0(z)$, $c_0(z)$ и параметр затухания $0 \leq \beta \leq 1$ выбираются специальным образом, о котором будет упомянуто ниже. Введение комплексного параметра β гарантирует однозначную обратимость оператора L_0 . Также он играет важную роль в улучшении сходимости итерационных методов крыловского типа применительно к предобусловленной системе. Кроме того, как далее будет видно, при численном решении задачи неявно будут использоваться периодические граничные условия по латеральной переменной x , связанные с использованием быстрого преобразования Фурье. Введение комплексного затухания в референтную модель позволяет погасить паразитные вступления приходящие от правых и левых краев расчетной области.

Оператор L_0^{-1} будет использоваться как правый предобуславливатель для исходной системы (3):

$$LL_0^{-1}\langle \vec{s} \rangle = f, \quad \vec{v} = L_0^{-1}\langle \vec{s} \rangle. \quad (4)$$

Представим исходный оператор L как возмущение вспомогательного оператора L_0 :

$$L = L_0 - \delta L = \left[i\omega M_0(z) - P \frac{\partial}{\partial x} - Q \frac{\partial}{\partial z} \right] - i\omega [M_0(z) - M(x, z)].$$

Подстановка этого выражения в уравнение (4) дает:

$$(I - \delta LL_0^{-1})\vec{s} = \vec{f}, \quad \vec{v} = L_0^{-1}\langle \vec{s} \rangle, \quad (5)$$

где I означает единичный оператор.

Мы предполагаем, что вычислительная область вложена в бесконечное пространство с одномерными (комплексными) референтными параметрами, таким образом, что $\delta L = 0$ вне целевой области. Чтобы избежать искусственных отражений на границах расчетной области, необходимо окружить ее переходным слоем, в котором происходит плавный переход от реальной 2D неоднородной среды к референтной вертикально-неоднородной модели с затуханием. Ширина этого слоя не превышает одной длины волны. Детальное описание этого аспекта приводится в [19],[20],[21].

Система уравнений (5) теперь определена во всем пространстве, но должна решаться только в пределах целевой области плюс переходный слой.

Отметим, что компоненты скоростей смещений и напряжений имеют различную физическую размерность и соответственно разный порядок величин. Этот факт необходимо учитывать при решении задачи итерационными методами. Для этого производится обезразмеривание задачи путем замены переменных:

$$\tilde{u}_j \rightarrow \Omega u_j, \quad \tilde{\sigma}_j \rightarrow \Omega^{-1} \sigma_j, \quad \Omega \sim 10^4,$$

где величина Ω определяется из типичных порядков значений скоростей смещений и напряжений для решаемой задачи. Вследствие симметрии системы (2) это изменение немного модифицирует полученные соотношения: необходимо умножить соответствующие компоненты матриц M , M_0 и правой части на Ω^2 или Ω^{-2} .

3 Численное решение

Дискретизация уравнений динамической теории упругости при моделировании процессов распространения упругих волн в неограниченном пространстве в частотной области приводит к СЛАУ с большими, разреженными, несимметричными матрицами. На практике моделирование происходит в ограниченной расчетной области, что приводит к необходимости введения неотражающих (поглощающих) граничных условий на границах области, что и приводит к появлению несимметричных матриц. Большая размерность получаемых матриц становится проблемой только в трехмерном случае. В настоящее время разработан целый ряд итерационных методов крыловского типа подходящих для решения таких задач [34],[7]. Среди наиболее употребляемых можно упомянуть такие методы, как GMRES, BiCGStab, CGS и др. Для решения СЛАУ очень больших размерностей (возникающих, например, при моделировании упругих волновых полей в 3D) чаще всего используется метод BiCGStab [35]. Такой выбор прежде всего объясняется его умеренными требованиями к объему оперативной памяти. Каждая итерация BiCGStab состоит из двух операций умножения матрицы СЛАУ на вектор, при этом требуется оперативная память, необходимая для хранения всего 7 векторов. В [36] предложен весьма эффективный итерационный крыловский метод IDR(s) (Induced Dimension Reduction), где параметр s задает размерность вспомогательного подпространства, которое используется для получения решения (это определяет параметр s). Как показывает практика [36], зачастую он показывает более быструю сходимость, чем BiCGStab, правда при более высоких затратах оперативной памяти. В самой экономичной (по памяти) форме, IDR(1), он оказывается математически эквивалентен методу BiCGStab. Результаты численных экспериментов, представленные в данной работе, получены с использованием IDR(4). В силу того, что здесь рассматривается 2D постановка, имеется возможность увеличить требование к оперативной памяти. Выбор IDR связан с возможностью сравнить его эффективность со стандартным в данного рода задачах BiCGStab, тем более, что задав в IDR(s) параметр $s=1$, можно получить его эквивалент. Выбор IDR(4) представляется как некоторый компромисс: такой выбор не критично (даже в случае применения к 3D задачам) увеличивает затраты оперативной памяти, с другой стороны, увеличение размерности s улучшает монотонность сходимости, как показано в ([36]).

При решении систем линейных уравнений итерационными методами крыловского типа зачастую можно обойтись без задания матрицы в явном виде. В этом случае необходимо реализовать оператор умножения матрицы системы на вектор $\vec{v}_{in}(\vec{x})$, который предоставляется решателем на текущей итерации, т.е. иными словами, обеспечить расчет выходного вектора, возвращаемого в “решатель”, по предоставленному “решателем” входному вектору (далее назовем эту операцию matvec). Именно эта операция является наиболее вычислительно затратной, количество этих операций и их вычислительная стоимость будет определять в конечном итоге общее время расчета. В данном случае линейная система задается выражением (5). На Рис.1. приводится общая схема решения. Операцию действия оператора этой системы на вектор можно разделить на два этапа.

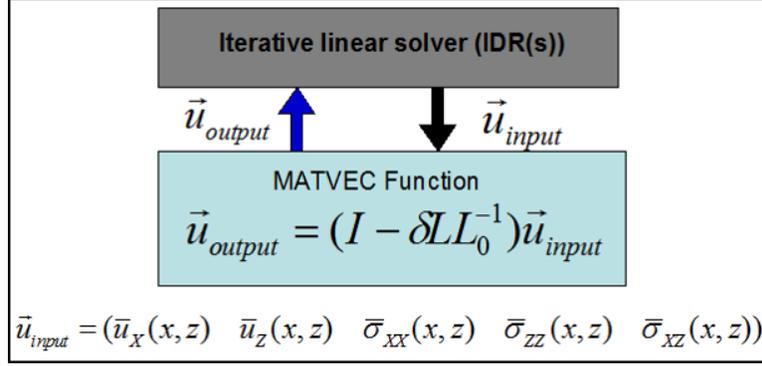


Рис. 1. Общая схема численного решения задачи (5) без явного хранения матрицы.

3.1. Действие оператора L_0^{-1} . Первым шагом действия системы (5) на произвольный вектор \vec{v}_{in} является вычисление промежуточного вектора $\vec{v}_{tmp} = L_0^{-1} \langle \vec{v}_{in} \rangle$. Это означает, что необходимо решить задачу:

$$L_0 \langle \vec{v}_{tmp} \rangle = \vec{v}_{in} \quad (6)$$

т.е. вычислить упругое волновое поле в референтной вертикально-неоднородной среде с источником общего вида $\vec{v}_{in}(x, z)$.

Вектор \vec{v}_{in} состоит из $5N_x N_z$ элементов, которые условно можно представить в виде $\vec{v}_{in} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^T$. Первые $N_x N_z$ элементов (где N_x, N_z количество точек сетки в каждом направлении) f_1 соответствуют горизонтальной компоненте скорости смещений u_x , следующие $N_x N_z$ элементов f_2 соответствуют вертикальной компоненте скорости смещений u_z , далее последовательно расположены компоненты напряжений $\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}$ (f_3, f_4, f_5 соответственно).

После выполнения преобразования Фурье по латеральной переменной x задача сводится к решению набора систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), каждая из которых соответствует определённой пространственной частоте k_x .

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_{xz}}{dz} - i\omega \cdot \rho_0(z) \cdot u_x + ik_x \cdot \sigma_{xx} = f_1(z, k_x; \omega), \\ \frac{d\sigma_{zz}}{dz} - i\omega \cdot \rho_0(z) \cdot u_z + ik_x \cdot \sigma_{xz} = f_2(z, k_x; \omega), \\ i\omega \cdot a_0(z) \cdot \sigma_{xx} - i\omega \cdot b_0(z) \cdot \sigma_{zz} - ik_x u_x = f_3(z, k_x; \omega), \\ \frac{du_z}{dz} + i\omega \cdot b_0(z) \cdot \sigma_{xx} - i\omega \cdot a_0(z) \cdot \sigma_{zz} = f_4(z, k_x; \omega), \\ \frac{du_x}{dz} - i\omega \cdot c_0(z) \cdot \sigma_{xz} + ik_x u_z = f_5(z, k_x; \omega). \end{cases} \quad (7)$$

Предполагается, что на боковых границах области (при $x = 0$ и $x = L$) ставятся периодические граничные условия (что подразумевается тем фактом, что при вычислении используется ДПФ), на вертикальных границах (при $z = 0$ и $z = H$), как будет показано ниже, ставятся явные условия прохождения.

Как можно заметить, третье уравнение в системе (7) не содержит производных по z , поэтому из него можно выразить σ_{xx} и подставить полученное выражение в первое и четвертое уравнения. В результате получаем модифицированную систему ОДУ размерностью 4×4 :

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{zz} \\ u_z \\ u_x \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k_x b_0(z)}{\omega a_0(z)} & 0 & \left(\rho_0(z) - \frac{k_x^2}{\omega^2} \frac{1}{a_0(z)}\right) \\ -\frac{k_x}{\omega} & 0 & \rho_0(z) & 0 \\ 0 & \left(a_0(z) - \frac{b_0^2(z)}{a_0(z)}\right) & 0 & -\frac{k_x b_0(z)}{\omega a_0(z)} \\ c_0(z) & 0 & -\frac{k_x}{\omega} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{zz} \\ u_z \\ u_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \\ \tilde{f}_4 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Вектор в правой части преобразованной системы выражается через входной вектор \vec{v}_{in} следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 &= -f_1 - \frac{k_x}{\omega a_0(z)} f_3, \\ \tilde{f}_2 &= -f_2, \\ \tilde{f}_3 &= -f_4 - \frac{b_0(z)}{a_0(z)} f_3, \\ \tilde{f}_4 &= -f_5. \end{aligned}$$

Решив систему (8), компонента σ_{xx} вычисляется для текущей пространственной частоты k_x по формуле:

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{i\omega a_0(z)} (f_3 + i\omega b_0(z) \cdot \sigma_{zz} + ik_x u_x).$$

Будем решать системы ОДУ (8) с использованием метода отражений. При этом вертикально-неоднородная референтная модель, рассматривается как кусочно-постоянная функция, которая состоит из N_z слоев с постоянными упругими параметрами. Пусть j -слой расположен в интервале $[z_j, z_{j+1}]$, $j = 0, \dots, N_z - 1$.

Согласно методу отражений в каждом однородном интервале решение представляется в виде суперпозиции восходящих и нисходящих Р- и S-волн. Общее решение системы ОДУ находится из условия непрерывности на границах интервалов.

Заметим, что количество кусочно-постоянных интервалов зависит от выбора референтной модели и может не совпадать с количеством узлов сетки по направлению z , на которой необходимо построить решение (количество интервалов может быть значительно меньше).

Итак, в каждом интервале $[z_j, z_{j+1}]$ рассматривается неоднородная система ОДУ:

$$\frac{d}{dz} \vec{v}_j(z) = \mathbf{K} \vec{v}_j(z) + \vec{f}_j(z), \quad (9)$$

где $\vec{f}_j(z)$ - фрагмент вектора правой части $\vec{f}(z)$, попадающий в соответствующий интервал. Вид матрицы \mathbf{K} задан в уравнении (8), с элементами $k_{ij} = \text{const}$.

Решение системы (9) представляется в виде суммы:

$$\vec{v}_j(z) = \Phi_j(z) \vec{C}_j + \vec{P}_j(z). \quad (10)$$

Первое слагаемое - общее решение однородной системы ОДУ; второе слагаемое - частное решение неоднородной системы; $\vec{C}_j = (C_{j1}, C_{j2}, C_{j3}, C_{j4})^T$ - вектор констант, которые предстоит определить из условия непрерывности; Φ_j - фундаментальная матрица системы ОДУ (9), размерностью 4×4 :

$$\Phi_j(z) = (\vec{u}_1 \exp(\lambda_1 z), \vec{u}_2 \exp(\lambda_2 z), \vec{u}_3 \exp(\lambda_3 z), \vec{u}_4 \exp(\lambda_4 z)), \quad (11)$$

где \vec{u}_i , λ_i - собственные векторы и собственные значения матрицы \mathbf{K} . Выражения для собственных значений и собственных векторов определяются в явном виде через элементы k_{ij} матрицы (8). Так, собственные значения имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{B + 2\sqrt{D}} \\ -\frac{1}{2} \sqrt{B + 2\sqrt{D}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{B - 2\sqrt{D}} \\ -\frac{1}{2} \sqrt{B - 2\sqrt{D}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
D = & k_{32}^2 k_{23}^2 + 4k_{23}k_{32}k_{21}k_{12} - \\
& 2k_{41}k_{32}k_{14}k_{23} + 4k_{21}k_{12}k_{41}k_{14} + \\
& k_{14}^2 k_{41}^2 + 4k_{32}k_{14}k_{21}^2 + \\
& 4k_{41}k_{12}k_{23}k_{12}^2,
\end{aligned}$$

$$B = 2k_{32}k_{23} + 4k_{21}k_{12} + 2k_{41}k_{14}.$$

Собственные значения соответствующие восходящим или нисходящим Р- или S- волнам: $\lambda_1 = -\lambda_2$, $\lambda_3 = -\lambda_4$. Обозначим $\lambda_p := \lambda_1$, $\lambda_s := \lambda_3$ - собственные значения, соответствующие Р- и S- волнам соответственно.

Метод вариации постоянных дает общее выражение для частного решения неоднородной системы:

$$\vec{P}_j(z) = \Phi_j(z) \int_{z_j}^z \Phi_j^{-1}(\xi) \vec{f}_j(\xi) d\xi, \quad (12)$$

где $\Phi_j^{-1}(z)$ имеет явное выражение. В зависимости от того, как выглядит вектор правой части \vec{f}_j можно рассмотреть два случая для вычисления $\vec{P}_j(z)$.

1) Вектор правой части $\vec{f}_j(z)$ содержит только один отсчет. Такая ситуация встречается при первом вызове функции умножения матрицы на вектор, т.е. когда вычисляется действие оператора L_0^{-1} непосредственно на правую часть исходной системы (5) (на функцию источника, описывающую сосредоточенную силу). В этом случае \vec{f}_j равен нулю везде, кроме интервала с индексом J_s , содержащего источник. В этом интервале вспомогательная задача (9) принимает вид:

$$\frac{d}{dz} \vec{v}_j(z) = \mathbf{K} \vec{v}_j(z) + \vec{f}_j \delta(z - z_s), \quad j = J_s. \quad (13)$$

В этом случае выражение

$$\vec{P}_j(z) = \Phi_j(z) \Phi_j^{-1}(z_s) \vec{f}_j \quad (14)$$

является частным решением неоднородной системы (13).

2) При последующих вызовах функции умножения матрицы на вектор правая часть $\vec{f}_j(z)$ рассматривается как кусочно-постоянная функция в каждом интервале $[z_j, z_{j+1}]$. В этом случае частное решение неоднородной системы можно вычислить численным интегрированием выражения (12).

Для построения решения системы (8) необходимо вычислить значения коэффициентов \vec{C}_j в каждом интервале. Воспользуемся условиями непрерывности решения на границе двух интервалов, лежащих внутри расчетной области (условия на границах расчетной области будут описаны ниже):

$$\vec{v}_j(z_{j+1} - 0) = \vec{v}_{j+1}(z_{j+1} + 0), \quad 0 < j \leq N_z - 1,$$

где N_z количество интервалов. В итоге возникает система линейных уравнений относительно неизвестных констант \vec{C}_j :

$$\Phi_j(z_{j+1})\vec{C}_j - \Phi_{j+1}(z_{j+1})\vec{C}_{j+1} = \vec{P}_{j+1}(z_{j+1}) - \vec{P}_j(z_{j+1}), \quad 0 < j \leq N_z - 1. \quad (15)$$

Напомним, что $\Phi_j(z)$ и $\vec{P}_j(z)$ определяются на интервале $[z_j, z_{j+1}]$ в то время как $\Phi_{j+1}(z)$ и $\vec{P}_{j+1}(z)$ определяются на интервале $[z_{j+1}, z_{j+2}]$. Обозначим через $\Phi_j(-)$, $\Phi_j(+)$ значения фундаментальной матрицы $\Phi_j(z)$, вычисленные на концах соответствующего интервала z_j и z_{j+1} . В интервалах, лежащих у границ расчетной области $z = 0$ и $z = H$ необходимо исключить моды, приходящие из бесконечности:

$$\vec{C}_0 = (0, C_{02}, 0, C_{04}) \quad \text{и} \quad \vec{C}_{N_z} = (C_{N_z1}, 0, C_{N_z3}, 0)^T.$$

Система линейных уравнений на коэффициенты \vec{C}_j имеет блочно-двухдиагональный вид:

$$\begin{pmatrix} \Phi_0(+) & -\Phi_1(-) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Phi_1(+)& -\Phi_2(-) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \Phi_{N-3}(+) & -\Phi_{N-2}(-) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \Phi_{N-2}(+) & -\Phi_{N-1}(-) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{C}_0 \\ \vec{C}_1 \\ \vdots \\ \vec{C}_{N-2} \\ \vec{C}_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{q}_0 \\ \vec{q}_1 \\ \vdots \\ \vec{q}_{N-2} \\ \vec{q}_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где через \vec{q}_j обозначены правые части уравнений (15); $\Phi_i(-)$, $\Phi_i(+)$ ($i = 1, \dots, N-2$) - матрицы 4×4 , а $\Phi_0(+)$ и $\Phi_{N-1}(-)$ - матрицы 4×2 (фундаментальные матрицы с удалёнными 1-м и 3-м столбцами в Φ_0 или 2-м и 4-м столбцами в Φ_{N-1}). Размерность матрицы равна $4(N_z - 1) \times 4(N_z - 1)$, с числом ненулевых элементов равным $16(2N_z - 3)$. Система линейных уравнений такого вида может быть эффективно решена с использованием современных библиотек линейной алгебры, таких как, например в нашем случае, PARDISO ([37]). Отметим, что матрицы (16) не меняются от итерации к итерации, меняются только соответствующие правые части. Решение системы (8) находится подстановкой вычисленных коэффициентов \vec{C}_j в выражение (10) с последующим расчётом соответствующих значений на заданной сетке вдоль оси z .

Окончательное значение промежуточного вектора \vec{v}_{tmp} находится после обратного ДПФ по пространственным частотам k_x .

3.2. Действие оператора δL . Оператор δL задаётся матрицей следующего вида:

$$\delta L(x, z) = i\omega \begin{pmatrix} \delta\rho(x, z) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta\rho(x, z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta a(x, z) & -\delta b(x, z) & 0 \\ 0 & 0 & -\delta b(x, z) & \delta a(x, z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta c(x, z) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где $\delta\rho = \rho_0(z) - \rho(x, z)$, $\delta a = a_0(z) - a(x, z)$, и $\delta b = b_0(z) - b(x, z)$.

В результате умножения вспомогательного вектора \vec{v}_{tmp} на оператор δL получим:

$$\delta L \cdot \vec{v}_{tmp} = i\omega \begin{cases} \delta p \cdot f_1, \\ \delta p \cdot f_2, \\ \delta a \cdot f_3 - \delta b \cdot f_4, \\ -\delta b \cdot f_3 + \delta a \cdot f_4, \\ \delta c \cdot f_5. \end{cases} \quad (18)$$

Здесь через f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 обозначены соответствующие компоненты входного вектора \vec{v}_{tmp} . Отметим, что оператор δL вычисляется заранее и не меняется в ходе итераций. Окончательное выражение для выходного вектора после выполнения операции действия матрицы на вектор имеет вид:

$$\vec{v}_{output} = \vec{v}_{in} - \delta L \cdot \vec{v}_{tmp}. \quad (19)$$

3.3. Разложение волновых полей на компоненты. Интересной особенностью предложенного подхода является возможность полного разделения волнового поля на компоненты: возможно получать одновременно разделенные поля Р- и S-волн, их нисходящие и/или восходящие составляющие.

Рассмотрим действие оператора $L_0 < \vec{f} >$ когда отсутствует комплексное затухание ($\beta = 0$), а \vec{f} , например, задается как источник типа сосредоточенной силы. В этом случае соответствующее волновое поле вычисляется сразу после решения набора систем ОДУ (9) и обратного ДПФ. Пусть после решения СЛАУ (16) получен набор коэффициентов \vec{C}_j . Если на этапе восстановления решения в (10) в векторах \vec{C}_j занулить некоторую компоненту, это будет означать что в итоговом волновом поле будет подавлена составляющая, соответствующая этому собственному числу. Например, для того, чтобы в итоговом волновом поле, распространяющемся в вертикально-неоднородной среде, полностью убрать все компоненты Р- волны, достаточно положить $\vec{C}_j = (0, 0, C_{j3}, C_{j4})$. Если необходимо подавить все восходящие волны, а оставить все нисходящие, то $\vec{C}_j = (C_{j1}, 0, C_{j3}, 0)$.

В более общем случае, когда рассматриваются модели с умеренными латеральными вариациями упругих параметров разделение волновых

полей производится следующим образом. Пусть итерационный процесс для предобусловленной системы $(I - \delta L L_0^{-1})\vec{s} = \vec{f}$ сошелся с заданной точностью. При этом на каждой итерации строилось решение (10) соответствующее полному волновому полю. Разделение волновых полей по описаной выше схеме происходит на этапе выхода из предобуславливания: $\vec{v} = L_0^{-1}\langle\vec{s}\rangle$. Зануление коэффициентов для необходимых собственных чисел происходит именно на этом, финальном этапе, оставляя таким образом только нужные моды в выходном волновом поле.

В разделе, где описываются численные эксперименты, мы приводим пример распространения только S-волн в двухслойной модели от точечного источника типа вертикальной силы (см. Рис.4 С,D, Рис.5).

4 Численные эксперименты

4.1. Двухслойная модель. В первом численном эксперименте мы представляем результаты расчета упругих волновых полей с помощью предложенного итерационного решателя для простейшей двухслойной модели, представленной на Рис.2 (параметры V_p , V_s , ρ указаны на рисунке). Отметим, что по самому построению предложенный подход очень быстро сходится для моделей близких к вертикально-неоднородным. В данном примере итерации требуются только для учета влияния комплексных коэффициентов в предобуславливателе (если $\beta = 0$, то итерации не требуются, т.к. решение находится сразу). Источник задается как сосредоточенная вертикальная сила с формой импульса в виде импульса Рикера с доминирующей частотой 20 Гц. Вычисления проводились последовательно для 470 временных частот, равномерно распределённых в интервале от 0.1 Гц до 70 Гц. Параметры дискретизации модели: число точек по обоим направлениям составляет $N_x = 1100$, $N_z = 601$, шаг дискретизации по пространству $h_x = 7.5$ м., $h_z = 7.5$ м. Это даёт отношение минимальной длины волны к шагу дискретизации модели $\frac{\lambda_{min}}{h} \sim 2$. Такой большой шаг по пространству выбран исходя из максимально возможной дискретизации (согласно теореме Котельникова-Найквиста) для демонстрации идеальных дисперсионных свойств подхода. Референтная 1D модель состоит из двух слоев, которые совпадают с исходной моделью как по положению границы раздела слоев, так и значениями скоростей и плотности. Параметр затухания выбран равным $\beta = 0.1$. Критерием остановки итерационного процесса служило достижение значения невязки $tol = 10^{-6}$. Такое значение tol выбрано в методических целях, для более корректного сравнения решения, полученного итерационным решателем с эталонным. На практике вполне достаточно иметь $tol = 10^{-3}$ [21]. Для достижения сходимости на всех рассматриваемых частотах достаточно 2-3 итерации.

Волновое поле, рассчитанное в частотной области для указанного выше набора частот было преобразовано во временную область с помощью обратного ДПФ. Полученные моментальные снимки волнового поля для

моментов времени $T = 1.8$ сек., $T = 2.2$ сек представлены на Рис.3 (горизонтальные и вертикальные компоненты скоростей смещения). Сразу можно отметить, что несмотря на весьма крупный шаг дискретизации по пространству, волновые поля не имеют признаков численной дисперсии. Также отсутствуют искусственные отражения от границ вычислительной области. Отметим, что фактически по переменной x используется псевдоспектральный метод, а по переменной z - метод отражений, который вообще не требует аппроксимации производных.

Волновые поля во временной области сравнивались с решением, которое дает программная реализация явного конечно-разностного метода на сдвинутых сетках с поглощающими граничными условиями (PML). Сравнение показало, что погрешность решения не превосходит 1 процента. Для расчета волновых полей во временной области шаг пространственной дискретизации модели составлял 2.5 м. Отметим, что выбор равного шага дискретизации по x, z во всех приводимых примерах связан только с удобством сравнения со стандартным решением, полученным конечно-разностным методом во временной области.

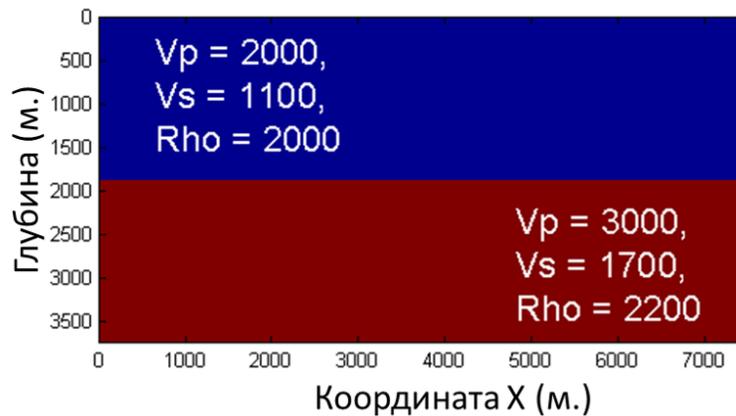


Рис. 2. Двухслойная модель.

Как уже упоминалось выше, при расчете упругих волновых полей с помощью предложенного подхода, существует возможность их разделения на компоненты: P-, S-, восходящие, нисходящие. На примере двухслойной модели покажем распространение восходящих/нисходящих компонент S-волны. Как и в предыдущем примере здесь мы также используем источник типа вертикальной силы, который генерирует как продольную, так и поперечную волны. Восходящие и нисходящие P-волны удаляются из полного решения на этапе реконструкции решения в выходном действии предобуславливателя. На Рис.4А,В для сравнения представлены моментальные снимки полных волновых полей (X и Z компонента скоростей смещений) в момент времени $T = 1$ сек. Фронты

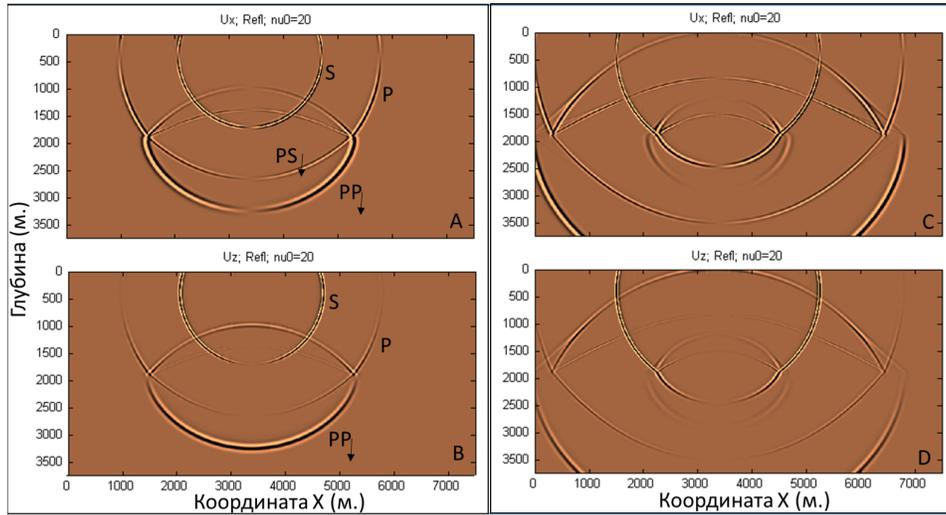


Рис. 3. Моментальные снимки волновых полей в двух-слойной модели с Рис.2. На Рис.3 А,В представлено полное волновое поле (X и Z компонента скоростей смещений) в момент времени $T = 1.8$ сек.; Рис.3 С,Д - полное волновое поле (X и Z компонента) в момент времени $T = 2.2$ сек. Источник типа вертикальной силы.

идущих от источника прямых P - и S - волн обозначены на рисунке буквами P и S . Прямая P -волна уже достигла границы раздела двух слоев, при этом возникли проходящая и отраженная PP -волны (особенно хорошо различимы на вертикальной компоненте Рис.4В). На Рис.4С,Д в тот же момент времени видна только идущая от источника прямая S -волна. На Рис.5 показано распространение только S -волн в моменты времени $T = 1.4$ сек. и $T = 1.8$ сек. Так, на Рис.5А,В помимо прямой S -волны появляются также восходящие и нисходящие обменные PS -волны, порожденные падающей на границу P -волной. На Рис.5С,Д возникает отраженная SS -волна, порожденная на границе падающей прямой S -волной (этот рисунок можно сравнить с соответствующим полным полем, представленным на Рис.3А,В).

4.2. Реалистичная модель среды. Приведем пример расчета упругих волновых полей предложенным выше методом в реалистичной модели геологической среды (Рис.6).

Для моделирования использовался точечный источник типа вертикальной силы. Форма импульса задавалась в виде импульса Рикера с доминирующей частотой 25 Гц. Вычисления проводились последовательно для набора из 400 временных частот, равномерно распределённых в интервале $[0.1 : 60]$ Гц. Модель задавалась на равномерной сетке с количеством точек в зависимости от направления $N_x = 1100$, $N_z = 661$ и шагом

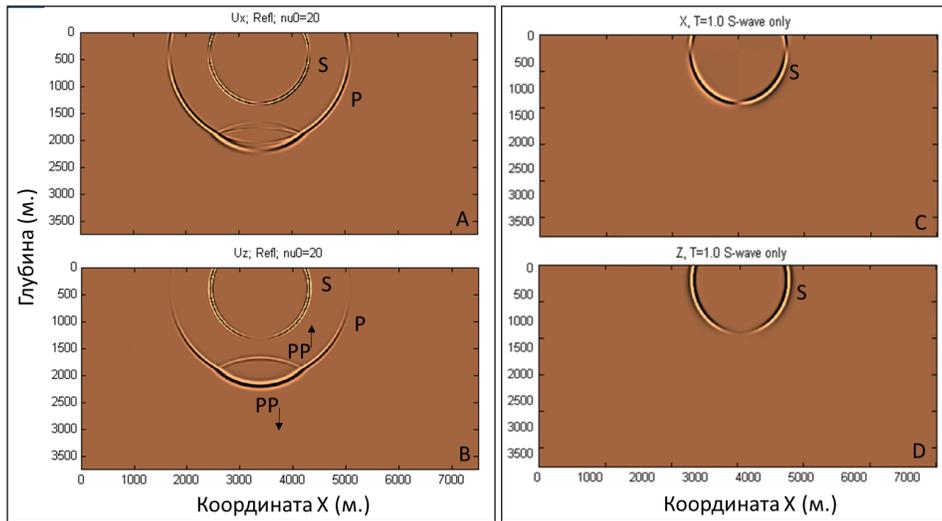


Рис. 4. Моментальные снимки волновых полей в двух-слойной модели с Рис.2. На Рис.4 А,В для сравнения представлено полное волновое поле (X и Z компонента скорости смещений) в момент времени $T = 1$ сек.; Рис.4 С, D в тот же момент времени остается только S-волна (X и Z компонента). Источник типа вертикальной силы.

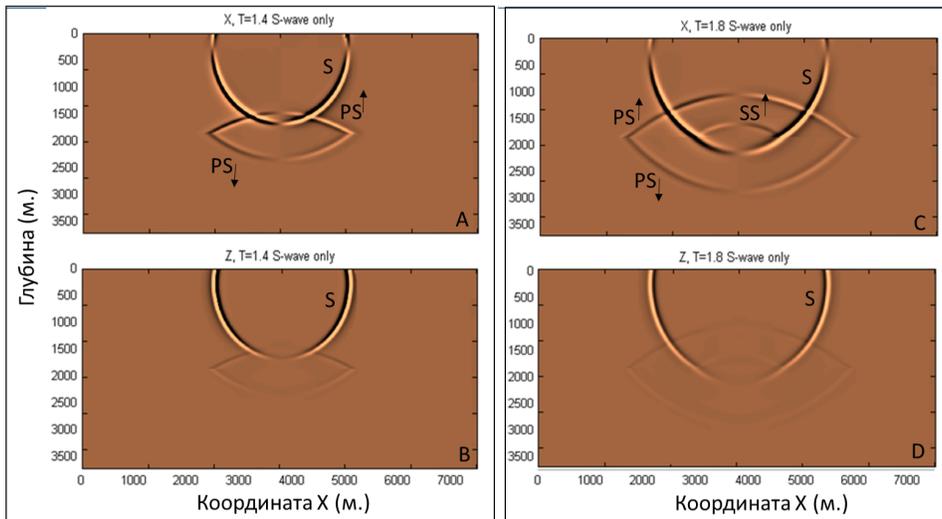


Рис. 5. Моментальные снимки волновых полей в двух-слойной модели с Рис.2, демонстрирующие распространение только S-волны для двух моментов времени. Рис.5 А,В соответствуют моменту времени $T = 1.4$ сек.; Рис.5 С, D моменту времени $T = 1.8$ сек. Показаны X и Z компоненты скорости смещений.

дискретизации $h_x = h_z = 5$ м. Такая дискретизация дает отношение минимальной длины волны к шагу дискретизации $\frac{\lambda_{min}}{h} \sim 3.5$. Параметр затухания был выбран равным $\beta = 0.5$. Минимальное значение невязки в итерационном решателе было задано как $tol = 10^{-5}$. В качестве референтной модели выбран одномерный профиль (столбец) при $X = 4500$ м. Одномерные профили скоростей и плотности были пересчитаны таким образом чтобы сформировать 66 кусочно-постоянных интервалов, расположенных с шагом 50 м.

На Рис.7А представлен пример рассчитанного волнового поля (u_z) в частотной области на частоте 25 Гц. На Рис.7В приведен график зависимости количества вызовов функции умножения матрицы на вектор (matvec) от частоты (каждая итерация IDR(4) требует четыре вызова функции matvec). Так, к примеру, для расчета волнового поля с Рис.7А с заданной точностью потребовалось 21 итерация IDR(4), это означает, что всего было сделано 84 вызова функции matvec.

Волновые поля, рассчитанные в частотной области, были преобразованы во временную область с помощью ДПФ. На Рис.8 показаны моментальные снимки волновых полей для моментов времени $T = 2$, $T = 2.4$ сек. Можно отметить корректное распространение упругого волнового поля в неоднородной среде от источника типа вертикальной силы. При этом полностью отсутствует численная дисперсия, а также наблюдается идеальное поглощение волн на верхней и нижней границах целевой области. Сравнение с решением, полученным во временной области при использовании явного конечно-разностного метода на сдвинутых сетках с RML дает максимальную погрешность решения порядка 2.5 процентов.

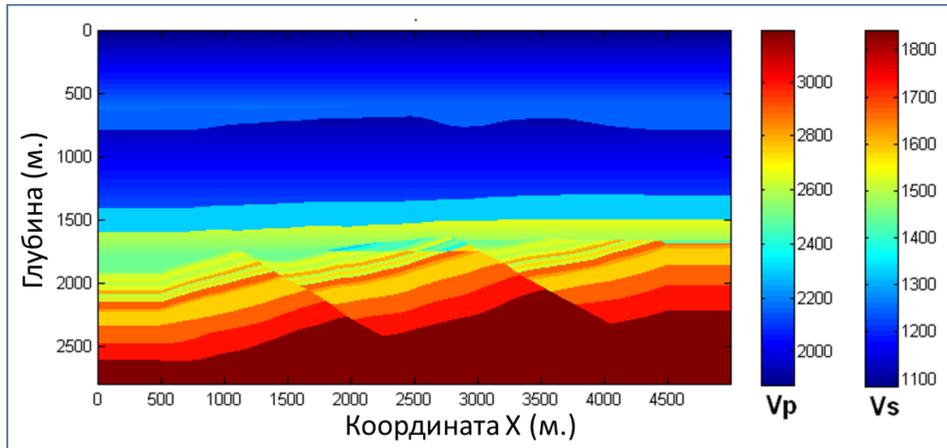


Рис. 6. Реалистичная модель геологической среды.

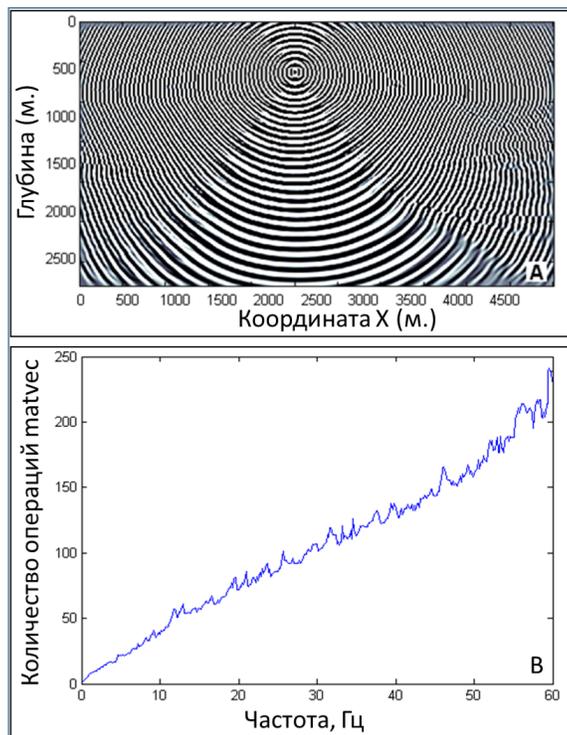


Рис. 7. А: Вертикальная компонента скоростей смещения на частоте 25 Гц (реальная часть); В: Зависимость количества операций действия матрицы на вектор от частоты.

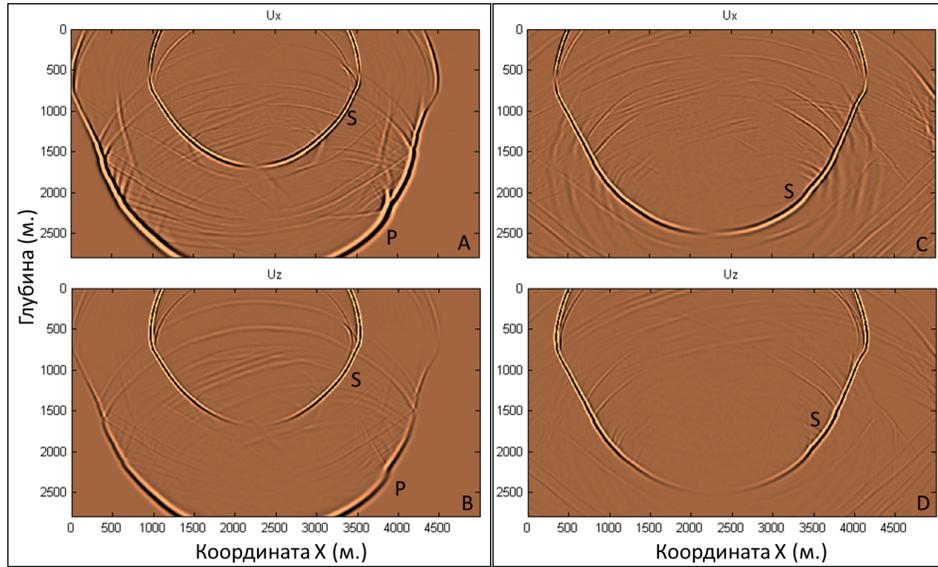


Рис. 8. Моментальные снимки волновых полей в модели с Рис.6 рассчитанные в частотной области и преобразованные во временную область. На Рис.8 А,В представлено полное волновое поле (X и Z компонента скоростей смещений) в момент времени $T = 2$ сек.; Рис.8 С,Д - полное волновое поле (X и Z компонента) в момент времени $T = 2.4$ сек. Источник типа вертикальной силы.

5 Заключение

В представленной работе рассмотрен итерационный метод решения системы динамической теории упругости в частотной области, предназначенный для моделирования упругих волновых полей в задачах сейсморазведки. Он основан на итерационном решателе крыловского типа с правым предобуславливателем. Операция действия матрицы на вектор для предобусловленной системы в итоге сводится к расчету волнового поля в вертикально-неоднородной модели среды для источника общего вида, которое выполняется методом отражений. При расчете упругих волновых полей с помощью предложенного подхода, существует возможность их разделения на компоненты P-, S- волны, восходящие, нисходящие моды, что может быть весьма полезно в задачах обращения волновых полей. По своему построению метод быстро сходится для моделей с умеренными латеральными вариациями упругих параметров. В дальнейшем предполагается реализация этого подхода в 3D и апробация разделения волновых полей на компоненты для более сложных моделей.

References

- [1] R. Pratt *Seismic waveform inversion in the frequency domain, part 1: Theory, and verification in a physical scale model*, Geophysics, 64 (1999), pp. 888-901.
- [2] J. Virieux, S. Operto *An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics*, Geophysics, 74 (6) (2009), WCC1-WCC26.
- [3] J. Virieux, A. Asnaashari, R. Brossier, L. Metivier, A. Ribodetti, W. Zhou *An introduction to Full Waveform Inversion*. In Grechka, V. and Wapenaar, K., editors, Encyclopedia of Exploration Geophysics, (2017) R1-R140. Society of Exploration Geophysics.
- [4] S. Operto, J. Virieux, P. Amestoy, J. L'Excellent, L. Giraud, H. Hadj, *3D finite-difference frequency-domain modeling of visco-acoustic wave propagation using a massively parallel direct solver: A feasibility study*, Geophysics, 72(5), (2007), SM195–SM211.
- [5] Wang, S., M. V. de Hoop, J. Xia, and X. S. Li, *Massively parallel structured multifrontal solver for time-harmonic elastic waves in 3-D anisotropic media*, Geophysical Journal International, 191, (2012), 346–366.
- [6] V. Kostin, S. Solov'yev, A. Bakulin, M. Dmitriev *"Direct frequency-domain 3D acoustic solver with intermediate data compression benchmarked against time-domain modeling for full-waveform inversion applications*, Geophys. 84(4), (2019), T207-T219.
- [7] Y. Saad *Iterative methods for sparse linear systems*, 2nd ed. (2003), SIAM.
- [8] Y. A. Erlangga, C. Vuik, C. W. Oosterlee, *On a Class of Preconditioners for Solving the Helmholtz Equation*, Appl. Numer. Math. 50 (3–4), (2004), 409–425.
- [9] Y. A. Erlangga, C. W. Oosterlee, C. Vuik *A Novel Multigrid Based Preconditioner for Heterogeneous Helmholtz Problems*, SIAM J. Sci. Comput. 27(4), (2006), 1471–1492.
- [10] C. D. Riyanti, Y. A. Erlangga, R.-E. Plessix *"A New Iterative Solver for the Time-Harmonic Wave Equation*, Geophys. 71 (5), (2006), E57–E63.
- [11] H. Calandra, S. Gratton, X. Pinel, X. Vasseur *"An Improved Two-Grid Preconditioner for the Solution of Three-Dimensional Helmholtz Problems in Heterogeneous Media*, Numer. Linear Algebra Appl. 20(4), (2013), 663–688.

- [12] A. Abubakar and T. M. Habashy “*Three-Dimensional Visco-Acoustic Modeling Using a Renormalized Integral Equation Iterative Solver*, J. Comput. Phys. 249, (2013), 1–12.
- [13] W. Xu, Y. Zhong, B. Wu, J. Gao, Q. H. Liu *Adaptive complex frequency with V-cycle GMRES for preconditioning 3D Helmholtz equation*, Geophys., 86(5), (2021), T349–T359.
- [14] E. Treister, R. Yovel *A hybrid shifted Laplacian multigrid and domain decomposition preconditioner for the elastic Helmholtz equations*, J. Comput. Phys., 497, (2024), 112622.
- [15] N. Kamath, R. Brossier, L. Métivier, A. Pladys, P. Yang, *Multiparameter full-waveform inversion of 3D ocean-bottom cable data from the Valhall field*, Geophysics, 86(1), (2021), B15–B35.
- [16] Y. Li, L. Métivier, R. Brossier, B. Han, J. Virieux *2D and 3D frequency-domain elastic wave modeling in complex media with a parallel iterative solver*, Geophysics, 80(3), (2015), T101–T118.
- [17] G. Rizzuti, W.A. Mulder *Multigrid-based shifted-Laplacian preconditioning for the time-harmonic elastic wave equation*, J. Comput. Phys., 317 (2016), 47–65
- [18] G. Ma, B. Zhou, M. K. Riahi, J. Zemerly, X. Liu *On cost-efficient parallel iterative solvers for 3D frequency-domain seismic multisource viscoelastic anisotropic wave modeling*, Geophysics, 89(4), (2024), T151–T162.
- [19] Neklyudov D., Silvestrov I. and Tcheverda V. *A 3D Helmholtz iterative solver with a semi-analytical preconditioner for acoustic wavefield modeling in seismic exploration problems*, Numerical Methods and Programming, 15(3), (2014), 514–529. (In Russ.).
- [20] M. Belonosov, M. Dmitriev, V. Kostin, D. Neklyudov, V. Tcheverda, *An iterative solver for the 3D Helmholtz equation*, Journal of Computational Physics, 345, (2017), 330–344,
- [21] M. Belonosov, V. Kostin, D. Neklyudov, V. Tcheverda, *3D numerical simulation of elastic waves with a frequency-domain iterative solver*, Geophysics 83(6), (2018), T333–T344.
- [22] Alekseev, A. S., Mikhailenko, B. G., *The solution of Lamb’s problem for a vertically inhomogeneous elastic half-space*, Izv. Akad. Nauk SSR, Fiz. Zemli, 12, (1976), 11–25.
- [23] Alekseev, A. S., Mikhailenko, B. G., *The solution of dynamic problems of elastic wave propagation in inhomogeneous media by a combination of partial separation of variables and finite difference methods*, J. Geophys., 48, (1980), 161–172
- [24] B.L.N. Kennett *Seismic wave propagation in stratified media*, (1983), Cambridge, Cambridge University Press
- [25] M. Korn, G. Müller, *Comparison of the Alekseev-Mikhailenko method and the reflectivity method*, Geophys. J.R. Astron. Soc., 72, **3** (1983), 541–556.
- [26] G. Muller *The reflectivity method: a tutorial*, Journal of Geophysics, 58(1), (1985), 153–174.
- [27] Aki, K., Richards, P.G. *Quantitative seismology-theory and methods, vol. I and II*, Freeman and Co., San Francisco, 1980.
- [28] A.G. Fatianov *Semi-analytical method for solving direct dynamic problems in layered media*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 310, (1990), 323–327. (in Russian).
- [29] A.L. Karchevsky *A numerical solution to a system of elasticity equations for layered anisotropic media*, Russian Geology and Geophysics, 46(3), (2005), 339–351
- [30] P. Routh, A. Ratcliffe, R.-É. Plessix, R. Neelamani *Introduction to this special section: Elastic full-waveform inversion*, The Leading Edge 44 (5), (2025), 336–337.
- [31] V. D. Kupradze *Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity*, In: Progress in Solid Mechanics, Vol. 2, North-Holland Publishing, Amsterdam, 1963.
- [32] D. M. Eidus *The Principle of Limit Absorption*, Mat. Sb. 57 (1), (1962), 13–44.

- [33] B. R. Vainberg *Principles of Radiation, Limit Absorption and Limit Amplitude in the General Theory of Partial Differential Equations*, Usp. Mat. Nauk 21 (3), (1966), 115–194.
- [34] L. Trefethen, D. Bau *Numerical Linear Algebra*, (1997), SIAM.
- [35] H. A. Van der Vorst *Bi-CGStab: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems*, SIAM Journal on Scientific Computing, 13, (1992) 631–644.
- [36] P. Sonneveld, M.B. van Gijzen *IDR(s): A family of simple and fast algorithms for solving large nonsymmetric systems of linear equations*, SIAM Journal Scientific Computing, 31(2), (2008), 1035-1062.
- [37] O. Schenk, K. Gartner *Solving Unsymmetric Sparse Systems of Linear Equations with PARDISO*, Future Gen. Comput. Syst. 20 (3), (2004), 475–487.

DMITRY A. NEKLYUDOV
INSTITUTE OF PETROLEUM GEOLOGY AND GEOPHYSICS,
PR. КОПТЫУГА, 3,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: neklyudovda@ipgg.sbras.ru