S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том ??, № ?, стр. ??–?? (2025) УДК 512.544
https://doi.org/10.33048/semi.2025.20.??? MSC 20E10

L_n-КЛАССЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ КВАЗИМНОГООБРАЗИЕМ 3-СТУПЕННО НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

В.В. Лодейщикова

Представлено П.П. Петровым

Abstract: Let $L_n(\mathcal{N})$ be the class of all groups G in which the normal closure of each n-generated subgroup of G belongs to $\mathcal{N}$. Let $\mathcal{N}$ be the quasivariety of nilpotent groups of class at most 3 without elements of orders 2 and 5 in which the quasi-identity $(\forall x)(\forall y)([x,y,x]=1 \to [x,y,y]=1)$ is true.

In this paper we prove that any group G belonging to the class $L_1(\mathcal{N})$ is 3-Engel. In particular, the result is true for the quasivariety generated by the free 2-generated nilpotent group of class at most 3.
Keywords: group, nilpotent group, quasivariety, Levi class.

1 Введение

Пусть $\mathcal{N}-$ класс групп. Обозначим через $L_n(\mathcal{N})$ класс всех групп G, в которых нормальное замыкание $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^G$ любой n-порожденной подгруппы $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ группы G принадлежит $\mathcal{N}$.

Оператор L_n для каждого натурального числа n был введен в работе [1]. Было показано, что если $\mathcal{N}-$ квазимногообразие групп, то $L_n(\mathcal{N})$

Lodeishchikova, V.V., L_n-classes generated by the quasivariety of nilpotent groups of class at most 3.

Поступила 30 апреля 2025 г., опубликована 31 декабря 2025 г.

также является квазимногообразием групп. При этом возникает цепочка

$$L_1(\mathcal{N}) \supseteq L_2(\mathcal{N}) \supseteq L_3(\mathcal{N}) \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{N},$$

в которой $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} L_n(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$.

В работе [2] найдены условия на $\mathcal{N}$, при выполнении которых последовательность $L_1(\mathcal{N})$, $L_2(\mathcal{N}), \ldots$ содержит бесконечное множество различных квазимногообразий. В [3] доказано, что если G — группа без элементов порядка 2 и нормальное замыкание каждой 2-порожденной подгруппы группы G является нильпотентной группой ступени не более 3, то G — нильпотентная группа ступени не выше 4. Также показано, что в этом утверждении ограничение на элементы второго порядка убрать нельзя.

Изучение классов $L_n(\mathcal{N})$ началось с исследования классов $L(\mathcal{N}) = L_1(\mathcal{N})$, которые называются классами Леви, порожденными $\mathcal{N}$. В работах [4]-[8] исследовались классы Леви, порожденные почти абелевыми квазимногообразиями нильпотентных групп (т. е. неабелевыми квазимногообразиями, все собственные подквазимногообразия которых абелевы). Классы Леви, порожденные 2-ступенно нильпотентными группами изучались также в [9]-[13].

В [14] показано, что класс Леви квазимногообразия правоупорядочиваемых групп строго содержит это квазимногообразие.

Данная работа продолжает исследования L_n-классов.

Всюду в работе $\mathcal{N}$ — квазимногообразие нильпотентных ступени 3 групп без элементов порядков 2 и 5, в которых истинно квазитождество

$$(\forall x)(\forall y)([x, y, x] = 1 \to [x, y, y] = 1). \tag{1}$$

В настоящей работе доказано, что любая группа G, принадлежащая классу $L_1(\mathcal{N})$, является 3-энгелевой. В частности, результат справедлив для квазимногообразия $qF_2(\mathcal{N}_3)$.

2 Предварительные сведения

В работе используются обозначения:
$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$;
$\langle x_1, x_2, \ldots\rangle$ – группа, порожденная элементами $x_1, x_2, \ldots$;
$\langle x\rangle$ – циклическая группа, порожденная элементом x;
$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle^G = \langle x_1^g, \ldots, x_n^g \mid g \in G\rangle$ – нормальное замыкание подгруппы $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ в G;
$q\mathcal{M}$ – квазимногообразие, порожденное множеством групп $\mathcal{M}$;
если $\mathcal{M} = \{G\}$, то вместо $q\mathcal{M}$ будем писать qG;
$F_n(\mathcal{M})$ – свободная группа ранга n в квазимногообразии $\mathcal{M}$;
$\mathcal{N}_c$ – многообразие нильпотентных групп ступени не выше c.

Стандартным образом определяем вес $w(a)$ коммутатора, считая, что

1) $w(x) = 1$, если x – предметная переменная,
2) $w(a) = w(u) + w(v)$, если $a = [u, v]$.

Дадим определение базисных коммутаторов от переменных $x_1, \ldots, x_r$ [15]:

1) $c_i = x_i$, $i = 1, \ldots, r$ — базисные коммутаторы веса 1, $w(x_i) = 1$.
2) Пусть базисные коммутаторы весов, меньших n уже определены. Тогда базисными коммутаторами веса n являются коммутаторы $c_k = [c_i, c_j]$, где
   a) c_i и c_j — базисные коммутаторы и $w(c_i) + w(c_j) = n$;
   b) $c_i > c_j$, а если $c_i = [c_s, c_t]$, то $c_j \leq c_t$.
3) Коммутаторы веса n следуют за коммутаторами весов, меньших n, и между собой они упорядочены произвольным образом. Базисные коммутаторы считаем пронумерованными так, что они упорядочены по индексам.

Согласно [15], если F — свободная группа с порождающими $x_1, \ldots, x_r$, то базисные коммутаторы веса k образуют свободный базис свободной абелевой группы F_k/F_{k+1}, где $F = F_1$, $F_k = [F_{k-1}, F]$ и

$$F = F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_r = 1.$$

Напомним, что группа называется n-энгелевой, если

$$[x, \underbrace{y, \ldots, y}_{n}] = 1$$

для всех $x, y \in G$.

Нам понадобятся следующие хорошо известные тождества, истинные в любой группе:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([xy, z] = [x, z][x, z, y][y, z]),$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x, yz] = [x, z][x, y][x, y, z]),$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1) \text{ (тождество Витта).}$$

Будем говорить, что коммутуторы в произвольной группе G обладают свойством линейности, если для любых элементов $x, y, z \in G$ выполняются равенства

$$[xy, z] = [x, z][y, z], \ [x, yz] = [x, y][x, z].$$

При написании тождеств и квазитождеств кванторы всеобщности иногда будут опускаться.

3 Основные результаты

Предложение 1. *Любая группа G, принадлежащая классу $L(\mathcal{N})$, является 4-энгелевой.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $x \in G$ и

$$\langle x \rangle^G = \langle x^y \mid y \in G \rangle = \langle x, [x, y] \mid y \in G \rangle.$$

По определению класса Леви $\langle x \rangle^G \in \mathcal{N}$. Элементы $x, [y, x] \in \langle x \rangle^G$ и поскольку $\langle x \rangle^G \in \mathcal{N}_3$, то в группе G для произвольных элементов x, y будет верно равенство $[y, x, x, x, x] = 1$. Таким образом, группа G является 4-энгелевой. $\square$

Лемма 1. *Любая 2-порожденная группа G, принадлежащая классу $L(\mathcal{N})$, является нильпотентной ступени не выше* 5.

Доказательство. Рассмотрим произвольную 2-порожденную группу $G \in L(\mathcal{N})$, $G = \langle x_1, x_2 \rangle$. Заметим, что по предложению 1 группа G является 4-энгелевой. Ясно, что $G = \langle x_1 \rangle^G \cdot \langle x_2 \rangle^G$. Нормальные замыкания $\langle x_1 \rangle^G$, $\langle x_2 \rangle^G$ являются нильпотентными ступени не выше 3. По теореме Фиттинга [16] группа G нильпотентна ступени не выше 6. Таким образом, в группе G все коммутаторы веса 7 равны 1.

Для доказательства леммы достаточно показать, что значения всех базисных коммутаторов веса 6 от переменных x_1, x_2 в группе G равны 1. Введем обозначения для базисных коммутаторов веса 6 от переменных x_1, x_2:

$b_{61} = [x_2, x_1, x_2, [x_2, x_1, x_1]]$, $b_{62} = [x_2, x_1, x_1, x_1, [x_2, x_1]]$,
$b_{63} = [x_2, x_1, x_1, x_2, [x_2, x_1]]$, $b_{64} = [x_2, x_1, x_2, x_2, [x_2, x_1]]$,
$b_{65} = [x_2, x_1, x_1, x_1, x_1, x_1]$, $b_{66} = [x_2, x_1, x_1, x_1, x_1, x_2]$,
$b_{67} = [x_2, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2]$, $b_{68} = [x_2, x_1, x_1, x_2, x_2, x_2]$,
$b_{69} = [x_2, x_1, x_2, x_2, x_2, x_2]$.

Ввиду 4-энгелевости группы G получим, что

$$b_{65} = b_{66} = b_{69} = 1.$$

Поскольку элементы $[x_2, x_1], x_1 \in \langle x_1 \rangle^G$ и $\langle x_1 \rangle^G \in \mathcal{N}_3$, то $b_{62} = 1$. Аналогично из $[x_2, x_1, x_1], [x_2, x_1], x_2 \in \langle x_2 \rangle^G$ и $\langle x_2 \rangle^G \in \mathcal{N}_3$ следует, что $b_{64} = b_{68} = 1$.

Так как G нильпотентна ступени 6, то в ней будет верно равенство:

$$[x_2, x_1, x_1, x_1, x_2, [x_2, x_1, x_1, x_1]] = 1.$$

Из истинности в $\mathcal{N}$ квазитождества (1) получим, что

$$[x_2, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2] = 1.$$

Следовательно, $b_{67} = 1$.

Из нильпотентности группы G следует равенство

$$[x_2, x_1, x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_2, [x_2, x_1, x_1 \cdot x_2]] = 1.$$

Заметим, что элементы $[x_2, x_1, x_1 \cdot x_2], x_1 \cdot x_2 \in \langle x_1 \cdot x_2 \rangle^G$ и по определению класса Леви $\langle x_1 \cdot x_2 \rangle^G \in \mathcal{N}$. Поскольку в $\mathcal{N}$ истинно квазитождество (1) получим равенство

$$[x_2, x_1, x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_2] = 1$$

в группе G. Значит,

$$d_1 = [x_2, x_1, x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_2, x_1] = 1$$

и

$$d_2 = [x_2, x_1, x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_2, x_2] = 1.$$

Ввиду линейности коммутаторов веса 6 в 6-ступенно нильпотентной группе, получим, что

$$d_1 = d_{11} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \cdot d_{17} \cdot d_{18},$$

где

$d_{11} = [x_2, x_1, x_1, x_1, x_1, x_1]$, $d_{12} = [x_2, x_1, x_2, x_1, x_1, x_1]$,
$d_{13} = [x_2, x_1, x_1, x_2, x_1, x_1]$, $d_{14} = [x_2, x_1, x_2, x_2, x_1, x_1]$,
$d_{15} = [x_2, x_1, x_1, x_1, x_2, x_1]$, $d_{16} = [x_2, x_1, x_2, x_1, x_2, x_1]$,
$d_{17} = [x_2, x_1, x_1, x_2, x_2, x_1]$, $d_{18} = [x_2, x_1, x_2, x_2, x_2, x_1]$.

и

$$d_2 = d_{21} \cdot d_{22} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \cdot d_{26} \cdot d_{27} \cdot d_{28},$$

где

$d_{21} = [x_2, x_1, x_1, x_1, x_1, x_2]$, $d_{22} = [x_2, x_1, x_2, x_1, x_1, x_2]$,
$d_{23} = [x_2, x_1, x_1, x_2, x_1, x_2]$, $d_{24} = [x_2, x_1, x_2, x_2, x_1, x_2]$,
$d_{25} = [x_2, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2]$, $d_{26} = [x_2, x_1, x_2, x_1, x_2, x_2]$,
$d_{27} = [x_2, x_1, x_1, x_2, x_2, x_2]$, $d_{28} = [x_2, x_1, x_2, x_2, x_2, x_2]$.

Из 4-энгелевости группы G следует, что $d_{11} = d_{21} = d_{28} = 1$. Заметим, что элементы $[x_2, x_1, x_1]$, $[x_2, x_1, x_2]$ принадлежат нормальным замыканиям $\langle x_1 \rangle^G$, $\langle x_2 \rangle^G$.

Ввиду нильпотентности группы G следующие коммутаторы веса 7 будут равны 1:

$[x_2, x_1, x_2, x_1, [x_2, x_1, x_2]] = 1$, $[x_2, x_1, x_1, x_2, [x_2, x_1, x_1]] = 1$,
$[x_2, x_1, x_2, x_2, [x_2, x_1, x_2]] = 1$.

По определению класса Леви $\langle x_2 \rangle^G, \langle x_2 \rangle^G \in \mathcal{N}$ и из истинности в $\mathcal{N}$ квазитождества (1) следуют равенства

$[x_2, x_1, x_1, x_2, x_2] = 1$, $[x_2, x_1, x_2, x_1, x_1] = 1$,
$[x_2, x_1, x_2, x_2, x_2] = 1$.

Значит, $d_{12} = d_{17} = d_{18} = d_{22} = d_{27} = 1$.

Также заметим, что элементы $[x_2, x_1, x_1, x_2]$, $[x_2, x_1, x_2, x_2]$, $[x_2, x_1, x_1, x_1]$, $[x_2, x_1, x_2, x_1]$ принадлежат нормальным замыканиям $\langle x_1 \rangle^G$, $\langle x_2 \rangle^G$ и в группе G ввиду нильпотентности будут верны равенства:

$$[x_2, x_1, x_1, x_2, x_1, [x_2, x_1, x_1, x_2]] = 1, \ [x_2, x_1, x_2, x_2, x_1, [x_2, x_1, x_2, x_2]] = 1,$$

$$[x_2, x_1, x_1, x_1, x_2, [x_2, x_1, x_1, x_1]] = 1, \ [x_2, x_1, x_2, x_1, x_2, [x_2, x_1, x_2, x_1]] = 1.$$

Из истинности в нормальных замыканиях $\langle x_1 \rangle^G$, $\langle x_2 \rangle^G$ квазитождества (1) получим, что

$$d_{13} = [x_2, x_1, x_1, x_2, x_1, x_1] = 1, \ d_{14} = [x_2, x_1, x_2, x_2, x_1, x_1] = 1,$$

$$d_{25} = [x_2, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2] = 1, \ d_{26} = [x_2, x_1, x_2, x_1, x_2, x_2] = 1.$$

Применяя тождество Витта и используя нильпотентность группы G, получим, что

$d_{15} = [x_2, x_1, x_1, x_1, x_2, x_1] =$
$= [x_2, x_1, [x_2, x_1, x_1, x_1]]^{-1} \cdot [x_1, [x_2, x_1, x_1, x_1], x_2]^{-1} =$

$= [x_2, x_1, x_1, x_1, [x_2, x_1]] \cdot [x_2, x_1, x_1, x_1, x_1, x_2] = b_{62} \cdot b_{66} = 1.$

Из 4-энгелевости группы G следует, что $[x_1, x_2, x_2, x_2, x_2, x_1] = 1$. Тогда, применяя тождество Витта, получим равенства:
$d_{24} = [x_2, x_1, x_2, x_2, x_1, x_2] =$
$= [x_1, x_2, [x_2, x_1, x_2, x_2]]^{-1} \cdot [x_2, [x_2, x_1, x_2, x_2], x_1]^{-1} =$
$= [x_2, x_1, [x_2, x_1, x_2, x_2]] \cdot [x_2, x_1, x_2, x_2, x_2, x_1] =$
$= [x_2, x_1, x_2, x_2, [x_2, x_1]]^{-1} \cdot [x_1, x_2, x_2, x_2, x_2, x_1]^{-1} = b_{64}^{-1} = 1.$

Используя тождество Витта и нильпотентность группы G, получим равенство:
$d_{16} = [x_2, x_1, x_2, x_1, x_2, x_1] =$
$= [x_2, x_1, [x_2, x_1, x_2, x_1]]^{-1} \cdot [x_1, [x_2, x_1, x_2, x_1], x_2]^{-1} =$
$= [x_2, x_1, x_2, x_1, [x_2, x_1]] \cdot [x_2, x_1, x_2, x_1, x_1, x_2] =$
$= [x_2, x_1, [x_2, x_1], [x_2, x_1]]^{-1} \cdot [x_1, [x_2, x_1], x_2, [x_2, x_1]]^{-1} \cdot$
$\cdot [x_2, x_1, x_2, x_1, x_1, x_2] = [x_2, x_1, x_1, x_2, [x_2, x_1]] \cdot [x_2, x_1, x_2, x_1, x_1, x_2] =$
$= b_{63} \cdot [x_2, x_1, x_2, x_1, x_1, x_2].$

Ранее было доказано, что $[x_2, x_1, x_2, x_1, x_1] = 1$, значит, $[x_2, x_1, x_2, x_1, x_1, x_2] = 1$ и $d_{16} = b_{63}$.

Аналогичным образом получаем, что
$d_{23} = [x_2, x_1, x_1, x_2, x_1, x_2] =$
$= [x_2, x_1, [x_2, x_1, x_1], x_2]^{-1} \cdot [x_1, [x_2, x_1, x_1], x_2, x_2]^{-1} =$
$= [x_2, x_1, x_1, x_2, [x_2, x_1]] \cdot [x_2, [x_2, x_1], [x_2, x_1, x_1]] \cdot [x_2, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2] =$
$= b_{63} \cdot [x_2, x_1, x_2, [x_2, x_1, x_1]]^{-1} \cdot b_{67} =$
$= b_{63} \cdot b_{61}^{-1}.$

Из того, что $d_1 = 1$ и $d_1 = d_{16} = b_{63}$ следует, что $b_{63} = 1$. Тогда из равенств $d_2 = 1$, $d_2 = d_{23} = b_{63} \cdot b_{61}^{-1}$, $b_{63} = 1$ получим, что $b_{61} = 1$.

Итак, значения всех базисных коммутаторов веса 6 от переменных x_1, x_2 в группе G равны 1. Значит, G — нильпотентная группа ступени не выше 5. □

Предложение 2. *В любой группе G, принадлежащей классу $L(\mathcal{N})$ истинны тождества*

$$(\forall a)(\forall b)([a, b, b, a, a] = 1), \tag{2}$$

$$(\forall a)(\forall b)([a, b, a, b, b] = 1), \tag{3}$$

$$(\forall a)(\forall b)([a, b, b, b, a] = [a, b, b, a, b]^{-1}). \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольные элементы $a, b \in G$. Если $H = \langle a, b \rangle$, то $H \leq G$, $H \in L(\mathcal{N})$. По лемме 1 H является нильпотентной ступени не выше 5 и в ней верны равенства

$$[a, b, b, a, [a, b, b]] = 1, \ [a, b, a, b, [a, b, a]] = 1.$$

По определению класса Леви $\langle a\rangle^H \in \mathcal{N}$. Поскольку $[a,b,b], a \in \langle a\rangle^H$, то ввиду истинности в $\langle a\rangle^H$ квазитождества (1) получим равенство

$$[a,b,b,a,a] = 1.$$

Рассмотрим элементы $x = [ab,a,b]$, $y = ab$ $(x, y \in \langle ab\rangle^H,\ \langle ab\rangle^H \in \mathcal{N})$. Тогда из нильпотентности группы G

$$[x,y,x] = [ab,a,b,ab,[ab,a,b]] = 1.$$

Ввиду истинности в $\langle ab\rangle^H$ квазитождества (1) получим, что

$$[ab,a,b,ab,ab] = 1.$$

Из линейности коммутаторов веса 5 в нильпотентной группе ступени 5, 4-энгелевости группы G и равенства $[a,b,b,a,a] = 1$ следует, что
$1 = [b,a,b,a,a] \cdot [b,a,b,a,b] \cdot [b,a,b,b,a] \cdot [b,a,b,b,b] =$
$= [a,b,b,a,a]^{-1} \cdot [b,a,b,a,b] \cdot [b,a,b,b,a] \cdot [a,b,b,b,b]^{-1} =$
$= [b,a,b,a,b] \cdot [b,a,b,b,a] = [a,b,b,a,b]^{-1} \cdot [a,b,b,b,a]^{-1}.$

Значит,

$$[a,b,b,b,a] = [a,b,b,a,b]^{-1}.$$

Полученные равенства верны для произвольных элементов $a, b \in G$, значит, в группе G истинны тождества (2), (3) и (4).

□

Лемма 2. *Любая 2-порожденная группа G, принадлежащая классу $L(\mathcal{N})$, является нильпотентной ступени не выше 4.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную 2-порожденную группу $G \in L(\mathcal{N})$, $G = \langle x_1, x_2\rangle$. Заметим, что по лемме 1 группа G является нильпотентной ступени не выше 5 и коммутаторы веса 5 будут обладать свойством линейности. По предложению 1 группа G будет 4-энгелевой, а по предложению 2 в G будут истинны тождества (2), (3) и (4).

Для доказательства леммы достаточно показать, что значения всех базисных коммутаторов веса 5 от переменных x_1, x_2 в группе G равны 1.

Введем обозначения для базисных коммутаторов веса 5 от переменных x_1, x_2:

$b_{51} = [x_2, x_1, x_1, [x_2, x_1]]$, $b_{52} = [x_2, x_1, x_2, [x_2, x_1]]$,
$b_{53} = [x_2, x_1, x_1, x_1, x_1]$, $b_{54} = [x_2, x_1, x_1, x_1, x_2]$.
$b_{55} = [x_2, x_1, x_1, x_2, x_2]$, $b_{56} = [x_2, x_1, x_2, x_2, x_2]$.

Ввиду 4−энгелевости группы G $b_{53} = b_{56} = 1$. Из тождества (2) следует, что $b_{55} = 1$.

Используя тождества (3), (4) и тождество Витта, получим:
$b_{54} = [x_2, x_1, x_1, x_1, x_2] = [x_2, x_1, x_1, x_2, x_1]^{-1} =$
$= [x_1, x_2, [x_2, x_1], x_1] \cdot [x_2, [x_2, x_1], x_1, x_1] =$
$= [x_2, x_1, [x_2, x_1], x_1]^{-1} \cdot [x_2, x_1, x_2, x_1, x_1]^{-1} = 1.$

Используя тождество (4) и тождество Витта, получим:
$1 = b_{54} = [x_2, x_1, x_1, x_1, x_2] = [x_2, x_1, x_1, x_2, x_1]^{-1} =$
$= [x_2, x_1, [x_2, x_1, x_1]] \cdot [x_1, [x_2, x_1, x_1], x_2] =$

$= [x_2, x_1, x_1, [x_2, x_1]]^{-1} \cdot [x_2, x_1, x_1, x_1, x_2]^{-1} =$
$= b_{51}^{-1} \cdot b_{54}^{-1} = b_{51}^{-1}$. Значит, $b_{51} = 1$.

Применяя тождества (2) и (4), получим равенства
$[x_2, x_1, x_2, x_2, x_1] = [x_1, x_2, x_2, x_2, x_1]^{-1} =$
$[x_1, x_2, x_2, x_1, x_2] = [x_2, x_1, x_2, x_1, x_2]^{-1} =$
$= [x_2, x_1, [x_2, x_1], x_2] \cdot [x_1, [x_2, x_1], x_2, x_2] = [x_2, x_1, x_1, x_2, x_2]^{-1} = b_{55}^{-1} = 1,$
в частности, $[x_2, x_1, x_2, x_1, x_2] = b_{55}$.

С другой стороны, из тождества Витта следуют равенства
$[x_2, x_1, x_2, x_2, x_1] = [x_2, x_1, [x_2, x_1, x_2]]^{-1} \cdot [x_1, [x_2, x_1, x_2], x_2]^{-1} =$
$= [x_2, x_1, x_2, [x_2, x_1]] \cdot [x_2, x_1, x_2, x_1, x_2] = b_{52} \cdot b_{55} = b_{52}$.

Таким образом, $b_{52} = 1$. Следовательно, значения всех базисных коммутаторов веса 5 от переменных x_1, x_2 в группе G равны 1 и группа G нильпотентна ступени не выше 4.

□

Теорема 1. *Любая группа G, принадлежащая классу $L(\mathcal{N})$, является 3-энгелевой.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные элементы $a, b \in G$. Тогда если $H = \langle a, b \rangle$, то $H \leq G$ и $H \in L(\mathcal{N})$. По лемме 2 группа H нильпотентна ступени не выше 4. Значит, $[a, b, a, [a, b]] = 1$.

Рассмотрим элементы $x = a,\ y = [a, b]$ $(x, y \in \langle a \rangle^H,\ \langle a \rangle^H \in \mathcal{N})$. Из истинности квазитождества (1) в группе $\langle a \rangle^H$ получим ,что

$$[y, x, x] = [a, b, a, a] = 1.$$

Ввиду линейности коммутаторов веса 4 в нильпотентной группе ступени 4, имеем $[b, a, a, a] = 1$. Поскольку равенство выполняется для любых элементов $a, b \in G$, то группа G является 3-энгелевой.

□

Следствие 1. *Любая группа G, принадлежащая классу $L(\mathcal{N})$, является нильпотентной ступени не выше* 4.

Доказательство. Рассмотрим произвольную группу G, принадлежащую классу $L(\mathcal{N})$. По теореме 1 группа G является 3-энгелевой. В квазимногообразии $\mathcal{N}$ содержатся группы без элементов порядков 2 и 5, поэтому в группе G элементы указанных порядков будут отсутствовать. В работе [17] доказано, что 3-энгелева группа без элементов порядков 2 и 5 является нильпотентной ступени не выше 4. Следствие доказано. □

Следствие 2. *Любая группа G, принадлежащая классу $L_2(\mathcal{N})$, является нильпотентной ступени не выше* 4.

Доказательство. Заметим, что для класса $\mathcal{N}$ справедлива цепочка включений:

$$L_2(\mathcal{N}) \subseteq L_1(\mathcal{N}).$$

Из следствия 1 следует, что $L_1(\mathcal{N}) = L(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}_4$, значит, $L_2(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}_4$. Данный результат можно также получить, используя теорему 2 из [3].

□

Следствие 3. *Для квазимногообразия* $qF_2(\mathcal{N}_3)$ *справедливы включения* $L(qF_2(\mathcal{N}_3)) \subseteq \mathcal{N}_4$, $L_2(qF_2(\mathcal{N}_3)) \subseteq \mathcal{N}_4$.

Доказательство. Из [19] следует, что квазитождество (1) истинно в группе $F_2(\mathcal{N}_3)$. Поскольку в квазимногообразии $qF_2(\mathcal{N}_3)$ отсутствуют группы, содержащие элементы порядков 2 и 5 (группы без кручения), то квазимногообразие удовлетворяет условиям следствия 1 и следствия 2. Значит, $L(qF_2(\mathcal{N}_3)) \subseteq \mathcal{N}_4$ и $L_2(qF_2(\mathcal{N}_3)) \subseteq \mathcal{N}_4$. □

Предложение 3. *Любая группа* G*, принадлежащая классу* $L_3(\mathcal{N})$*, является нильпотентной ступени не выше* 3.

Доказательство. Рассмотрим произвольную группу G, принадлежащую классу $L_3(\mathcal{N})$. По определению L_3-класса для произвольных $x, y, z \in G$ нормальное замыкание $\langle x, y, z\rangle^G \in \mathcal{N}$. Таким образом, $\langle x, y, z\rangle^G$ является нильпотентной ступени 3 группой.

Хорошо известно, что если всякая 3-порожденная подгруппа некоторой группы нильпотентна ступени не выше 3, то и сама группа нильпотентна ступени не выше 3 [18]. Следовательно, G является нильпотентной ступени не выше 3 и $\mathcal{N} = L_3(\mathcal{N})$. □

В частности, справедливо включение $L_3(qF_2(\mathcal{N}_3)) \subseteq \mathcal{N}_3$.

References

[1] A.I. Budkin, *The Operator L_n on Quasivarieties of Universal Algebras*, Siberian Mathematical Journal, **60**:4 (2019), 565–571.

[2] A.I. Budkin, *Groups with Nilpotent n-Generated Normal Subgroups*, Siberian Mathematical Journal, **64**:4 (2023), 847–853.

[3] A.I. Budkin, *Groups with Restrictions on Normal Subgroups*, Algebra and Logic, **63**:1 (2024), 1–9.

[4] A.I. Budkin, *Levi quasivarieties*, Siberian Mathematical Journal, **40**:2 (1999), 225–228.

[5] A.I. Budkin, L.V. Taranina, *On levi quasivarieties generated by nilpotent groups*, Siberian Mathematical Journal, **41**:2 (2000), 218–223.

[6] V.V. Lodeyshchikova, *The Levi classes generated by nilpotent groups*, Siberian Mathematical Journal, **51**:6 (2010), 1075–1080.

[7] V.V. Lodeishchikova, *Levi quasivarieties of exponent p^s*, Algebra and Logic, **50**:1 (2011), 17–28.

[8] V.V. Lodeishchikova, *A Levi Class Generated by a Quasivariety of Nilpotent Groups*, Algebra and Logic, **58**:4 (2019), 327–336.

[9] V.V. Lodeishchikova, S.A. Shakhova, *Levi Classes of Quasivarieties of Nilpotent Groups of Exponent p^s*, Algebra and Logic, **61**:1 (2022), 54–66.

[10] S.A. Shakhova, *The Axiomatic Rank of Levi Classes*, Algebra and Logic, **57**:5 (2018), 381–391.

[11] S.A. Shakhova, *The Axiomatic Rank of the Levi Class Generated by the Almost Abelian Quasivariety of Nilpotent Groups*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **41**:9 (2020), 1680–1683.

[12] S.A. Shakhova, *Levi Classes of Quasivarieties of Groups with Commutator Subgroup of Order p*, Algebra and Logic, **60**:5 (2021), 336–347.

[13] S.A. Shakhova, *Levi Classes of Quasivarieties of Nilpotent Groups of Class at Most Two*, Algebra and Logic, **62**:6 (2024), 501–515.

[14] A.V. Zenkov, *On the Levi Class of the Quasivariety of Right-Orderable Groups*, Siberian Mathematical Journal, **65**:1 (2024), 44–47.
[15] M. Hall, *The Theory of Groups*, Macmillan, New York, 1959.
[16] M.I. Kargapolov, Yu.I. Merzlyakov, *Fundamentals of the theory of groups*, SpringerVerlag, NewYork etc., 1979.
[17] H. Heineken, *Engelsche Elemente der Länge drei*, Illinois J. Math, :5 (1961), 681–707.
[18] H. Neumann, *Varieties of Groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
[19] A.I. Budkin, *On quasivarieties of axiomatic rank 3 of torsion-free nilpotent groups*, Siberian Mathematical Journal, **58**:1 (2017), 43–48.

Viktoriia Vladimirovna Lodeishchikova
Polzunov Altai State Technical University,
pr. Lenina, 46,
656038, Barnaul, Russia
Email address: lodeischikova@yandex.ru