S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 519.21

DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 60G50

О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

В.И. ЛОТОВ, В.Р. ХОДЖИБАЕВ

Abstract. We study a stochastic process with switchings between two independent Levy processes while achieving regulatory barriers. We find the Laplace–Stieltjes transform of the stationary distribution of this process and its asymptotic representations for high regulatory barrier.

Keywords: oscillating stochastic process, Levy process, stationary distribution, factorization method.

Введение

Пусть $\xi_i(t)$, $t \geq 0$, $i = 1, 2$, — независимые однородные случайные процессы с независимыми приращениями,

$$\xi_1(0) = \xi_2(0) = 0, \qquad m_1 = \mathbf{E}\xi_1(1) > 0, \qquad m_2 = \mathbf{E}\xi_2(1) < 0.$$

Траектории процессов предполагаются непрерывными справа.

Для произвольного $b > 0$ определим случайные величины

$$\tau_1 = \inf\{t \geq 0 : \xi_1(t) \geq b\}, \qquad \tau_2 = \inf\{t \geq 0 : \xi_2(t) \leq -b\}.$$

Lotov, V.I., Khodjibayev, V.R. Stationary distribution of the stochastic process with switchings .

© 2025 В.И. ЛОТОВ, В.Р. ХОДЖИБАЕВ.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект FWNF-2022-0010.

Поступила ? ??????? 2025 г., опубликована ????????

Построим случайный процесс $X(t)$ следующим образом: $X(0) = 0$, $X(t)$ совпадает с $\xi_1(t)$ до тех пор, пока впервые не будет достигнут уровень b в момент времени τ_1, и полагаем $X(\tau_1) = b$. При $t > \tau_1$ в качестве приращений процесса используются приращения процесса $\xi_2(t)$ до тех пор, пока впервые после τ_1 не будет достигнут нулевой уровень в момент времени $\theta_1 := \tau_1 + \tau_2$, и полагаем $X(\theta_1) = 0$. Затем приращения процесса $X(t)$ вновь переключаются на независимые копии приращений процесса $\xi_1(t)$ до тех пор, пока в некоторый момент времени $\theta_1 + \tau_3$ не будет достигнут уровень b, полагаем $X(\theta_1 + \tau_3) = b$. После чего вновь происходит переключение на независимую копию процесса $\xi_2(t)$ до тех пор, пока в некоторый момент времени $\theta_2 := \theta_1 + \tau_3 + \tau_4$ не будет достигнут нулевой уровень, и здесь также полагаем $X(\theta_2) = 0$. Дальнейшие переключения на независимые копии процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ происходят по той же схеме, т. е. при $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$X(t) = \begin{cases} \min\{\xi_1(t - \theta_k), b\}, & \theta_k < t \le \theta_k + \tau_{2k+1}, \\ \max\{b + \xi_2(t - \theta_k - \tau_{2k+1}), 0\}, & \theta_k + \tau_{2k+1} < t \le \theta_{k+1}, \end{cases}$$

где $\theta_0 = 0$, $\theta_{k+1} := \theta_k + \tau_{2k+1} + \tau_{2k+2}$, случайные величины τ_{2k+1} распределены одинаково с τ_1, случайные величины τ_{2k+2} распределены одинаково с τ_2, и все они независимы.

Здесь $X(t)$ является регенерирующим случайным процессом с непрерывным временем. Последовательные моменты $\theta_1, \theta_2, \ \ldots$ достижений нулевого уровня процессом $X(t)$ являются моментами регенерации, т.к. в нашем случае с вероятностью единица процесс $X(t)$ попадает в нуль при $t = \theta_k,\ k = 1, 2, \ldots$. Времена между моментами регенерации являются независимыми и одинаково распределенными с θ_1 случайными величинами. Вероятностные характеристики траектории случайного процесса $X(t)$ между моментами регенерации являются одинаковыми. В силу того, что $\mathbf{E}\,\theta_1 = \mathbf{E}\,\tau_1 + \mathbf{E}\,\tau_2 < \infty$, существует стационарное распределение для рассматриваемого регенерирующего процесса (см. [1, theorem 21.5.1]).

Напомним, что случайные процессы, у которых распределение приращений меняется по мере достижения определенных границ, называют осциллирующими. Изучению разного рода таких процессов посвящен ряд работ, библиографические сведения об этом можно найти в [2], [3].

Данную заметку следует рассматривать как продолжение работы [2], в которой найдены в явном виде двойное преобразование Лапласа — Стилтьеса распределения процесса $X(t)$ (по времени и по пространству значений), и преобразование Лапласа — Стилтьеса его стационарного распределения, обсуждены сложности вычисления полученных явных выражений, продемонстрированы способы их вычисления в некоторых простых ситуациях и проведен асимптотический анализ полученных выражений при $b \to \infty$. Основным результатом [2] является асимптотическое представление для преобразования Лапласа — Стилтьеса стационарного распределения процесса $X(t)$ при условии, что процессы $\xi_i(t),\ i = 1, 2,$

удовлетворяют условиям крамерского типа и $b \to \infty$. Этот результат содержит степенные ряды, коэффициенты которых весьма сложным образом выражаются через компоненты так называемых безгранично делимых факторизаций функций $u/(u - \psi_i(\lambda))$, где $\psi_i(\lambda)$ — логарифмы преобразований Лапласа — Стилтьеса распределений случайных величин $\xi_i(1), i = 1, 2,$ (см. ниже).

Хорошо известно, что преобразования Лапласа — Стилтьеса тех или иных граничных функционалов для случайных блужданий и также для случайных процессов с непрерывным временем (процессов Леви) могут быть выражены через компоненты факторизации, и это соответствует сути вещей. Проще всего это можно наблюдать на примере случайных блужданий, поскольку для них движение траектории к прямолинейной границе осуществляется лестничными скачками через промежутки времени между лестничными моментами. Соответственно двойные преобразования распределений изучаемых граничных функционалов неизбежно выражаются через двойные преобразования распределений лестничных величин, которые с точностью до линейных преобразований совпадают с компонентами факторизации.

В то же время явные формулы для компонент факторизации доступны далеко не всегда как для случайных блужданий, так и для процессов Леви. По этой причине работать с компонентами факторизации чрезвычайно трудно, и также трудно бывает распознать физический смысл получаемых величин.

В теоремах 2 и 3 настоящей работы установлены новые представления для преобразования Лапласа — Стилтьеса стационарного распределения процесса $X(t)$, в том числе асимптотические при $b \to \infty$ с экспоненциальной оценкой остатка. Эти представления выражаются через весьма понятные характеристики траекторий, а именно, через распределения экстремальных значений процессов $\xi_i(t)$ и через распределения первых перескоков траекторий этих процессов через барьеры, в том числе бесконечно удаленные. По сравнению с результатами [2] полученные формулы более наглядны и несомненно представляют определенное удобство для компьютерного моделирования характеристик стационарного распределения.

Предварительные сведения

Пусть

$$\psi_i(\lambda) = \ln \mathbf{E} e^{\lambda \xi_i(1)}, \quad i = 1, 2, \quad \operatorname{Re} \lambda = 0.$$

Функции $r_i(u, \lambda) := u(u - \psi_i(\lambda))^{-1}$ представляют собой преобразования Лапласа — Стилтьеса безгранично делимых распределений:

$$\frac{u}{u - \psi_i(\lambda)} = u \int_0^\infty e^{-ut} \int_{-\infty}^\infty e^{\lambda x} d_x \mathbf{P}(\xi_i(t) < x) dt, \qquad \operatorname{Re} \lambda = 0, \quad u > 0.$$

Известно [4], что эти функции при $\operatorname{Re}\lambda = 0, u > 0$, допускают безгранично делимую факторизацию $r_i(u,\lambda) = r_{i+}(u,\lambda) r_{i-}(u,\lambda)$, где $r_{i+}(u,\lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ является преобразованием Лапласа — Стилтьеса безгранично делимого распределения, носитель которого содержится на неотрицательной полуоси, а $r_{i-}(u,\lambda)$ есть преобразование Лапласа — Стилтьеса при $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$ безгранично делимого распределения, носитель которого содержится на неположительной полуоси. Функции $r_{i+}(u,\lambda)$ и $r_{i-}(u,\lambda)$ условно называются соответственно положительной и отрицательной компонентами факторизации.

Понятие безгранично делимой факторизации введено Б.А. Рогозиным в [4], многие свойства ее компонент изучены им в [5], в том числе аналитичность и равномерная ограниченность в рассматриваемых областях значений переменных u и λ. Функция $r_{i+}(u,\lambda)$ аналитична при $\operatorname{Re}\lambda < 0$, непрерывна и не обращается в нуль при $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки, а функция $r_{i-}(u,\lambda)$ обладает аналогичными свойствами в правой полуплоскости.

Более того, в [4] установлено, что

$$\begin{aligned} r_{i+}(u,\lambda) &= u\int_0^\infty e^{-ut}\int_0^\infty e^{\lambda x} d_x \mathbf{P}(\bar{\xi}_i(t) < x)dt \\ &= \exp\left\{ -\int_0^\infty \left(e^{\lambda x} - 1\right) d_x \int_0^\infty t^{-1}\mathbf{P}(\xi_i(t) > x) e^{-ut} dt \right\}, \\ r_{i-}(u,\lambda) &= u\int_0^\infty e^{-ut}\int_{-\infty}^0 e^{\lambda x} d_x \mathbf{P}(\bar{\bar{\xi}}_i(t) > x)dt \\ &= \exp\left\{ \int_{-\infty}^0 \left(e^{\lambda x} - 1\right) d_x \int_0^\infty t^{-1}\mathbf{P}(\xi_i(t) < x) e^{-ut} dt \right\}, \end{aligned}$$

где $\bar{\xi}_i(t) = \sup_{0\le s\le t}\xi_i(s)$, $\bar{\bar{\xi}}_i(t) = \inf_{0\le s\le t}\xi_i(s)$.

Если обозначить через $L(A)$ множество функций g, имеющих вид

$$g(\lambda) = \int_A e^{\lambda x} dG(x), \qquad \text{где} \quad \int_A |dG(x)| < \infty,$$

и где A — произвольное борелевское множество, то нетрудно заметить, что $r_{u+}(\lambda) \in L([0,\infty))$, $r_{u-}(\lambda) \in L((-\infty, 0])$, и $r_{u\pm}(0) = 1$.

Для всякой функции $g \in L(\mathbb{R})$ и произвольного борелевского множества $A \subset \mathbb{R}$ положим

$$[g(\lambda)]^A = \int_A e^{\lambda x} dG(x),$$

и пусть $\varphi_i(u) = \mathbf{E}e^{-u\tau_i}$, $i = 1, 2$.

Следующий результат установлен в [2].

Теорема 1. ([2]) *Для преобразования Лапласа — Стилтьеса распределения процесса $X(t)$ при $u>0$, $\operatorname{Re}\lambda=0$ справедливо следующее представление:*

$$\Psi(u,\lambda):=\int\limits_0^\infty e^{-ut}\mathbf{E}e^{\lambda X(t)}dt=\frac{1}{1-\varphi_1(u)\varphi_2(u)}\times$$

$$\times\left\{r_{1-}(u,\lambda)u^{-1}[r_{1+}(u,\lambda)]^{[0,b)}+e^{\lambda b}\varphi_1(u)u^{-1}r_{2+}(u,\lambda)[r_{2-}(u,\lambda)]^{(-b,0]}\right\}. \quad (1)$$

Новые представления для стационарного распределения

Обозначим

$$\tau_+(x)=\inf\{t:\ \xi(t)\ge x\},\quad \tau_-(y)=\inf\{t:\ \xi(t)\le y\},\quad x>0,\quad y<0,$$
$$\chi_+(x)=\xi(\tau_+(x))-x,\qquad \chi_-(y)=\xi(\tau_-(y))-y.$$

Таким образом, $\chi_+(x)$ и $\chi_-(y)$ являются величинами перескоков процессов ξ_1 и ξ_2 соответственно через положительный и отрицательный уровни при первом достижении этих уровней. В наших условиях существуют также предельные распределения перескоков через бесконечно удаленные барьеры ([6]):

$$\mathbf{P}(\chi_+<x):=\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}(\chi_+(t)<x),\qquad \mathbf{P}(\chi_-<x):=\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}(\chi_-(t)<x).$$

Пусть также

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}(X(t)<x)=F(x),\qquad W(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda x}\,dF(x),\qquad \operatorname{Re}\lambda=0.$$

Для преобразования $W(\lambda)$ стационарного распределения процесса $X(t)$ справедливо следующее явное выражение.

Теорема 2. *Для стационарного распределения процесса $X(t)$ выполняется тождество*

$$W(\lambda)=-\frac{1}{a}\left[\frac{1-e^{\lambda b}\mathbf{E}\,e^{\lambda\chi_+(b)}}{\psi_1(\lambda)}+\frac{e^{\lambda b}-\mathbf{E}\,e^{\lambda\chi_-(-b)}}{\psi_2(\lambda)}\right], \quad (2)$$

$$a=\mathbf{E}\,\tau_1+\mathbf{E}\,\tau_2=\frac{b+\mathbf{E}\,\chi_+(b)}{m_1}+\frac{b+\mathbf{E}\,|\chi_-(-b)|}{|m_2|}.$$

Доказательство. В связи с тем, что $W(\lambda)=\lim_{u\to0}u\Psi(u,\lambda)$, будем анализировать формулу (1).

Известно, что для введенных однородных процессов с независимыми приращениями $\xi_i(t)$ при $u\ge0$ выполняется

$$r_{1+}^{-1}(u,\lambda)[r_{1+}(u,\lambda)]^{[b,\infty)}=\mathbf{E}\,(e^{\lambda\xi_1(\tau_1)-u\tau_1};\ \tau_1<\infty)$$

$$= e^{\lambda b}\mathbf{E}\,(e^{\lambda\chi_+(b)-u\tau_1};\ \tau_1<\infty),\qquad \operatorname{Re}\lambda\le 0,$$

(см., напр., [7]), и аналогично

$$r_{2-}^{-1}(u,\lambda)[r_{2-}(u,\lambda)]^{(-\infty,-b]} = \mathbf{E}\,(e^{\lambda\xi_2(\tau_2)-u\tau_2};\ \tau_2<\infty),$$

$$= e^{-\lambda b}\mathbf{E}\,(e^{\lambda\chi_-(-b)-u\tau_2};\ \tau_2<\infty),\qquad \operatorname{Re}\lambda\ge 0.$$

Кроме того, нам понадобятся следующие очевидные соотношения:

$$\lim_{u\to 0}\frac{u}{1-\mathbf{E}\,e^{-u(\tau_1+\tau_2)}} = \frac{1}{\mathbf{E}(\tau_1+\tau_2)},\qquad \lim_{u\to 0}\mathbf{E}^{-u\tau_i}=1,$$

$$[r_{1+}(u,\lambda)]^{[0,b)} = r_{1+}(u,\lambda)-[r_{1+}(u,\lambda)]^{[b,\infty)}$$

$$[r_{2-}(u,\lambda)]^{(-b,0]} = r_{2-}(u,\lambda)-[r_{2-}(u,\lambda)]^{(-\infty,-b]},\quad \mathbf{P}(\tau_i<\infty)=1,\quad i=1,2,$$

и тождество Вальда, из которого следует

$$\mathbf{E}\,\xi_1(\tau_1) = b+\mathbf{E}\,\chi_+(b) = \mathbf{E}\,\xi_1(1)\mathbf{E}\,\tau_1,$$

$$\mathbf{E}\,\xi_2(\tau_2) = -b+\mathbf{E}\,\chi_-(-b) = \mathbf{E}\,\xi_2(1)\mathbf{E}\,\tau_2.$$

С помощью приведенных соотношений утверждение теоремы 2 легко выводится из (1). □

Сформулируем очевидное следствие из теоремы 2.

Следствие 1. *Если процесс $\xi_1(t)$ непрерывен сверху, а $\xi_2(t)$ непрерывен снизу, т. е. если $\xi_1(t)$ не имеет положительных, а $\xi_2(t)$ не имеет отрицательных скачков, то*

$$W(\lambda) = \frac{1-e^{\lambda b}}{a}\left[\frac{1}{\psi_2(\lambda)}-\frac{1}{\psi_1(\lambda)}\right],\qquad a=\frac{b(m_1+|m_2|)}{m_1|m_2|}.$$

Далее, на основе теоремы 2 установим отличное от [2] асимптотическое представление при $b\to\infty$ для стационарного распределения $W(\lambda)$. Для этого потребуются дополнительные условия.

Будем предполагать теперь, что для функций $\psi_i(\lambda)=\ln\mathbf{E}e^{\lambda\xi_i(1)}$ имеют место представления

$$\psi_i(\lambda) = \alpha_i\lambda+\frac{\sigma_i^2\lambda^2}{2}+\int_{-\infty}^{\infty}\big(e^{\lambda x}-1-\lambda x\big)dS_i(x),\qquad i=1,2, \tag{3}$$

в которых α_i, σ_i — некоторые вещественные числа,

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2dS_i(x)<\infty,\qquad S_i(-\infty)=S_i(\infty)=0,$$

и выполняются следующие условия:

$$\mathbf{E}e^{\lambda\xi_1(1)}<\infty\quad\text{при}\quad 0\le\lambda\le\lambda_1,\quad \lambda_1>0,\qquad \limsup_{\substack{|\lambda|\to\infty\\ 0\le\operatorname{Re}\lambda\le\lambda_1}}\frac{|\mathbf{E}\exp\{\lambda\xi_1(1)\}|}{\mathbf{E}\exp\{\operatorname{Re}\lambda\xi_1(1)\}}<1; \tag{4}$$

$$\mathbf{E}e^{\lambda\xi_2(1)} < \infty \quad \text{при} \quad \lambda_2 \le \lambda \le 0, \quad \lambda_2 < 0, \qquad \limsup_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \lambda_2 \le \mathrm{Re}\lambda \le 0}} \frac{|\mathbf{E}\exp\{\lambda\xi_2(1)\}|}{\mathbf{E}\exp\{\mathrm{Re}\lambda\xi_2(1)\}} < 1; \tag{5}$$

$$\text{если } \sigma_i^2 = 0 \text{ то } \int_{-1}^{1} |x| dS_i(x) < \infty \ \text{ и } \ \alpha_i - \int_{-\infty}^{\infty} x dS_i(x) \neq 0, \quad i = 1,2. \tag{6}$$

Отметим, что для выполнения представлений (3) достаточно предположить конечность $\mathbf{E}\xi_i^2(1)$. Достаточными условиями, обеспечивающими выполнение условий (4), (5), будут, в частности, неравенства $\sigma_i^2 > 0$ или наличие абсолютно непрерывных компонент у $S_i(x)$, $i = 1,2$.

Для u, близких к нулю, $u \ge 0$, условие (4) ((5)) обеспечивает наличие единственного неотрицательного (неположительного) решения $\lambda_1(u)$ ($\lambda_2(u)$) уравнения $u - \psi_1(\lambda) = 0$ ($u - \psi_2(\lambda) = 0$). Здесь с необходимостью $r_{1+}^{-1}(u, \lambda_1(u)) = 0$ ($r_{2-}^{-1}(u, \lambda_2(u)) = 0$) и имеют место соотношения

$$\lambda_1(u) = \frac{u}{m_1} + o(u), \qquad \lambda_2(u) = \frac{u}{m_2} + o(u), \quad u \to \infty. \tag{7}$$

Условия (4)–(6) потребовались для получения асимптотических результатов в [2], ниже они также будут использоваться.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия (4)–(6). Тогда при некотором $\varepsilon > 0$ имеет место асимптотическое представление при $b \to \infty$*

$$W(\lambda) = \frac{1}{\bar{a}}\left[\frac{e^{\lambda b}\psi_1(\lambda)\mathbf{E}\, e^{\lambda\bar{\bar{\xi}}_1} - m_1\lambda}{m_1\lambda\psi_1(\lambda)} + \frac{\psi_2(\lambda)\mathbf{E}\, e^{\lambda\bar{\xi}_2} - m_2\lambda e^{\lambda b}}{m_2\lambda\psi_2(\lambda)}\right] + O(e^{-\varepsilon b})$$

$$= \frac{1}{\bar{a}}\left[\frac{e^{\lambda b}\mathbf{E}\, e^{\lambda\chi_+} - 1}{\psi_1(\lambda)} + \frac{\mathbf{E}\, e^{\lambda\chi_-} - e^{\lambda b}}{\psi_2(\lambda)}\right] + O(e^{-\varepsilon b}), \qquad \mathrm{Re}\,\lambda = 0.$$

Здесь

$$\bar{\bar{\xi}}_1 = \inf_{t\ge0} \xi_1(t), \qquad \bar{\xi}_2 = \sup_{t\ge0} \xi_2(t), \qquad \bar{a} = \frac{b + \mathbf{E}\,\chi_+}{m_1} + \frac{b + \mathbf{E}\,|\chi_-|}{|m_2|} =$$

$$= \frac{2m_1 b + \psi_1''(0) + 2m_1\mathbf{E}\,\bar{\xi}_1}{2m_1^2} + \frac{2|m_2| b + \psi_2''(0) + 2|m_2|\mathbf{E}\,\bar{\bar{\xi}}_2}{2m_2^2}.$$

Доказательство. Как следует из (2), для доказательства этой теоремы необходимо исследовать асимптотику при $b \to \infty$ величин $\mathbf{E}\, e^{\lambda\chi_\pm(b)}$ и $\mathbf{E}\,\chi_\pm(b)$. Вначале используем следующее соотношение (см. также доказательство теоремы 2):

$$\mathbf{E}\, e^{\lambda\chi_+(b)} = e^{-\lambda b} \lim_{u\to0} r_{1+}^{-1}(u,\lambda)[r_{1+}(u,\lambda)]^{[b,\infty)}$$

$$= e^{-\lambda b} \lim_{u\to0} u^{-1}(u - \psi_1(\lambda)) r_{1-}(u,\lambda)[r_{1+}(u,\lambda)]^{[b,\infty)}, \tag{8}$$

В [4] установлено, что при $m_1 = \mathbf{E}\,\xi_1(1) > 0$ имеет место

$$\lim_{u\to0} r_{1-}(u,\lambda) = \mathbf{E}\, e^{\lambda\bar{\bar{\xi}}_1}. \tag{9}$$

Для асимптотического анализа выражения $[r_{1+}(u,\lambda)]^{[b,\infty)}$ в (8) приведем уточненный вариант леммы 1 из [2]. Обозначим, как и в [2],

$$v_u(\lambda)=\frac{(\lambda-\lambda_1(u))r_{1+}(u,\lambda)}{\lambda_1(u)}$$

и заметим, что

$$v_u(\lambda_1(u))=\frac{1}{\lambda_1(u)(r_{1+}^{-1})'(u,\lambda_1(u))},$$

где обозначено

$$(r_{1+}^{-1})'(u,\lambda_1(u))=\frac{\partial r_{1+}^{-1}(u,\lambda)}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_1(u)}.$$

Функции $v_u^{\pm}(\lambda)$ являются аналитическими в области $\operatorname{Re}\lambda\le\delta$, они равномерно ограничены по переменным u и λ и

$$v_u^{-1}(\lambda)\in L([0,\infty)),\qquad \frac{\lambda_1(u)v_u(\lambda)}{\lambda-\lambda_1(u)}\in L([0,\infty)).$$

Заметим также, что

$$[r_{1+}(u,\lambda)]^{[b,\infty)}=\left[\frac{\lambda_1(u)v_u(\lambda)}{\lambda-\lambda_1(u)}\right]^{[b,\infty)}=\left[\frac{\lambda_1(u)v_u(\lambda_1(u))}{\lambda-\lambda_1(u)}\right]^{[b,\infty)}$$
$$+\lambda_1(u)\left[\frac{v_u(\lambda)-v_u(\lambda_1(u))}{\lambda-\lambda_1(u)}\right]^{[b,\infty)}.$$

Применяя к последнему слагаемому теорему 2 из [8, Appendix 2], получим

$$\lambda_1(u)\left[\frac{v_u(\lambda)-v_u(\lambda_1(u))}{\lambda-\lambda_1(u)}\right]^{[b,\infty)}=\lambda_1(u)\int\limits_0^\infty e^{\lambda x}h(u,x)dx,$$

где выполняется $|h(u,x)|\le Ce^{-\varepsilon x}$ равномерно по $u\le\delta,\ x\ge b,$ здесь C — положительная постоянная. Поскольку

$$\left[\frac{\lambda_1(u)v_u(\lambda_1(u))}{\lambda-\lambda_1(u)}\right]^{[b,\infty)}=\frac{\lambda_1(u)v_u(\lambda_1(u))e^{\lambda b}}{(\lambda-\lambda_1(u))e^{\lambda_1(u)b}}=\frac{e^{(\lambda-\lambda_1(u)b)}}{(\lambda-\lambda_1(u))(r_{1+}^{-1})'(u,\lambda_1(u))},$$

получаем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (4)–(6). *Тогда при некоторых* $\varepsilon>0,\ \delta>0,\ \ 0<u\le\delta,$ *и* $\operatorname{Re}\lambda=0$ *имеет место представление*

$$[r_{1+}(u,\lambda)]^{[b,\infty)}=\frac{e^{(\lambda-\lambda_1(u))b}}{(\lambda-\lambda_1(u))(r_{1+}^{-1})'(u,\lambda_1(u))}+\lambda_1(u)\int\limits_b^\infty e^{\lambda x}h(u,x)dx,\quad(10)$$

где при любом $x\ge 0$ *равномерно по* $u,\ 0<u\le\delta,$

$$\int\limits_{b+x}^\infty|h(u,y)|dy=O(e^{-\varepsilon(b+x)}),\qquad b\to\infty.\quad(11)$$

В [9] установлено, что для произвольного однородного процесса $\xi_1(t)$ с независимыми приращениями при $\operatorname{Re}\nu < 0$, $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ и $u > 0$ выполняется

$$\int\limits_0^\infty e^{\nu x}\mathbf{E}\big(e^{\lambda\chi_+(x)-u\tau_+(x)};\ \tau_+(x)<\infty\big)dx = \frac{1}{\lambda-\nu}\Big[1-\frac{r_{1+}(u,\nu)}{r_{1+}(u,\lambda)}\Big]. \qquad (12)$$

Из (12) при $\nu = -1$ имеем (в нашем случае $\mathbf{P}(\tau_+(x)<\infty)=1$)

$$-\frac{r_{1+}(u,-1)}{r_{1+}(u,\lambda)} = (1+\lambda)\int\limits_0^\infty e^{-x}\mathbf{E}\big(e^{\lambda\chi_+(x)-u\tau_+(x)}\big)dx - 1. \qquad (13)$$

Отметим, что в силу условия (4) функция $r_{1+}^{-1}(u,\lambda)$ аналитична в точке $\lambda_1(u)$ (см. [2]). Дифференцируем по переменной λ обе части равенства (13):

$$-\Big(\frac{r_{1+}(u,-1)}{r_{1+}(u,\lambda)}\Big)'_\lambda = -r_{1+}(u,-1)(r_{1+}^{-1})'(u,\lambda)$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-x}\mathbf{E}\, e^{\lambda\chi_+(x)-u\tau_+(x)}dx + (1+\lambda)\int\limits_0^\infty e^{-x}\mathbf{E}\,\chi_+(x)e^{\lambda\chi_+(x)-u\tau_+(x)}dx. \qquad (14)$$

Положим $\lambda = \lambda_1(u)$ в (14) и устремим u к нулю. В результате будем иметь

$$-\lim_{u\to0} r_{1+}(u,-1)(r_{1+}^{-1})'(u,\lambda_1(u)) = 1 + \int\limits_0^\infty e^{-x}\mathbf{E}\,\chi_+(x)dx. \qquad (15)$$

При $m_1 = \mathbf{E}\,\xi_1(1) > 0$ из [6, теорема 3] (см. формулы (2.1), (2.2) и доказательство теоремы 3 в [6]) следует, что

$$(1+\lambda)\int\limits_0^\infty e^{-x}\mathbf{E}e^{\lambda\chi_+(x)}dx - 1 = c_1\psi_1(\lambda)\,\mathbf{E}\,e^{\lambda\bar{\bar{\xi}}_1}, \qquad (16)$$

$$c_1 = \lim_{u\to0}\frac{r_{1+}(u,-1)}{u} = \int\limits_0^\infty e^{-x}\,\mathbf{E}\,\tau_+(x)dx.$$

Продифференцируем обе части (16) и положим $\lambda = 0$, в результате получим

$$1 + \int\limits_0^\infty e^{-x}\mathbf{E}\chi_+(x)dx = c_1 m_1.$$

Сравнивая этот результат с (15), обнаруживаем, что

$$-\lim_{u\to0} r_{1+}(u,-1)(r_{1+}^{-1})'(u,\lambda_1(u)) = c_1 m_1. \qquad (17)$$

В [6, теорема 4] также доказано, что для распределения случайной величины χ_+ первого перескока через бесконечно удалённый барьер имеет место равенство

$$\mathbf{E}\, e^{\lambda\chi_+} = \frac{\psi_1(\lambda)}{m_1\lambda}\mathbf{E}\, e^{\lambda\bar{\bar{\xi}}_1}. \tag{18}$$

Возвращаемся к формуле (8). Имеем в силу (7), (9)–(11), (17) при $\operatorname{Re}\lambda = 0$ для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{u\to 0} r_{1+}^{-1}(u,\lambda)[r_{1+}(u,\lambda)]^{[b,\infty)} = \lim_{u\to 0}\frac{u-\psi_1(\lambda)}{u}r_{1-}(u,\lambda)\times$$

$$\times\Bigg[\frac{e^{(\lambda-\lambda_1(u))b}}{(\lambda-\lambda_1(u))(r_{1+}^{-1})'(u,\lambda_1(u))} + \lambda_1(u)\int\limits_b^\infty e^{\lambda x}h(u,x)dx\Bigg]$$

$$= -\frac{\psi_1(\lambda)e^{\lambda b}}{\lambda}\mathbf{E}\, e^{\lambda\bar{\bar{\xi}}_1}\lim_{u\to 0}\left[\frac{r_{1+}(u,-1)}{u}\,\frac{(r_{1+})^{-1}(u,-1)}{(r_{1+}^{-1})'(u,\lambda_1(u))} + \frac{\lambda_1(u)}{u}\int\limits_b^\infty e^{\lambda x}h(u,x)dx\right]$$

$$= \frac{\psi_1(\lambda)e^{\lambda b}}{m_1\lambda}\mathbf{E}\, e^{\lambda\bar{\bar{\xi}}_1}\big(1+O(e^{-\varepsilon b})\big), \qquad b\to\infty. \tag{19}$$

В итоге из (8) и (19) получаем

$$\mathbf{E}\, e^{\lambda\chi_+(b)} = \frac{\psi_1(\lambda)}{m_1\lambda}\mathbf{E}\, e^{\lambda\bar{\bar{\xi}}_1}\big(1+O(e^{-\varepsilon b})\big), \qquad b\to\infty. \tag{20}$$

Далее, с помощью (8), (19) и (20) нетрудно проверить, что

$$\mathbf{E}\,\chi_+(b) = \mathbf{E}\,\chi_+\big(1+O(e^{-\varepsilon b})\big). \tag{21}$$

Продифференцируем обе части (18) и устремим λ к нулю. Применив правило Лопиталя, получаем в результате

$$\mathbf{E}\,\chi_+ = \frac{\psi_1''(0)}{2m_1} + \mathbf{E}\,\bar{\bar{\xi}}_1. \tag{22}$$

Проведем теперь симметричные рассуждения относительно $\xi_2(t)$, для чего рассмотрим случайный процесс $\xi_3(t) = -\xi_2(t)$ и все характеристики, относящиеся этому процессу, снабдим индексом 3, например,

$$\tau_3 = \inf\{t\ge 0:\ \xi_3(t)\ge b\}, \qquad \chi_3(b) = \xi_3(\tau_3) - b.$$

Ясно, что $\psi_3(\lambda) = \psi_2(-\lambda)$, $m_3 = |m_2|$, и с вероятностью единица

$$\bar{\bar{\xi}}_3 := \inf_{t\ge 0}\xi_3(t) = -\sup_{t\ge 0}\xi_2(t) := -\bar{\xi}_2, \qquad \chi_3(b) = |\chi_-(-b)|,$$

и из (20) выводим

$$\mathbf{E}\, e^{\lambda\chi_3(b)} = \frac{\psi_3(\lambda)}{m_3\lambda}\mathbf{E}\, e^{\lambda\bar{\bar{\xi}}_3}\big(1+O(e^{-\varepsilon b})\big).$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}\, e^{\lambda\chi_-(-b)} = \mathbf{E}\, e^{-\lambda\chi_3(b)} = \frac{\psi_3(-\lambda)}{-m_3\lambda}\mathbf{E}\, e^{-\lambda\bar{\bar{\xi}}_3}\big(1+O(e^{-\varepsilon b})\big)$$

$$= \frac{\psi_2(\lambda)}{m_2\lambda}\mathbf{E}\, e^{\lambda\bar{\xi}_2}\big(1 + O(e^{-\varepsilon b})\big). \qquad (23)$$

Аналогично устанавливается, что

$$\mathbf{E}\,\chi_-(-b) = \mathbf{E}\,\chi_-\big(1 + O(e^{-\varepsilon b})\big), \qquad \mathbf{E}\,|\chi_-| = \frac{\psi_2''(0)}{2|m_2|} + \mathbf{E}\,\bar{\xi}_2. \qquad (24)$$

Из соотношений (2), (8), (19)–(24) следует доказательство теоремы 3. □

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 3, процесс $\xi_1(t)$ непрерывен снизу, а $\xi_2(t)$ непрерывен сверху. Тогда при некотором $\varepsilon > 0$ имеет место асимптотическое представление при $b \to \infty$*

$$W(\lambda) = \frac{1}{a}\left\{\left[\frac{e^{\lambda b}}{m_1\lambda(1+p\lambda)} - \frac{1}{\psi_1(\lambda)}\right] + \left[\frac{1}{m_2\lambda(1-q\lambda)} - \frac{e^{\lambda b}}{\psi_2(\lambda)}\right]\right\} + O(e^{-\varepsilon b}),$$

где

$$p = \int_0^\infty \mathbf{P}(\tau_1^-(-u) < \infty)du, \qquad \tau_1^-(-u) = \inf\{t > 0:\ \xi_1(t) \le -u\},$$

$$q = \int_0^\infty \mathbf{P}(\tau_2^+(u) < \infty)du, \qquad \tau_2^+(u) = \inf\{t > 0:\ \xi_2(t) \ge u\}.$$

Доказательство. В рассматриваемом случае преобразование Лапласа — Стилтьеса случайной величины χ_+ выражается в явном виде через характеристики процесса $\xi_1(t)$, а именно, в [6] установлено, что если процесс $\xi_1(t)$ не имеет отрицательных скачков (непрерывен снизу), то

$$\mathbf{E}\,e^{\lambda\chi_+} = \frac{\psi_1(\lambda)}{m_1\lambda(1+p\lambda)}.$$

Аналогично устанавливается, что если процесс не имеет положительных скачков, то

$$\mathbf{E}\,e^{\lambda\chi_-} = \frac{\psi_2(\lambda)}{m_2\lambda(1-q\lambda)}.$$

Подстановка этих представлений для $\mathbf{E}\,e^{\lambda\chi_\pm}$ в утверждение теоремы 3 завершает доказательство следствия. □

References

[1] A.A. Borovkov, *Probability Theory*, Springer, London, 2013. Zbl 1297.60002

[2] V.I. Lotov, V.R. Xodjibayev, *On a stochastic process with switchings*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 1531—1546.

[3] V.I. Lotov, *On a random walk with switchings*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 1320—1331.

[4] B.A. Rogozin,*On distributions of functionals related to boundary problems for processes with independent increments*, Theory Probab. Appl., **11**:4 (1966), 580–591.

[5] B.A. Rogozin, *Distribution of the maximum of a process with independent increments*, Sib. Math. J., **10**:6 (1969), 989–1010.

[6] A.A. Mogul'skii, *On the distribution of the first jump for a process with independent increments*, Theory Probab. Appl., **21**:3 (1977), 470–481.
[7] V.R. Khodzhibaev, *Asymptotic representations for characteristics of exit from an interval for stochastic processes with independent increments*, Siberian Adv. Math., **7**:3 (1997), 75—86.
[8] A.A. Borovkov, *Stochastic Processes in Queueing Theory*, Springer, New York, 1976. Zbl 0319.60057
[9] E.A. Pecherskii, B.A. Rogozin, *On joint distributions of random variables associated with fluctuations of a process with independent increments*, Theory Probab. Appl., **14**:3 (1969), 410–423.

Vladimir Ivanovich Lotov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia,
E-mail address: lotov@math.nsc.ru

Vali Rakhimdjanovich Khodjibayev
Namangan State Technical University,
Islam Karimov str., 12,
160103, Namangan, Uzbekistan,
Institute of Mathematics Uzbekistan Akademy of Sciences,
Universitetskaya str., 46,
100174, Tashkent, Uzbekistan
E-mail address: vkhodjibayev@mail.ru