

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПРОЕКЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ  
РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ  
СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЛАМЕ НА ОСНОВЕ  
ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СЛОБОДЯНСКОГО И МЕТОДА  
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

К.К. САБЕЛЬФЕЛЬД , Д.Д. СМИРНОВ 

**Abstract:** In this paper, a new stochastic simulation method is proposed to solve a mixed boundary value problem for the system of Lamé equations, which describes the displacement vector of an elastic body. Both planar and spatial problems with mixed boundary conditions are considered in detail. The basic idea is to use the Slobodyanskii representation of the solution through auxiliary harmonic functions. In our work, we use an approximation of the solution in the form of linear combinations of fundamental solutions for the Laplace equation, as is done in the method of fundamental solutions. As a result, the problem reduces to solving a system of linear algebraic equations for the coefficients in this linear combination. This system is solved by a special stochastic projection method.

---

Стохастический проекционный алгоритм решения смешанной краевой задачи для системы уравнений Ламе на основе представления Слободянского и метода фундаментальных решений.

© 2025 Сабельфельд К.К. и Смирнов Д.Д..

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда, грант N 24-11-00107.

**Ключевые слова:** Уравнения Ламе, смешанная краевая задача, представление Слободянского, метод фундаментальных решений, стохастический проекционный метод.

## 1 Введение

Известно, что система уравнений Ламе, описывающая вектор смещений упругого изотропного тела, представляет серьезные трудности при ее численном решении как разностными методами, так и методами конечных элементов, в особенности, когда заданы смешанные граничные условия. Применение метода фундаментальных решений приводит к матрице с очень большим значением числа обусловленности, а переход к системе граничных интегральных уравнений связан с сингулярными ядрами, интегрируемыми лишь в смысле главного значения [4]. Одновременно хорошо известно, что для случая скалярных уравнений Лапласа все перечисленные подходы к решению граничных задач приводят к устойчивым и эффективным методам [2], [3]. Однако прямой связи между граничными задачами для уравнения Ламе и уравнения Лапласа не существует. В работе Слободянского [13] установлена связь общего решения уравнения Ламе, без граничных условий, с решениями, также общими, уравнения Лапласа. Обобщение таких представлений на различные классы уравнений даны в [6]. Однако здесь возникает трудная задача поиска этих гармонических функций таким образом, чтобы выполнялись исходные смешанные граничные условия для уравнения Ламе, что представляет собой отдельную нетривиальную задачу даже в случае задачи Дирихле. Случай задачи Дирихле рассмотрен в нашей недавней работе [12], а также в [1].

В настоящей работе мы рассматриваем общий случай смешанных граничных условий, когда на части границы заданы смещения (условия Дирихле), а на остальной части границы заданы напряжения (обобщенные условия Неймана). В нашей работе мы используем приближение решения в виде линейной комбинации фундаментальных решений для уравнения Лапласа, как это делается в методе фундаментальных решений [10]. В итоге задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов в этой линейной комбинации. Данная система решается с помощью стохастического проекционного метода, который оказывается устойчивым, поскольку в общей матрице участвует только фундаментальное решение уравнения Лапласа, а не уравнения Ламе. Данный подход позволяет, после вычисления коэффициентов разложения, сразу же вычислить решение уравнения Ламе в произвольных точках внутри области простым суммированием значений линейной комбинации в этих точках.

## 2 Постановка задачи

Пусть  $\Omega$  – открытая ограниченная область в пространстве  $\mathbb{R}^d$ ,  $\partial\Omega$  – граница области  $\Omega$ ,  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ ,  $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \emptyset$ . Мы рассматриваем в данной статье варианты  $d = 2$  и  $d = 3$ , то есть плоскую и пространственную задачу теории упругости.

Смешанная краевая задача для системы уравнений Ламе имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu \Delta \vec{U} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{U}) &= 0, \\ \vec{U}|_{\partial\Omega_1} &= \vec{G}, \quad \vec{r} \in \partial\Omega_1, \\ \vec{n} \cdot \hat{T}|_{\partial\Omega_2} &= \vec{F}, \quad \vec{r} \in \partial\Omega_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\lambda, \mu > 0$  – константы упругости,  $\vec{U} = (U_1, \dots, U_d)$  – искомый вектор решения, непрерывные вектор-функции  $\vec{G} = (G_1, \dots, G_d)$  и  $\vec{F} = (F_1, \dots, F_d)$  заданы на границе,  $\vec{n}$  – внешняя единичная нормаль к границе  $\partial\Omega_2$ , а  $\vec{n} \cdot \hat{T}|_{\partial\Omega_2}$  на границе  $\partial\Omega_2$ , определяется следующим образом [5]

$$\vec{n} \cdot \hat{T}|_{\partial\Omega_2} = 2\mu \left( \frac{\lambda}{2\mu} \operatorname{div} \vec{U} \cdot \vec{n} + \vec{n} \cdot \nabla \vec{U} + 0.5 \cdot \vec{n} \times \operatorname{rot} \vec{U} \right). \quad (2)$$

Общее решение системы Ламе (1) может быть записано в виде представления Слободянского [13]:

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \gamma \vec{W} + (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{W} - \vec{r} \cdot \operatorname{div} \vec{W}, \\ \Delta \vec{W} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, а  $\vec{W} = (W_1, \dots, W_d)$  – вектор, компоненты которого – гармонические функции. Константа  $\gamma$  явно выражается через  $d$  и константы  $\lambda$  и  $\mu$ . В данной работе смешанная краевая задача для системы Ламе (1) решается в двумерном пространстве  $\mathbb{R}^2$  и в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$ . В этой системе задаются константы  $\lambda, \mu > 0$  равными друг другу  $\lambda = \mu$ , тогда в двумерном случае  $\gamma = 2$ , в трехмерном случае  $\gamma = 3$ .

## 3 Представление Слободянского. Двумерный случай.

Для двумерного случая смешанная краевая задача для системы Ламе (1) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \mu \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y} &= 0, \\ U_1 &= G_1, \\ U_2 &= G_2, \end{aligned} \quad (4)$$

при  $(x, y) \in \partial\Omega_1$ ,

$$\begin{aligned} \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial U_2}{\partial y} \right) n_x + \left( \mu \frac{\partial U_1}{\partial y} + \mu \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) n_y &= F_1, \\ \left( \mu \frac{\partial U_1}{\partial y} + \mu \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) n_x + \left( \lambda \frac{\partial U_1}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_2}{\partial y} \right) n_y &= F_2, \end{aligned}$$

при  $(x, y) \in \partial\Omega_2$ .

Для двумерного случая представление Слободянского (3) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} U_1 &= 2W_1 + y \frac{\partial W_1}{\partial y} - x \frac{\partial W_2}{\partial y}, \\ U_2 &= -y \frac{\partial W_1}{\partial x} + 2W_2 + x \frac{\partial W_2}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5)$$

Теперь можно переформулировать исходную смешанную краевую задачу (4) для системы Ламе с учетом представления Слободянского следующим образом:

$$\begin{aligned} U_1 &= 2W_1 + y \frac{\partial W_1}{\partial y} - x \frac{\partial W_2}{\partial y}, \\ U_2 &= -y \frac{\partial W_1}{\partial x} + 2W_2 + x \frac{\partial W_2}{\partial x}, \\ U_1 &= G_1, \\ U_2 &= G_2, \end{aligned} \quad (6)$$

при  $(x, y) \in \partial\Omega_1$ ,

$$\begin{aligned} \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial U_2}{\partial y} \right) n_x + \left( \mu \frac{\partial U_1}{\partial y} + \mu \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) n_y &= F_1, \\ \left( \mu \frac{\partial U_1}{\partial y} + \mu \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) n_x + \left( \lambda \frac{\partial U_1}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_2}{\partial y} \right) n_y &= F_2, \end{aligned}$$

при  $(x, y) \in \partial\Omega_2$ ,

$$\begin{aligned} \Delta W_1 &= 0, \\ \Delta W_2 &= 0, \end{aligned}$$

то есть надо найти решение системы (6) (функции  $U_1$  и  $U_2$ ) в области  $\Omega$  при заданных значениях функций  $G_1$ ,  $G_2$  на границе  $\partial\Omega_1$ , и  $F_1$  и  $F_2$  на границе  $\partial\Omega_2$ , когда известно, что функции  $W_1$  и  $W_2$  являются гармоническими (удовлетворяют уравнению Лапласа), но для них не заданы граничные условия.

Так как в краевые условия Неймана входят частные производные функций  $U_1$  и  $U_2$ , то выразим их через функции  $W_1$  и  $W_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x} &= 2 \frac{\partial W_1}{\partial x} + y \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial W_2}{\partial y} - x \frac{\partial^2 W_2}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial U_1}{\partial y} &= 3 \frac{\partial W_1}{\partial y} + y \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} - x \frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_2}{\partial x} &= -y \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial W_2}{\partial x} + x \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial U_2}{\partial y} &= -\frac{\partial W_1}{\partial x} - y \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial W_2}{\partial y} + x \frac{\partial^2 W_2}{\partial x \partial y},\end{aligned}$$

Тогда система (6) запишется в виде:

$$\begin{aligned}2W_1 + y \frac{\partial W_1}{\partial y} - x \frac{\partial W_2}{\partial y} &= G_1, \\ -y \frac{\partial W_1}{\partial x} + 2W_2 + x \frac{\partial W_2}{\partial x} &= G_2,\end{aligned}\tag{8}$$

при  $(x, y) \in \partial\Omega_1$ ,

$$\begin{aligned}5 \frac{\partial W_1}{\partial x} n_x + 2y \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} n_x + 3 \frac{\partial W_1}{\partial y} n_y - 2y \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} n_y - \\ - \frac{\partial W_2}{\partial y} n_x - 2x \frac{\partial^2 W_2}{\partial x \partial y} n_x + 3 \frac{\partial W_2}{\partial x} n_y + 2x \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} n_y = F_1, \\ 3 \frac{\partial W_1}{\partial y} n_x - 2y \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} n_x - \frac{\partial W_1}{\partial x} n_y - 2y \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} n_y + \\ + 3 \frac{\partial W_2}{\partial x} n_x + 2x \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} n_x + 5 \frac{\partial W_2}{\partial y} n_y + 2x \frac{\partial^2 W_2}{\partial x \partial y} n_y = F_2,\end{aligned}$$

при  $(x, y) \in \partial\Omega_2$ ,

$$\begin{aligned}\Delta W_1 &= 0, \\ \Delta W_2 &= 0.\end{aligned}$$

#### 4 Метод фундаментальных решений. Двумерный случай

В данной работе задаются  $\lambda = \mu = 1$ . В двумерном пространстве  $\mathbb{R}^2$  фундаментальное решение уравнения Лапласа определяется как:

$E(x, y; x', y') = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ , которое является решением уравнения  $\Delta E = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , где  $\mathbf{r} = (x, y)$ ,  $\mathbf{r}' = (x', y')$ .

Возьмем на границе  $\partial\Omega$  коллокационные точки  $(x_m, y_m)$ ,  $m = 1, \dots, M$  – количество коллокационных точек, возьмем вне области  $\Omega$  источники  $(x'_n, y'_n)$ ,  $n = 1, \dots, N$  – количество источников. Представим гармонические функции  $W_1$  и  $W_2$  в следующем виде:

$$\begin{aligned}W_1(x_m, y_m) &= \sum_{n=1}^N c_n E(x_m, y_m; x'_n, y'_n), \\ W_2(x_m, y_m) &= \sum_{n=1}^N d_n E(x_m, y_m; x'_n, y'_n),\end{aligned}\tag{9}$$

где  $E(x_m, y_m; x'_n, y'_n) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2}$ ,  $m = 1, \dots, M$  – количество коллокационных точек,  $n = 1, \dots, N$  – количество источников,

Частные производные сложной функции  $V(x, y) = \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$  (константы  $x_0, y_0$ ):

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -\frac{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right)^2}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \frac{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right)^2}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= -\frac{2(x - x_0)(y - y_0)}{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right)^2}.\end{aligned}$$

Введем обозначения, пусть  $-\frac{1}{2\pi} = \sigma$  и  $(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2 = \delta_{mn}$ , тогда

$$\begin{aligned}\sqrt{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2} &= \sqrt{\delta_{mn}}, \\ \left((x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2\right)^2 &= \delta_{mn}^2.\end{aligned}$$

Для первой компоненты: Подставляя выражение (9) в выражение (8) для части коллокационных точек, где заданы граничные условия Дирихле, используя правила дифференцирования, и приведя затем подобные слагаемые получаем:

$$\begin{aligned}& \sum_{n=1}^N \left( 2\sigma \ln \sqrt{\delta_{mn}} + \sigma y_m \left( \frac{(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}} \right) \right) c_n + \\ & + \sum_{n=1}^N \left( \sigma (-x_m) \left( \frac{(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}} \right) \right) d_n = \\ & = \sum_{n=1}^N i_{mn} c_n + \sum_{n=1}^N j_{mn} d_n = G_1(x_m, y_m), m = 1, \dots, \tilde{M}.\end{aligned}$$

Подставляя выражение (9) в выражение (8) для части коллокационных точек, где заданы граничные условия Неймана, используя правила дифференцирования, и приведя затем подобные слагаемые, получаем:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^N \left( 5\sigma \left( \frac{(x_m - x'_n)}{\delta_{mn}} \right) n_x + 2\sigma y_m \left( \frac{(-2(x_m - x'_n)(y_m - y'_n))}{\delta_{mn}^2} \right) n_x + \right. \\
 & + 3\sigma \left( \frac{(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}} \right) n_y + (-2)\sigma y_m \left( \frac{-(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2}{\delta_{mn}^2} \right) n_y \Big) c_n + \\
 & + \sum_{n=1}^N \left( -\sigma \left( \frac{(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}} \right) n_x + \right. \\
 & + (-2)\sigma x_m \left( \frac{(-2(x_m - x'_n)(y_m - y'_n))}{\delta_{mn}^2} \right) n_x + 3\sigma \left( \frac{(x_m - x'_n)}{\delta_{mn}} \right) n_y + \\
 & + 2\sigma x_m \left( \frac{-(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2}{\delta_{mn}^2} \right) n_y \Big) d_n = \\
 & = \sum_{n=1}^N i_{mn} c_n + \sum_{n=1}^N j_{mn} d_n = F_1(x_m, y_m), \quad m = \tilde{M} + 1, \dots, M.
 \end{aligned}$$

Или в матричном виде:  $Ic + Jd = f$ , где

матрица  $I = \begin{pmatrix} i_{11} & \cdots & i_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ i_{M1} & \cdots & i_{MN} \end{pmatrix}$  с элементами  $i_{mn}$ , вектор неизвестных

коэффициентов, которые требуется найти,  $c = (c_1, \dots, c_N)^T$ , и матрица

$J = \begin{pmatrix} j_{11} & \cdots & j_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ j_{M1} & \cdots & j_{MN} \end{pmatrix}$  с элементами  $j_{mn}$ , и второй вектор неизвест-

ных коэффициентов, которые требуется найти,  $d = (d_1, \dots, d_N)^T$ . Вектор правой части:

$$f = (G_1(x_1, y_1), \dots, G_1(x_{\tilde{M}}, y_{\tilde{M}}), F_1(x_{\tilde{M}+1}, y_{\tilde{M}+1}), \dots, F_1(x_M, y_M))^T.$$

Для второй компоненты:

Подставляя выражение (9) в выражение (8) для части коллокационных точек, где заданы граничные условия Дирихле, используя правила дифференцирования, и приведя затем подобные слагаемые, получаем:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^N \left( \sigma(-y_m) \left( \frac{(x_m - x'_n)}{\delta_{mn}} \right) \right) c_n + \\
 & + \sum_{n=1}^N \left( 2\sigma \ln \sqrt{\delta_{mn}} + \sigma x_m \left( \frac{(x_m - x'_n)}{\delta_{mn}} \right) \right) d_n = \\
 & = \sum_{n=1}^N k_{mn} c_n + \sum_{n=1}^N l_{mn} d_n = G_2(x_m, y_m), \quad m = 1, \dots, \tilde{M}.
 \end{aligned}$$

Подставляя выражение (9) в выражение (8) для части коллокационных точек, где заданы граничные условия Неймана, используя правила дифференцирования, и приведя затем подобные слагаемые, получаем:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N \left( 3\sigma \left( \frac{y_m - y'_n}{\delta_{mn}} \right) n_x + (-2)\sigma y_m \left( \frac{-(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2}{\delta_{mn}^2} \right) n_x + \right. \\
& + (-\sigma) \left( \frac{x_m - x'_n}{\delta_{mn}} \right) n_y + (-2)\sigma y_m \left( \frac{(-2)(x_m - x'_n)(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}^2} \right) n_y \Big) c_n + \\
& + \sum_{n=1}^N \left( 3\sigma \left( \frac{x_m - x'_n}{\delta_{mn}} \right) n_x + 2\sigma x_m \left( \frac{-(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2}{\delta_{mn}^2} \right) n_x + \right. \\
& + 5\sigma \left( \frac{y_m - y'_n}{\delta_{mn}} \right) n_y + 2\sigma x_m \left( \frac{(-2)(x_m - x'_n)(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}^2} \right) n_y \Big) d_n = \\
& = \sum_{n=1}^N k_{mn} c_n + \sum_{n=1}^N l_{mn} d_n = F_2(x_m, y_m), \quad m = \tilde{M} + 1, \dots, M.
\end{aligned}$$

Или в матричном виде:  $Kc + Ld = g$ , где

матрица  $K = \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{M1} & \cdots & k_{MN} \end{pmatrix}$  с элементами  $k_{mn}$ , вектор неизвест-

ных коэффициентов, которые требуется найти,  $c = (c_1, \dots, c_N)^T$ , матри-

ца  $L = \begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{M1} & \cdots & l_{MN} \end{pmatrix}$  с элементами  $l_{mn}$ , вектор неизвестных коэф-

фициентов, которые требуется найти,  $d = (d_1, \dots, d_N)^T$ . Вектор правой части:

$$g = (G_2(x_1, y_1), \dots, G_2(x_{\tilde{M}}, y_{\tilde{M}}), F_2(x_{\tilde{M}+1}, y_{\tilde{M}+1}), \dots, F_2(x_M, y_M))^T.$$

Таким образом, с помощью метода фундаментальных решений система (8) в матричном виде выглядит следующим образом:

$$Ic + Jd = f, \quad (10)$$

$$Kc + Ld = g.$$

Матрицы  $I$ ,  $J$ ,  $K$ ,  $L$  размера  $M \times N$ , вектора неизвестных  $c$ ,  $d$  размера  $N$ , вектора правой части  $f, g$  размера  $M$ . Если записать (10) в блочном виде, то получим СЛАУ:

$$Ax = b, \quad (11)$$

где  $A = \begin{pmatrix} I & J \\ K & L \end{pmatrix}$ ,  $x = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ .

### 5 Представление Слободянского. Трехмерный случай.

Для трехмерного случая смешанная краевая задача для системы Ламе (1) имеет следующий вид. Три уравнения на компоненты смещения

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U_3}{\partial x \partial z} = 0, \quad (12)$$

$$\mu \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U_3}{\partial y \partial z} = 0,$$

$$\mu \frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U_3}{\partial y^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial z} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial z} = 0,$$

с граничными условиями Дирихле

$$U_1 = G_1, U_2 = G_2, U_3 = G_3, \quad (x, y, z) \in \partial\Omega_1.$$

и условиями Неймана на второй части границы

$$\begin{aligned} & \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial U_2}{\partial y} + \lambda \frac{\partial U_3}{\partial z} \right) n_x + \left( \mu \frac{\partial U_1}{\partial y} + \mu \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) n_y + \\ & + \left( \mu \frac{\partial U_1}{\partial z} + \mu \frac{\partial U_3}{\partial x} \right) n_z = F_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \mu \frac{\partial U_1}{\partial y} + \mu \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) n_x + \left( \lambda \frac{\partial U_1}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_2}{\partial y} + \lambda \frac{\partial U_3}{\partial z} \right) n_y + \\ & + \left( \mu \frac{\partial U_2}{\partial z} + \mu \frac{\partial U_3}{\partial y} \right) n_z = F_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \mu \frac{\partial U_1}{\partial z} + \mu \frac{\partial U_3}{\partial x} \right) n_x + \left( \mu \frac{\partial U_2}{\partial z} + \mu \frac{\partial U_3}{\partial y} \right) n_y + \\ & + \left( \lambda \frac{\partial U_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial U_2}{\partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_3}{\partial z} \right) n_z = F_3, \end{aligned}$$

при  $(x, y, z) \in \partial\Omega_2$ .

Для трехмерного случая представление Слободянского (3) имеет следующий вид:

$$U_1 = 3W_1 + y \frac{\partial W_1}{\partial y} + z \frac{\partial W_1}{\partial z} - x \frac{\partial W_2}{\partial y} - x \frac{\partial W_3}{\partial z}, \quad (13)$$

$$U_2 = -y \frac{\partial W_1}{\partial x} + 3W_2 + x \frac{\partial W_2}{\partial x} + z \frac{\partial W_2}{\partial z} - y \frac{\partial W_3}{\partial z},$$

$$U_3 = -z \frac{\partial W_1}{\partial x} - z \frac{\partial W_2}{\partial y} + 3W_3 + x \frac{\partial W_3}{\partial x} + y \frac{\partial W_3}{\partial y}.$$

Теперь можно переформулировать исходную смешанную краевую задачу (12) для системы Ламе с учетом представления Слободянского следующим образом: три уравнения на компоненты

$$U_1 = 3W_1 + y \frac{\partial W_1}{\partial y} + z \frac{\partial W_1}{\partial z} - x \frac{\partial W_2}{\partial y} - x \frac{\partial W_3}{\partial z}, \quad (14)$$

$$U_2 = -y \frac{\partial W_1}{\partial x} + 3W_2 + x \frac{\partial W_2}{\partial x} + z \frac{\partial W_2}{\partial z} - y \frac{\partial W_3}{\partial z},$$

$$U_3 = -z \frac{\partial W_1}{\partial x} - z \frac{\partial W_2}{\partial y} + 3W_3 + x \frac{\partial W_3}{\partial x} + y \frac{\partial W_3}{\partial y},$$

с граничными условиями Дирихле

$$U_1 = G_1, U_2 = G_2, U_3 = G_3, \quad (x, y, z) \in \partial\Omega_1$$

и условиями Неймана на второй части границы

$$\left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial U_2}{\partial y} + \lambda \frac{\partial U_3}{\partial z} \right) n_x + \left( \mu \frac{\partial U_1}{\partial y} + \mu \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) n_y +$$

$$+ \left( \mu \frac{\partial U_1}{\partial z} + \mu \frac{\partial U_3}{\partial x} \right) n_z = F_1,$$

$$\left( \mu \frac{\partial U_1}{\partial y} + \mu \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) n_x + \left( \lambda \frac{\partial U_1}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_2}{\partial y} + \lambda \frac{\partial U_3}{\partial z} \right) n_y +$$

$$+ \left( \mu \frac{\partial U_2}{\partial z} + \mu \frac{\partial U_3}{\partial y} \right) n_z = F_2,$$

$$\left( \mu \frac{\partial U_1}{\partial z} + \mu \frac{\partial U_3}{\partial x} \right) n_x + \left( \mu \frac{\partial U_2}{\partial z} + \mu \frac{\partial U_3}{\partial y} \right) n_y +$$

$$+ \left( \lambda \frac{\partial U_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial U_2}{\partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_3}{\partial z} \right) n_z = F_3,$$

при  $(x, y, z) \in \partial\Omega_2$ . Функции  $W_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  являются гармоническими

$$\Delta W_1 = 0, \quad \Delta W_2 = 0, \quad \Delta W_3 = 0.$$

Таким образом, надо найти решение системы (14) (функции  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$ ) в области  $\Omega$  при заданных значениях функций  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  на границе  $\partial\Omega_1$ , и  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  на границе  $\partial\Omega_2$ , если дано, что функции  $W_1$ ,  $W_2$  и  $W_3$  являются гармоническими, но для них неизвестны граничные условия. Так как в краевые условия Неймана входят частные производные функций  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$ , то выразим их через функции  $W_1$ ,  $W_2$  и  $W_3$ :

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = 3 \frac{\partial W_1}{\partial x} + y \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial W_2}{\partial y} - x \frac{\partial^2 W_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial W_3}{\partial z} - x \frac{\partial^2 W_3}{\partial x \partial z}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} = 4 \frac{\partial W_1}{\partial y} + y \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 W_1}{\partial y \partial z} - x \frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} - x \frac{\partial^2 W_3}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial z} = 4 \frac{\partial W_1}{\partial z} + z \frac{\partial^2 W_1}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 W_1}{\partial y \partial z} - x \frac{\partial^2 W_2}{\partial y \partial z} - x \frac{\partial^2 W_3}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} = -y \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial W_2}{\partial x} + x \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 W_2}{\partial x \partial z} - y \frac{\partial^2 W_3}{\partial x \partial z},$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial y} = -\frac{\partial W_1}{\partial x} - y \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial W_2}{\partial y} + x \frac{\partial^2 W_2}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 W_2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial W_3}{\partial z} - y \frac{\partial^2 W_3}{\partial y \partial z},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_2}{\partial z} &= -y \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial z} + 4 \frac{\partial W_2}{\partial z} + z \frac{\partial^2 W_2}{\partial z^2} + x \frac{\partial^2 W_2}{\partial x \partial z} - y \frac{\partial^2 W_3}{\partial z^2}, \\
\frac{\partial U_3}{\partial x} &= -z \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 W_2}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial W_3}{\partial x} + x \frac{\partial^2 W_3}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 W_3}{\partial x \partial y}, \\
\frac{\partial U_3}{\partial y} &= -z \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial W_3}{\partial y} + y \frac{\partial^2 W_3}{\partial y^2} + x \frac{\partial^2 W_3}{\partial x \partial y}, \\
\frac{\partial U_3}{\partial z} &= -\frac{\partial W_1}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial W_2}{\partial y} - z \frac{\partial^2 W_2}{\partial y \partial z} + 3 \frac{\partial W_3}{\partial z} + x \frac{\partial^2 W_3}{\partial x \partial z} + y \frac{\partial^2 W_3}{\partial y \partial z},
\end{aligned}$$

тогда система (14) запишется в виде:

$$\begin{aligned}
3W_1 + y \frac{\partial W_1}{\partial y} + z \frac{\partial W_1}{\partial z} - x \frac{\partial W_2}{\partial y} - x \frac{\partial W_3}{\partial z} &= G_1, \\
-y \frac{\partial W_1}{\partial x} + 3W_2 + x \frac{\partial W_2}{\partial x} + z \frac{\partial W_2}{\partial z} - y \frac{\partial W_3}{\partial z} &= G_2, \\
-z \frac{\partial W_1}{\partial x} - z \frac{\partial W_2}{\partial y} + 3W_3 + x \frac{\partial W_3}{\partial x} + y \frac{\partial W_3}{\partial y} &= G_3,
\end{aligned} \tag{16}$$

при  $(x, y, z) \in \partial\Omega_1$ .

На второй части границы, где заданы условия Неймана

$$\sum_{i=1}^{27} \alpha^{(i)} = F_1,$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha^{(1)} &= 7 \frac{\partial W_1}{\partial x} n_x, \alpha^{(2)} = 2y \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} n_x, \alpha^{(3)} = 2z \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial z} n_x, \\
\alpha^{(4)} &= 4 \frac{\partial W_1}{\partial y} n_y, \alpha^{(5)} = -y \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} n_y, \alpha^{(6)} = y \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} n_y, \\
\alpha^{(7)} &= z \frac{\partial^2 W_1}{\partial y \partial z} n_y, \alpha^{(8)} = 4 \frac{\partial W_1}{\partial z} n_z, \alpha^{(9)} = -z \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} n_z, \\
\alpha^{(10)} &= z \frac{\partial^2 W_1}{\partial z^2} n_z, \alpha^{(11)} = y \frac{\partial^2 W_1}{\partial y \partial z} n_z, \alpha^{(12)} = -\frac{\partial W_2}{\partial y} n_x, \\
\alpha^{(13)} &= -2x \frac{\partial^2 W_2}{\partial x \partial y} n_x, \alpha^{(14)} = 4 \frac{\partial W_2}{\partial x} n_y, \alpha^{(15)} = x \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} n_y, \\
\alpha^{(16)} &= -x \frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} n_y, \alpha^{(17)} = z \frac{\partial^2 W_2}{\partial x \partial z} n_y, \alpha^{(18)} = -z \frac{\partial^2 W_2}{\partial x \partial y} n_z, \\
\alpha^{(19)} &= -x \frac{\partial^2 W_2}{\partial y \partial z} n_z, \alpha^{(20)} = -\frac{\partial W_3}{\partial z} n_x, \alpha^{(21)} = -2x \frac{\partial^2 W_3}{\partial x \partial z} n_x, \\
\alpha^{(22)} &= -y \frac{\partial^2 W_3}{\partial x \partial z} n_y, \alpha^{(23)} = -x \frac{\partial^2 W_3}{\partial y \partial z} n_y, \alpha^{(24)} = 4 \frac{\partial W_3}{\partial x} n_z, \\
\alpha^{(25)} &= x \frac{\partial^2 W_3}{\partial x^2} n_z, \alpha^{(26)} = -x \frac{\partial^2 W_3}{\partial z^2} n_z, \alpha^{(27)} = y \frac{\partial^2 W_3}{\partial x \partial y} n_z,
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{27} \beta^{(i)} = F_2,$$

где

$$\begin{aligned} \beta^{(1)} &= 4 \frac{\partial W_1}{\partial y} n_x, \beta^{(2)} = -y \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} n_x, \beta^{(3)} = y \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} n_x, \\ \beta^{(4)} &= z \frac{\partial^2 W_1}{\partial y \partial z} n_x, \beta^{(5)} = -\frac{\partial W_1}{\partial x} n_y, \beta^{(6)} = -2y \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} n_y, \\ \beta^{(7)} &= -z \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} n_z, \beta^{(8)} = -y \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial z} n_z, \beta^{(9)} = 4 \frac{\partial W_2}{\partial x} n_x, \\ \beta^{(10)} &= x \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} n_x, \beta^{(11)} = -x \frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} n_x, \beta^{(12)} = z \frac{\partial^2 W_2}{\partial x \partial z} n_x, \\ \beta^{(13)} &= 7 \frac{\partial W_2}{\partial y} n_y, \beta^{(14)} = 2x \frac{\partial^2 W_2}{\partial x \partial y} n_y, \beta^{(15)} = 2z \frac{\partial^2 W_2}{\partial y \partial z} n_y, \\ \beta^{(16)} &= 4 \frac{\partial W_2}{\partial z} n_z, \beta^{(17)} = -z \frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} n_z, \beta^{(18)} = z \frac{\partial^2 W_2}{\partial z^2} n_z, \\ \beta^{(19)} &= x \frac{\partial^2 W_2}{\partial x \partial z} n_z, \beta^{(20)} = -y \frac{\partial^2 W_3}{\partial x \partial z} n_x, \beta^{(21)} = -x \frac{\partial^2 W_3}{\partial y \partial z} n_x, \\ \beta^{(22)} &= -\frac{\partial W_3}{\partial z} n_y, \beta^{(23)} = -2y \frac{\partial^2 W_3}{\partial y \partial z} n_y, \beta^{(24)} = 4 \frac{\partial W_3}{\partial y} n_z, \\ \beta^{(25)} &= y \frac{\partial^2 W_3}{\partial y^2} n_z, \beta^{(26)} = -y \frac{\partial^2 W_3}{\partial z^2} n_z, \beta^{(27)} = x \frac{\partial^2 W_3}{\partial x \partial y} n_z, \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{27} \gamma^{(i)} = F_3,$$

где

$$\begin{aligned} \gamma^{(1)} &= 4 \frac{\partial W_1}{\partial z} n_x, \gamma^{(2)} = -z \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} n_x, \gamma^{(3)} = z \frac{\partial^2 W_1}{\partial z^2} n_x, \\ \gamma^{(4)} &= y \frac{\partial^2 W_1}{\partial y \partial z} n_x, \gamma^{(5)} = -z \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} n_y, \gamma^{(6)} = -y \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial z} n_y, \\ \gamma^{(7)} &= -\frac{\partial W_1}{\partial x} n_z, \gamma^{(8)} = -2z \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial z} n_z, \gamma^{(9)} = -z \frac{\partial^2 W_2}{\partial x \partial y} n_x, \\ \gamma^{(10)} &= -x \frac{\partial^2 W_2}{\partial y \partial z} n_x, \gamma^{(11)} = 4 \frac{\partial W_2}{\partial z} n_y, \gamma^{(12)} = -z \frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} n_y, \\ \gamma^{(13)} &= z \frac{\partial^2 W_2}{\partial z^2} n_y, \gamma^{(14)} = x \frac{\partial^2 W_2}{\partial x \partial z} n_y, \gamma^{(15)} = -\frac{\partial W_2}{\partial y} n_z, \\ \gamma^{(16)} &= -2z \frac{\partial^2 W_2}{\partial y \partial z} n_z, \gamma^{(17)} = 4 \frac{\partial W_3}{\partial x} n_x, \gamma^{(18)} = x \frac{\partial^2 W_3}{\partial x^2} n_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma^{(19)} &= -x \frac{\partial^2 W_3}{\partial z^2} n_x, \gamma^{(20)} = y \frac{\partial^2 W_3}{\partial x \partial y} n_x, \gamma^{(21)} = 4 \frac{\partial W_3}{\partial y} n_y, \\ \gamma^{(22)} &= y \frac{\partial^2 W_3}{\partial y^2} n_y, \gamma^{(23)} = -y \frac{\partial^2 W_3}{\partial z^2} n_y, \gamma^{(24)} = x \frac{\partial^2 W_3}{\partial x \partial y} n_y, \\ \gamma^{(25)} &= 7 \frac{\partial W_3}{\partial z} n_z, \gamma^{(26)} = 2x \frac{\partial^2 W_3}{\partial x \partial z} n_z, \gamma^{(27)} = 2y \frac{\partial^2 W_3}{\partial y \partial z} n_z,\end{aligned}$$

при  $(x, y, z) \in \partial\Omega_2$ . Функции  $W_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  гармонические.

## 6 Метод фундаментальных решений. Трехмерный случай

В данной работе задаются  $\lambda = \mu = 1$ . В трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$  фундаментальное решение уравнения Лапласа имеет вид

$$E(x, y, z; x', y', z') = -\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}.$$

Возьмем на границе  $\partial\Omega$  коллокационные точки  $(x_m, y_m, z_m)$ ,  $m = 1, \dots, M$  – количество коллокационных точек, и поместим вне области  $\Omega$  точечные источники  $(x'_n, y'_n, z'_n)$ ,  $n = 1, \dots, N$  – количество источников. Представим гармонические функции  $W_1$ ,  $W_2$  и  $W_3$  в следующем виде:

$$W_1(x_m, y_m, z_m) = \sum_{n=1}^N c_n E(x_m, y_m, z_m; x'_n, y'_n, z'_n), \quad (17)$$

$$W_2(x_m, y_m, z_m) = \sum_{n=1}^N d_n E(x_m, y_m, z_m; x'_n, y'_n, z'_n),$$

$$W_3(x_m, y_m, z_m) = \sum_{n=1}^N e_n E(x_m, y_m, z_m; x'_n, y'_n, z'_n),$$

$m = 1, \dots, M$  – количество коллокационных точек,  $n = 1, \dots, N$  – количество источников.

Частные производные функции  $V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{x-x_0}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{y-y_0}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{z-z_0}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{3(x-x_0)^2}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{3(y-y_0)^2}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{3(z-z_0)^2}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{3(x-x_0)(y-y_0)}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = \frac{3(x-x_0)(z-z_0)}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{3(y-y_0)(z-z_0)}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)^{\frac{5}{2}}}.$$

Обозначим  $-\frac{1}{4\pi} = \sigma$  и  $\sqrt{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2 + (z_m - z'_n)^2} = \delta_{mn}$ , тогда

$$\left((x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2 + (z_m - z'_n)^2\right)^{\frac{3}{2}} = \delta_{mn}^3,$$

$$\left((x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2 + (z_m - z'_n)^2\right)^{\frac{5}{2}} = \delta_{mn}^5.$$

Для первой компоненты:

Подставляя выражение (17) в выражение (16) для части коллокационных точек, где заданы граничные условия Дирихле, используя правила дифференцирования, и приведя затем подобные слагаемые получаем:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^N \left( 3\sigma \frac{1}{\delta_{mn}^3} + \sigma y_m \left( -\frac{(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) + \sigma z_m \left( -\frac{(z_m - z'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) \right) c_n + \\
 & + \sum_{n=1}^N \left( \sigma (-x_m) \left( -\frac{(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) \right) d_n + \\
 & + \sum_{n=1}^N \left( \sigma (-x_m) \left( -\frac{(z_m - z'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) \right) e_n = \\
 & = \sum_{n=1}^N i_{mn} c_n + \sum_{n=1}^N j_{mn} d_n + \sum_{n=1}^N k_{mn} e_n = \\
 & = G_1(x_m, y_m, z_m), m = 1, \dots, \tilde{M}.
 \end{aligned}$$

Подставляя выражение (17) в выражение (16) для части коллокационных точек, где заданы граничные условия Неймана, используя правила дифференцирования, и приведя затем подобные слагаемые получаем:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^N \left( \sum_{i=1}^{11} \alpha_{mn}^{(i)} \right) c_n + \sum_{n=1}^N \left( \sum_{i=12}^{19} \alpha_{mn}^{(i)} \right) d_n + \sum_{n=1}^N \left( \sum_{i=20}^{27} \alpha_{mn}^{(i)} \right) e_n = \\
 & = \sum_{n=1}^N i_{mn} c_n + \sum_{n=1}^N j_{mn} d_n + \sum_{n=1}^N k_{mn} e_n = \\
 & = F_1(x_m, y_m, z_m), m = \tilde{M} + 1, \dots, M.
 \end{aligned}$$

Где

$$\alpha_{mn}^{(1)} = 7\sigma \left( -\frac{(x_m - x'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) n_x, \alpha_{mn}^{(2)} = 2\sigma y_m \left( \frac{(3(x_m - x'_n)(y_m - y'_n))}{\delta_{mn}^5} \right) n_x,$$

$$\alpha_{mn}^{(3)} = 2\sigma z_m \left( \frac{(3(x_m - x'_n)(z_m - z'_n))}{\delta_{mn}^5} \right) n_x, \alpha_{mn}^{(4)} = 4\sigma \left( -\frac{(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) n_y,$$

$$\alpha_{mn}^{(5)} = \sigma (-y_m) \left( \left( \frac{(3(x_m - x'_n)^2)}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_y,$$

$$\alpha_{mn}^{(6)} = \sigma y_m \left( \left( \frac{(3(y_m - y'_n)^2)}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_y,$$

$$\alpha_{mn}^{(7)} = \sigma z_m \left( \frac{(3(y_m - y'_n)(z_m - z'_n))}{\delta_{mn}^5} \right) n_y, \alpha_{mn}^{(8)} = 4\sigma \left( -\frac{(z_m - z'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) n_z,$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{mn}^{(9)} &= \sigma(-z_m) \left( \left( \frac{3(x_m - x'_n)^2}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_z, \\
\alpha_{mn}^{(10)} &= \sigma z_m \left( \left( \frac{3(z_m - z'_n)^2}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_z, \\
\alpha_{mn}^{(11)} &= \sigma y_m \left( \frac{3(y_m - y'_n)(z_m - z'_n)}{\delta_{mn}^5} \right) n_z, \alpha_{mn}^{(12)} = (-\sigma) \left( -\frac{(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) n_x, \\
\alpha_{mn}^{(13)} &= 2\sigma(-x_m) \left( \frac{3(x_m - x'_n)(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}^5} \right) n_x, \\
\alpha_{mn}^{(14)} &= 4\sigma \left( -\frac{(x_m - x'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) n_y, \\
\alpha_{mn}^{(15)} &= \sigma x_m \left( \left( \frac{3(x_m - x'_n)^2}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_y, \\
\alpha_{mn}^{(16)} &= \sigma(-x_m) \left( \left( \frac{3(y_m - y'_n)^2}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_y, \\
\alpha_{mn}^{(17)} &= \sigma z_m \left( \frac{3(x_m - x'_n)(z_m - z'_n)}{\delta_{mn}^5} \right) n_y, \\
\alpha_{mn}^{(18)} &= \sigma(-z_m) \left( \frac{3(x_m - x'_n)(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}^5} \right) n_z, \\
\alpha_{mn}^{(19)} &= \sigma(-x_m) \left( \frac{3(y_m - y'_n)(z_m - z'_n)}{\delta_{mn}^5} \right) n_z, \\
\alpha_{mn}^{(20)} &= (-\sigma) \left( -\frac{(z_m - z'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) n_x, \\
\alpha_{mn}^{(21)} &= 2\sigma(-x_m) \left( \frac{3(x_m - x'_n)(z_m - z'_n)}{\delta_{mn}^5} \right) n_x, \\
\alpha_{mn}^{(22)} &= \sigma(-y_m) \left( \frac{3(x_m - x'_n)(z_m - z'_n)}{\delta_{mn}^5} \right) n_y, \\
\alpha_{mn}^{(23)} &= \sigma(-x_m) \left( \frac{3(y_m - y'_n)(z_m - z'_n)}{\delta_{mn}^5} \right) n_y, \\
\alpha_{mn}^{(24)} &= 4\sigma \left( -\frac{(x_m - x'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) n_z,
\end{aligned}$$

$$\alpha_{mn}^{(25)} = \sigma x_m \left( \left( \frac{3(x_m - x'_n)^2}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_z,$$

$$\alpha_{mn}^{(26)} = \sigma (-x_m) \left( \left( \frac{3(z_m - z'_n)^2}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_z,$$

$$\alpha_{mn}^{(27)} = \sigma y_m \left( \frac{3(x_m - x'_n)(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}^5} \right) n_z.$$

Или в матричном виде:

$Ic + Jd + Ke = f$ , где

матрица  $I = \begin{pmatrix} i_{11} & \cdots & i_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ i_{M1} & \cdots & i_{MN} \end{pmatrix}$  с элементами  $i_{mn}$ ,

вектор искомых коэффициентов  $c = (c_1, \dots, c_N)^T$ ,

матрица  $J = \begin{pmatrix} j_{11} & \cdots & j_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ j_{M1} & \cdots & j_{MN} \end{pmatrix}$  с элементами  $j_{mn}$ ,

вектор искомых коэффициентов  $d = (d_1, \dots, d_N)^T$ ,

матрица  $K = \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{M1} & \cdots & k_{MN} \end{pmatrix}$  с элементами  $k_{mn}$ ,

вектор искомых коэффициентов  $e = (e_1, \dots, e_N)^T$ . Вектор правой части:

$$f = (G_1(x_1, y_1, z_1), \dots, G_1(x_{\tilde{M}}, y_{\tilde{M}}, z_{\tilde{M}}), F_1(x_{\tilde{M}+1}, y_{\tilde{M}+1}, z_{\tilde{M}+1}), \dots, F_1(x_M, y_M, z_M))^T.$$

Для второй компоненты:

Подставляя выражение (17) в выражение (16) для части коллокационных точек, где заданы граничные условия Дирихле, используя правила дифференцирования, и приведя затем подобные слагаемые получаем:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N \left( \sigma(-y_m) \left( -\frac{(x_m - x'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) \right) c_n + \\
& + \sum_{n=1}^N \left( 3\sigma \frac{1}{\delta_{mn}} + \sigma x_m \left( -\frac{(x_m - x'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) + \sigma z_m \left( -\frac{(z_m - z'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) \right) d_n + \\
& + \sum_{n=1}^N \left( \sigma(-y_m) \left( -\frac{(z_m - z'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) \right) e_n = \\
& = \sum_{n=1}^N l_{mn} c_n + \sum_{n=1}^N p_{mn} d_n + \sum_{n=1}^N q_{mn} e_n = \\
& = G_2(x_m, y_m, z_m), m = 1, \dots, \tilde{M}.
\end{aligned}$$

Подставляя выражение (17) в выражение (16) для части коллокационных точек, где заданы граничные условия Неймана, используя правила дифференцирования, и приведя затем подобные слагаемые получаем:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N \left( \sum_{i=1}^8 \beta_{mn}^{(i)} \right) c_n + \sum_{n=1}^N \left( \sum_{i=9}^{19} \beta_{mn}^{(i)} \right) d_n + \sum_{n=1}^N \left( \sum_{i=20}^{27} \beta_{mn}^{(i)} \right) e_n = \\
& = \sum_{n=1}^N l_{mn} c_n + \sum_{n=1}^N p_{mn} d_n + \sum_{n=1}^N q_{mn} e_n = \\
& = F_2(x_m, y_m, z_m), m = \tilde{M} + 1, \dots, M.
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
\beta_{mn}^{(1)} &= 4\sigma \left( -\frac{(x_m - x'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) n_x, \\
\beta_{mn}^{(2)} &= \sigma(-y_m) \left( \left( \frac{3(x_m - x'_n)^2}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_x, \\
\beta_{mn}^{(3)} &= \sigma y_m \left( \left( \frac{3(y_m - y'_n)^2}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_x, \\
\beta_{mn}^{(4)} &= \sigma z_m \left( \frac{3(y_m - y'_n)(z_m - z'_n)}{\delta_{mn}^5} \right) n_x, \\
\beta_{mn}^{(5)} &= (-\sigma) \left( -\frac{(x_m - x'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) n_y, \\
\beta_{mn}^{(6)} &= 2\sigma(-y_m) \left( \frac{3(x_m - x'_n)(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}^5} \right) n_y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{mn}^{(7)} &= \sigma(-z_m) \left( \frac{(3(x_m - x'_n)(y_m - y'_n))}{\delta_{mn}^5} \right) n_z, \\
\beta_{mn}^{(8)} &= \sigma(-y_m) \left( \frac{(3(x_m - x'_n)(z_m - z'_n))}{\delta_{mn}^5} \right) n_z, \\
\beta_{mn}^{(9)} &= 4\sigma \left( -\frac{(x_m - x'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) n_x, \\
\beta_{mn}^{(10)} &= \sigma x_m \left( \left( \frac{(3(x_m - x'_n)^2)}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_x, \\
\beta_{mn}^{(11)} &= \sigma(-x_m) \left( \left( \frac{(3(y_m - y'_n)^2)}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_x, \\
\beta_{mn}^{(12)} &= \sigma z_m \left( \frac{(3(x_m - x'_n)(z_m - z'_n))}{\delta_{mn}^5} \right) n_x, \\
\beta_{mn}^{(13)} &= 7\sigma \left( -\frac{(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) n_y, \beta_{mn}^{(14)} = 2\sigma x_m \left( \frac{(3(x_m - x'_n)(y_m - y'_n))}{\delta_{mn}^5} \right) n_y, \\
\beta_{mn}^{(15)} &= 2\sigma z_m \left( \frac{(3(y_m - y'_n)(z_m - z'_n))}{\delta_{mn}^5} \right) n_y, \beta_{mn}^{(16)} = 4\sigma \left( -\frac{(z_m - z'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) n_z, \\
\beta_{mn}^{(17)} &= \sigma(-z_m) \left( \left( \frac{(3(y_m - y'_n)^2)}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_z, \\
\beta_{mn}^{(18)} &= \sigma z_m \left( \left( \frac{(3(z_m - z'_n)^2)}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_z, \\
\beta_{mn}^{(19)} &= \sigma x_m \left( \frac{(3(x_m - x'_n)(z_m - z'_n))}{\delta_{mn}^5} \right) n_z, \\
\beta_{mn}^{(20)} &= \sigma(-y_m) \left( \frac{(3(x_m - x'_n)(z_m - z'_n))}{\delta_{mn}^5} \right) n_x, \\
\beta_{mn}^{(21)} &= \sigma(-x_m) \left( \frac{(3(y_m - y'_n)(z_m - z'_n))}{\delta_{mn}^5} \right) n_x, \\
\beta_{mn}^{(22)} &= (-\sigma) \left( -\frac{(z_m - z'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) n_y, \\
\beta_{mn}^{(23)} &= 2\sigma(-y_m) \left( \frac{(3(y_m - y'_n)(z_m - z'_n))}{\delta_{mn}^5} \right) n_y, \\
\beta_{mn}^{(24)} &= 4\sigma \left( -\frac{(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) n_z,
\end{aligned}$$

$$\beta_{mn}^{(25)} = \sigma y_m \left( \left( \frac{3(y_m - y'_n)^2}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_z,$$

$$\beta_{mn}^{(26)} = \sigma (-y_m) \left( \left( \frac{3(z_m - z'_n)^2}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_z,$$

$$\beta_{mn}^{(27)} = \sigma x_m \left( \frac{3(x_m - x'_n)(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}^5} \right) n_z.$$

Или в матричном виде:

$Lc + Pd + Qe = g$ , где

матрица  $L = \begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{M1} & \cdots & l_{MN} \end{pmatrix}$  с элементами  $l_{mn}$ ,

вектор искомых коэффициентов  $c = (c_1, \dots, c_N)^T$ ,

матрица  $P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1} & \cdots & p_{MN} \end{pmatrix}$  с элементами  $p_{mn}$ ,

вектор искомых коэффициентов  $d = (d_1, \dots, d_N)^T$ ,

матрица  $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{M1} & \cdots & q_{MN} \end{pmatrix}$  с элементами  $q_{mn}$ ,

вектор искомых коэффициентов  $e = (e_1, \dots, e_N)^T$ . Вектор правой части:

$$g = (G_2(x_1, y_1, z_1), \dots, G_2(x_{\tilde{M}}, y_{\tilde{M}}, z_{\tilde{M}}), F_2(x_{\tilde{M}+1}, y_{\tilde{M}+1}, z_{\tilde{M}+1}), \dots, F_2(x_M, y_M, z_M))^T.$$

Для третьей компоненты:

Подставляя выражение (17) в выражение (16) для части коллокационных точек, где заданы граничные условия Дирихле, используя правила дифференцирования, и приведя затем подобные слагаемые получаем:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^N \left( \sigma(-z_m) \left( -\frac{(x_m - x'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) \right) c_n + \\
 & + \sum_{n=1}^N \left( \sigma(-z_m) \left( -\frac{(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) \right) d_n + \\
 & + \sum_{n=1}^N \left( 3\sigma \frac{1}{\delta_{mn}} + \sigma x_m \left( -\frac{(x_m - x'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) + \sigma y_m \left( -\frac{(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) \right) e_n = \\
 & = \sum_{n=1}^N r_{mn} c_n + \sum_{n=1}^N s_{mn} d_n + \sum_{n=1}^N t_{mn} e_n = \\
 & = G_3(x_m, y_m, z_m), m = 1, \dots, \tilde{M}.
 \end{aligned}$$

Подставляя выражение (17) в выражение (16) для части коллокационных точек, где заданы граничные условия Неймана, используя правила дифференцирования, и приведя затем подобные слагаемые получаем:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^N \left( \sum_{i=1}^8 \gamma_{mn}^{(i)} \right) c_n + \sum_{n=1}^N \left( \sum_{i=9}^{16} \gamma_{mn}^{(i)} \right) d_n + \sum_{n=1}^N \left( \sum_{i=17}^{27} \gamma_{mn}^{(i)} \right) e_n = \\
 & = \sum_{n=1}^N r_{mn} c_n + \sum_{n=1}^N s_{mn} d_n + \sum_{n=1}^N t_{mn} e_n = \\
 & = F_3(x_m, y_m, z_m), m = \tilde{M} + 1, \dots, M.
 \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
 \gamma_{mn}^{(1)} &= 4\sigma \left( -\frac{(z_m - z'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) n_x, \\
 \gamma_{mn}^{(2)} &= \sigma(-z_m) \left( \left( \frac{3(x_m - x'_n)^2}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_x, \\
 \gamma_{mn}^{(3)} &= \sigma z_m \left( \left( \frac{3(z_m - z'_n)^2}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_x, \\
 \gamma_{mn}^{(4)} &= \sigma y_m \left( \frac{3(y_m - y'_n)(z_m - z'_n)}{\delta_{mn}^5} \right) n_x, \\
 \gamma_{mn}^{(5)} &= \sigma(-z_m) \left( \frac{3(x_m - x'_n)(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}^5} \right) n_y, \\
 \gamma_{mn}^{(6)} &= \sigma(-y_m) \left( \frac{3(x_m - x'_n)(z_m - z'_n)}{\delta_{mn}^5} \right) n_y,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{mn}^{(7)} &= (-\sigma) \left( -\frac{(x_m - x'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) n_z, \\
\gamma_{mn}^{(8)} &= 2\sigma (-z_m) \left( \frac{(3(x_m - x'_n)(z_m - z'_n))}{\delta_{mn}^5} \right) n_z, \\
\gamma_{mn}^{(9)} &= \sigma (-z_m) \left( \frac{(3(x_m - x'_n)(y_m - y'_n))}{\delta_{mn}^5} \right) n_x, \\
\gamma_{mn}^{(10)} &= \sigma (-x_m) \left( \frac{(3(y_m - y'_n)(z_m - z'_n))}{\delta_{mn}^5} \right) n_x, \\
\gamma_{mn}^{(11)} &= 4\sigma \left( -\frac{(z_m - z'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) n_y, \\
\gamma_{mn}^{(12)} &= \sigma (-z_m) \left( \left( \frac{(3(y_m - y'_n)^2)}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_y, \\
\gamma_{mn}^{(13)} &= \sigma z_m \left( \left( \frac{(3(z_m - z'_n)^2)}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_y, \\
\gamma_{mn}^{(14)} &= \sigma x_m \left( \frac{(3(x_m - x'_n)(z_m - z'_n))}{\delta_{mn}^5} \right) n_y, \\
\gamma_{mn}^{(15)} &= (-\sigma) \left( -\frac{(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) n_z, \\
\gamma_{mn}^{(16)} &= 2\sigma (-z_m) \left( \frac{(3(y_m - y'_n)(z_m - z'_n))}{\delta_{mn}^5} \right) n_z, \\
\gamma_{mn}^{(17)} &= 4\sigma \left( -\frac{(x_m - x'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) n_x, \\
\gamma_{mn}^{(18)} &= \sigma x_m \left( \left( \frac{(3(x_m - x'_n)^2)}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_x, \\
\gamma_{mn}^{(19)} &= \sigma (-x_m) \left( \left( \frac{(3(z_m - z'_n)^2)}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_x, \\
\gamma_{mn}^{(20)} &= \sigma y_m \left( \frac{(3(x_m - x'_n)(y_m - y'_n))}{\delta_{mn}^5} \right) n_x, \\
\gamma_{mn}^{(21)} &= 4\sigma \left( -\frac{(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) n_y, \\
\gamma_{mn}^{(22)} &= \sigma y_m \left( \left( \frac{(3(y_m - y'_n)^2)}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_y,
\end{aligned}$$

$$\gamma_{mn}^{(23)} = \sigma(-y_m) \left( \left( \frac{3(z_m - z'_n)^2}{\delta_{mn}^5} \right) - \left( \frac{1}{\delta_{mn}^3} \right) \right) n_y,$$

$$\gamma_{mn}^{(24)} = \sigma x_m \left( \frac{3(x_m - x'_n)(y_m - y'_n)}{\delta_{mn}^5} \right) n_y,$$

$$\gamma_{mn}^{(25)} = 7\sigma \left( -\frac{(z_m - z'_n)}{\delta_{mn}^3} \right) n_z, \quad \gamma_{mn}^{(26)} = 2\sigma x_m \left( \frac{3(x_m - x'_n)(z_m - z'_n)}{\delta_{mn}^5} \right) n_z,$$

$$\gamma_{mn}^{(27)} = 2\sigma y_m \left( \frac{3(y_m - y'_n)(z_m - z'_n)}{\delta_{mn}^5} \right) n_z.$$

Или в матричном виде:

$Rc + Sd + Te = h$ , где

$$\text{матрица } R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{M1} & \cdots & r_{MN} \end{pmatrix} \text{ с элементами } r_{mn},$$

вектор искомых коэффициентов  $c = (c_1, \dots, c_N)^T$ ,

$$\text{матрица } S = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{M1} & \cdots & s_{MN} \end{pmatrix} \text{ с элементами } s_{mn},$$

вектор искомых коэффициентов  $d = (d_1, \dots, d_N)^T$ ,

$$\text{матрица } T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{M1} & \cdots & t_{MN} \end{pmatrix} \text{ с элементами } t_{mn},$$

вектор искомых коэффициентов  $e = (e_1, \dots, e_N)^T$ . Вектор правой части:

$$h = (G_3(x_1, y_1, z_1), \dots, G_3(x_{\tilde{M}}, y_{\tilde{M}}, z_{\tilde{M}}), F_3(x_{\tilde{M}+1}, y_{\tilde{M}+1}, z_{\tilde{M}+1}), \dots, F_3(x_M, y_M, z_M))^T.$$

Таким образом, с помощью метода фундаментальных решений система (16) в матричном виде выглядит следующим образом:

$$Ic + Jd + Ke = f, \quad (18)$$

$$Lc + Pd + Qe = g,$$

$$Rc + Sd + Te = h.$$

Матрицы  $I, J, K, L, P, Q, R, S, T$  размера  $M \times N$ , вектора неизвестных  $c, d, e$  размера  $N$ , вектора правой части  $f, g, h$  размера  $M$ . Если записать (18) в блочном виде, то получим СЛАУ:

$$Ax = b, \quad (19)$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} I & J & K \\ L & P & Q \\ R & S & T \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}.$$

## 7 Стохастический итерационный проекционный метод

Стохастический проекционный метод применим к решению произвольных систем линейных уравнений  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  с прямоугольной матрицей  $A$  размерности  $m \times n$ . Он вычисляет обобщенное решение  $\mathbf{x}^*$ , минимизируя норму невязки  $\|A\mathbf{x}^* - \mathbf{b}\|_2$ . Он может быть записан в виде последовательных итераций компонент решения [14], [9]:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{b_{\nu(i)} - (a_{\nu(i)}, \mathbf{x}_k)}{\|a_{\nu(i)}\|_2^2} a_{\nu(i)}, \quad (20)$$

где  $\mathbf{x}_0$  произвольно выбранный стартовый вектор,  $\nu(i)$  случайный номер строки  $a_{\nu(i)}$ ,  $b_{\nu(i)}$  - соответствующая компонента вектора  $\mathbf{b}$ . Случайный номер строки  $\nu(i)$  выбирается в соответствии с дискретным распределением

$$p(i) = \frac{\|a_i\|_2^2}{\sum_{j=1}^m \|a_j\|_2^2}.$$

Скорость сходимости метода чувствительна к величине числа обусловленности матрицы  $A$ , что следует из оценки [14]

$$\mathbb{E} \left[ \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|_2^2 \right] \leq \left( 1 - \frac{1}{\kappa^2(A)} \right)^k \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}\|_2^2, \quad (21)$$

где  $\mathbf{x}$  - точное решение уравнения  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , а  $\kappa(A)$  - число обусловленности, которое записывается в виде  $\kappa(A) = \|A\|_F \|A^{-1}\|_F$  где  $F$  указывает на норму Фробениуса  $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$ .

Экономичный метод выбора индексов по произвольному дискретному распределению дан в работе [15]. В наших расчетах мы предварительно нормировали систему уравнений так, чтобы каждая строка имела одну и ту же вероятность, тогда номер строки  $\nu(i)$  матрицы  $A$  выбирается равномерно. Отметим, что могут применяться и другие рандомизированные методы для решения больших систем уравнений [8], [11], [7].

## 8 Численные эксперименты

**Тест 1.** Решение смешанной краевой задачи для системы Ламе стохастическим проекционным методом ищется в области

$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  - квадрат со сторонами, равными 1.

Задавались граничные условия Дирихле на левой стороне квадрата

$$\{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq 1\} :$$

$$G_1 = y^2,$$

$$G_2 = y^2.$$

Задавались граничные условия Дирихле на верхней стороне квадрата

$$\{(x, y) : 0 < x < 1, y = 1\} :$$

$$G_1 = 3x^2 - 7x + 1,$$

$$G_2 = 4x^2 - 10x + 1.$$

Задавались граничные условия Дирихле на правой стороне квадрата

$$\{(x, y) : x = 1, 0 \leq y \leq 1\} :$$

$$G_1 = 3 - 7y + y^2,$$

$$G_2 = 4 - 10y + y^2.$$

Задавались граничные условия Неймана на нижней стороне квадрата

$$\{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\} :$$

$$F_1 = -x,$$

$$F_2 = 24x.$$

Известно точное решение такой задачи:

$$U_1 = 3x^2 - 7xy + y^2,$$

$$U_2 = 4x^2 - 10xy + y^2.$$

Относительная погрешность численного решения вычисляется в дискретном аналоге нормы  $L_2$  по следующей формуле:

$$\varepsilon_{L_2} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} (U(x_i, y_j) - U_h(x_i, y_j))^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} (U(x_i, y_j))^2}} \cdot 100\%.$$

**8.0.1. Численный эксперимент при разных значениях коэффициента  $\delta$  (количество шагов, на которые удалены источники от сторон квадрата).** В методе фундаментальных решений параметры задавались так:  $(N_x = \frac{1}{h_x}, N_y = \frac{1}{h_y})$ ; количество коллокационных точек  $M = 2((N_x - 5) + (N_y - 5))$ , количество точечных источников  $N = 2((N_x - 1) + (N_y - 1))$ , в стохастическом итерационном проекционном методе для решения СЛАУ начальная итерация задавалась нулевой, а количество итераций задавалось  $K_{iter} = 10^7$ .

На Рис. 1 представлены графики компоненты решения  $U_1(x, 0.5)$ , полученные стохастическим проекционным методом (красным цветом при значении  $\delta = 1$ , синим цветом при значении  $\delta = 20$ , зеленым цветом при значении  $\delta = 400$ ) и точное решение (серым цветом), шаг сетки задавался  $h_x = h_y = 10^{-2}$ . На Рис. 2 представлены те же графики, но для компоненты  $U_2(x, 0.5)$ .

В этих расчетах относительная погрешность при  $\delta = 1$ :  $\varepsilon_{L_2} = 10.1\%$  для  $U_1$ ,  $\varepsilon_{L_2} = 5.1\%$  для  $U_2$ ; при  $\delta = 20$ :  $\varepsilon_{L_2} = 0.4\%$  для  $U_1$ , и  $\varepsilon_{L_2} = 0.2\%$  для  $U_2$ ; при  $\delta = 400$ :  $\varepsilon_{L_2} = 23.1\%$  для  $U_1$ ,  $\varepsilon_{L_2} = 4.7\%$  для  $U_2$ .

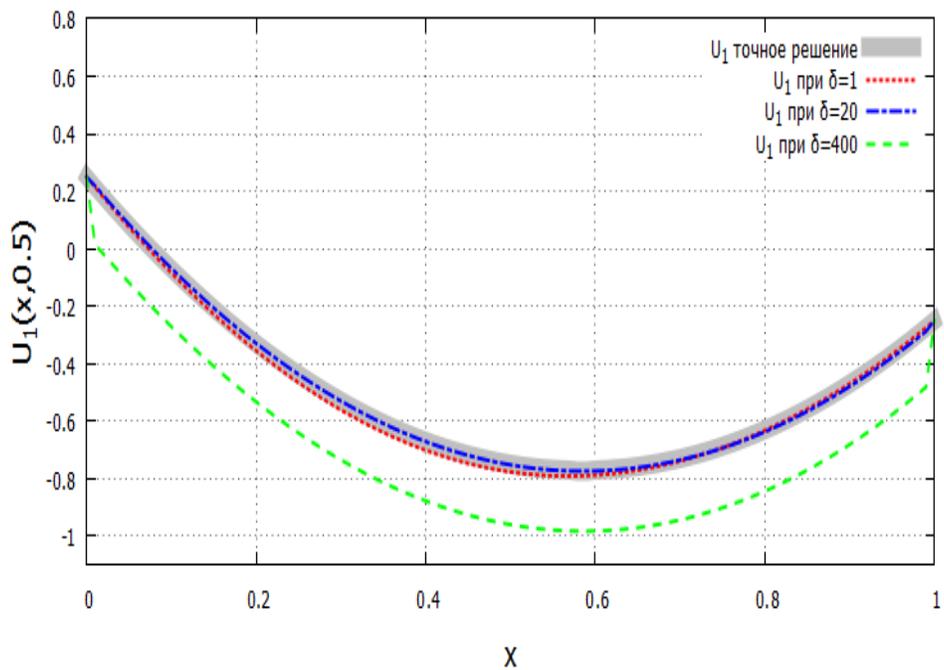


Рис. 1. Сравнение численных расчетов с точным решением для трех вариантов выбора  $\delta$ .

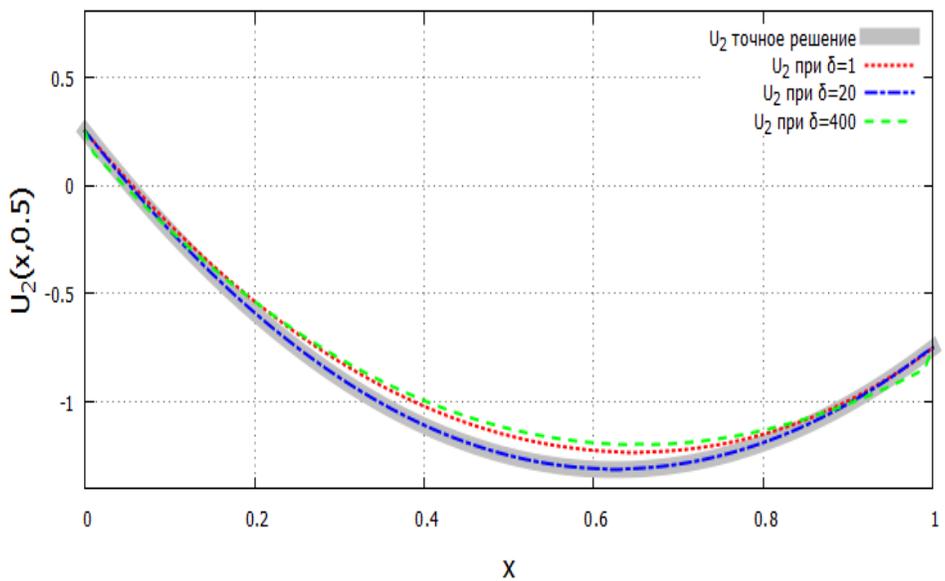


Рис. 2. То же, что и на Рис. 1, но для компоненты  $U_2$ .

**8.0.2. Численный эксперимент при разном числе итераций стохастического итерационного проекционного метода.** В данном расчете все параметры в методе фундаментальных решений задавались так же, как и в предыдущем примере, коэффициент  $\delta$  был фиксирован,  $\delta = 25$ , расчеты проводились для разного числа итераций в стохастическом проекционном методе.

На Рис. 3 показаны графики для компоненты  $U_1(x, 0.5)$ , (красным цветом количество итераций  $K_{iter} = 10^3$ , зеленым цветом количество итераций  $K_{iter} = 10^5$ , синим цветом количество итераций  $K_{iter} = 10^7$ ) и точное решение (серым цветом), шаг сетки задавался  $h_x = h_y = 10^{-2}$ . На Рис. 4 представлены аналогичные графики для компоненты  $U_2(x, 0.5)$

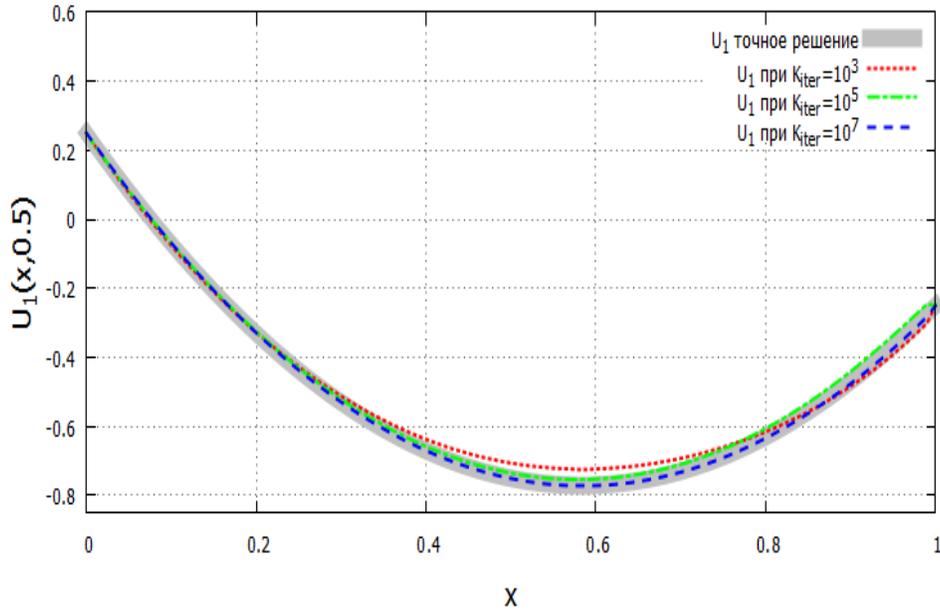


Рис. 3. Сравнение с точным решением для различных вариантов числа итераций в стохастическом проекционном методе.

Относительная погрешность в этих расчетах: при  $K_{iter} = 10^3$ :  $\varepsilon_{L_2} = 8.6\%$  для  $U_1$ , и  $\varepsilon_{L_2} = 6.9\%$  для  $U_2$ ; при  $K_{iter} = 10^5$   $\varepsilon_{L_2} = 2.1\%$  для  $U_1$ , и  $\varepsilon_{L_2} = 1\%$  для  $U_2$ ; при  $K_{iter} = 10^7$ :  $\varepsilon_{L_2} = 0.32\%$  для  $U_1$ , и  $\varepsilon_{L_2} = 0.18\%$  для  $U_2$ .

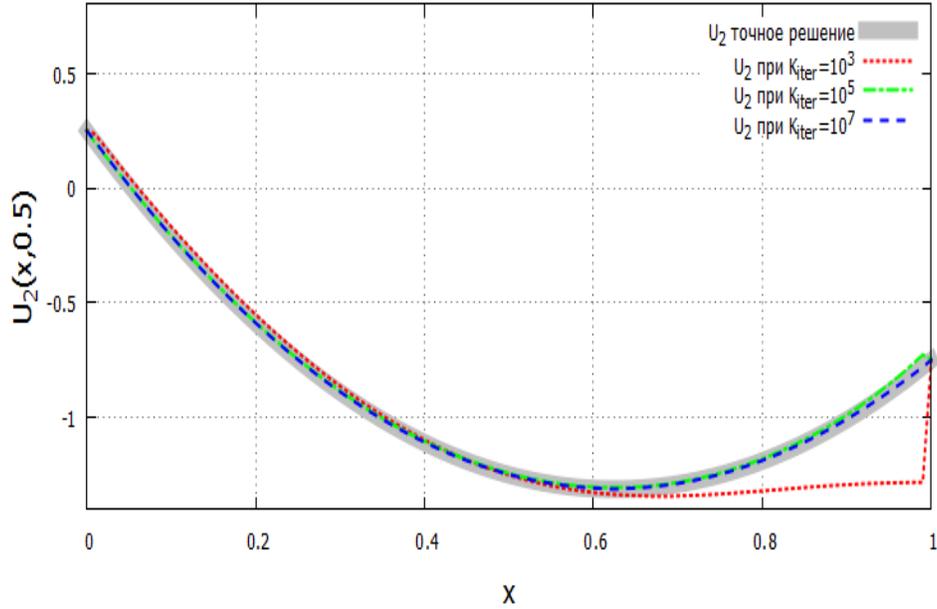


Рис. 4. То же, что и на Рис.3, но для компоненты  $U_2$ .

**8.0.3. Численный эксперимент при разных количествах коллокационных точек и источников.** В данном примере параметры в методе фундаментальных решений задавались такими же, что и в предыдущем примере, а количество итераций задавалось  $K_{iter} = 10^7$ . Расчеты проводились для различных вариантов числа точек коллокаций и источников.

Приведем здесь достигнутые относительные погрешности:  $\varepsilon_{L_2} = 0.32\%$  для  $U_1$ ,  $\varepsilon_{L_2} = 0.18\%$  для  $U_2$  при числе коллокационных точек  $M = 2((N_x - 5) + (N_y - 5))$  и числе источников  $N = 2((N_x - 1) + (N_y - 1))$ ; в этом случае матрица решаемой системы является прямоугольной, в ней строк меньше, чем столбцов.

Второй вариант:  $\varepsilon_{L_2} = 0.32\%$  для  $U_1$ ,  $\varepsilon_{L_2} = 0.12\%$  для  $U_2$  при числе точек коллокации  $M = 2((N_x - 1) + (N_y - 1))$  и числе источников  $N = 2((N_x - 1) + (N_y - 1))$ . В это случае матрица системы - квадратная.

Третий вариант:  $\varepsilon_{L_2} = 0.41\%$  для  $U_1$ ,  $\varepsilon_{L_2} = 0.15\%$  для  $U_2$  при числе точек коллокации  $M = 2((N_x - 1) + (N_y - 1))$  и числе источников  $N = 2((N_x - 5) + (N_y - 5))$ . В этом случае строк больше, чем столбцов.

**8.1. Тест 2.** В данном тесте выбрано точное решение смешанной краевой задачи для уравнения Лапе в единичном кубе  $\Omega$

$$U_1 = 9x + 20y + 24z - 6 - x^2z + 2xz,$$

$$U_2 = 5xyz + 2yz - 3y,$$

$$U_3 = 10x^2 - 5y^2 - xz^2 - 3z^2 - 3z.$$

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Смешанные граничные условия выбираются в соответствии с точным решением следующим образом. Условия Дирихле заданы на пяти гранях куба: на задней грани куба

$$\begin{aligned} \{(x, y, z) | x = 0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\} : \\ G_1 = 20y + 24z - 6, \\ G_2 = 2yz - 3y, \\ G_3 = -5y^2 - 3z^2 - 3z. \end{aligned}$$

на передней грани куба

$$\begin{aligned} \{(x, y, z) | x = 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\} : \\ G_1 = 9 + 20y + 25z - 6, \\ G_2 = 7yz - 3y, \\ G_3 = 10 - 5y^2 - 4z^2 - 3z. \end{aligned}$$

на левой грани куба

$$\begin{aligned} \{(x, y, z) | 0 < x < 1, y = 0, 0 \leq z \leq 1\} : \\ G_1 = 9x + 24z - 6 - x^2z + 2xz, \\ G_2 = 0, \\ G_3 = 10x^2 - xz^2 - 3z^2 - 3z. \end{aligned}$$

на правой грани куба

$$\begin{aligned} \{(x, y, z) | 0 < x < 1, y = 1, 0 \leq z \leq 1\} : \\ G_1 = 9x + 14 + 24z - x^2z + 2xz, \\ G_2 = 5xz + 2z - 3, \\ G_3 = 10x^2 - 5 - xz^2 - 3z^2 - 3z. \end{aligned}$$

и на верхней грани куба

$$\begin{aligned} \{(x, y, z) | 0 < x < 1, 0 < y < 1, z = 1\} : \\ G_1 = 11x + 20y + 18 - x^2, \\ G_2 = 5xy - y, \\ G_3 = 10x^2 - 5y^2 - x - 6. \end{aligned}$$

Граничные условия Неймана заданы на нижней грани куба

$$\begin{aligned} \{(x, y, z) | 0 < x < 1, 0 < y < 1, z = 0\} : \\ F_1 = x^2 - 22x - 44, \\ F_2 = -5xy + 8y, \\ F_3 = 3. \end{aligned}$$

В методе фундаментальных решений задавалось разбиение  $N_x = \frac{1}{h_x}$ ,  $N_y = \frac{1}{h_y}$ ,  $N_z = \frac{1}{h_z}$ . Число точек коллокации

$$M = 2((N_x - 1) \cdot (N_y - 1) + (N_x - 1) \cdot (N_z - 1) + (N_y - 1) \cdot (N_z - 1)),$$

число источников

$$N = 2((N_x + 1) \cdot (N_y + 1) + (N_x + 1) \cdot (N_z + 1) + (N_y + 1) \cdot (N_z + 1)).$$

В стохастическом итерационном проекционном методе стартовое решение бралось нулевым, параметр  $\delta = 5$ , количество итераций  $K_{iter} = 10^7$ . Относительная погрешность численного решения вычисляется в дискретном аналоге нормы  $L_2$  по следующей формуле:

$$\varepsilon_{L_2} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} (U(x_i, y_j, z_k) - U_h(x_i, y_j, z_k))^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} (U(x_i, y_j, z_k))^2}} \cdot 100\%.$$

На Рис. 5 изображены график решения  $U_1(x, 0.5, 0.5)$ , полученный стохастическим проекционным методом (красным цветом), и точное решение (серым цветом), шаг сетки задавался  $h_x = h_y = h_z = 0.05$ .

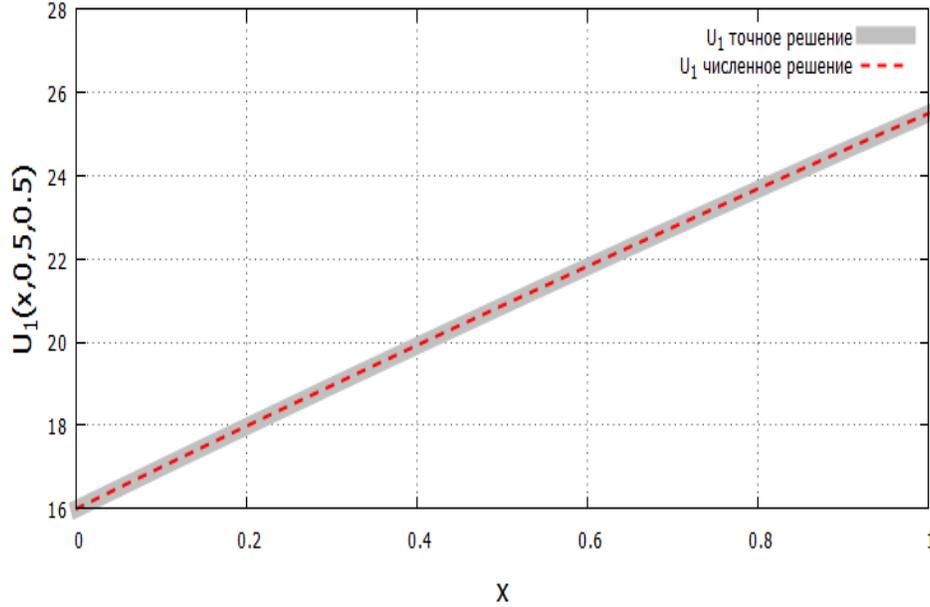
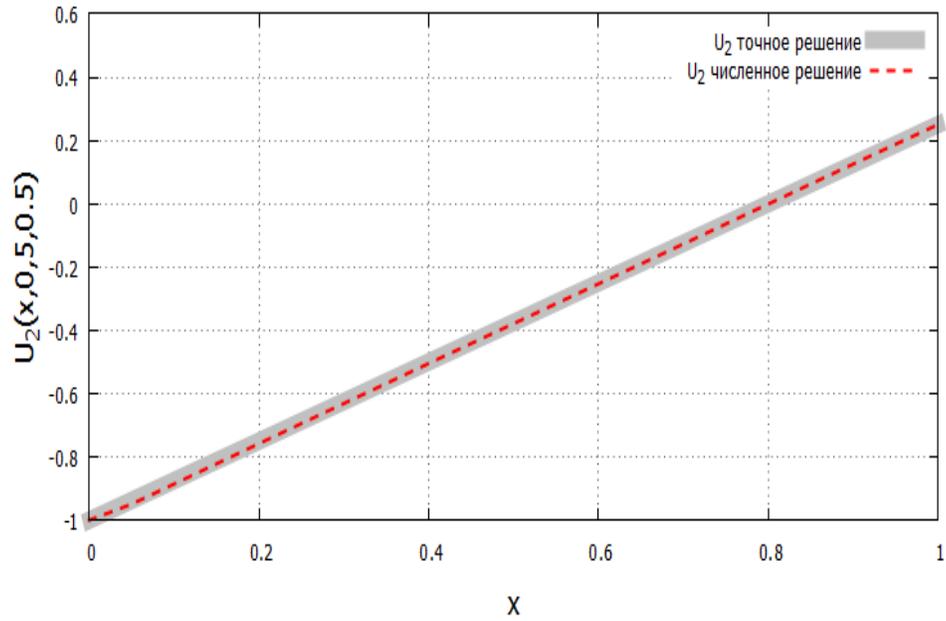
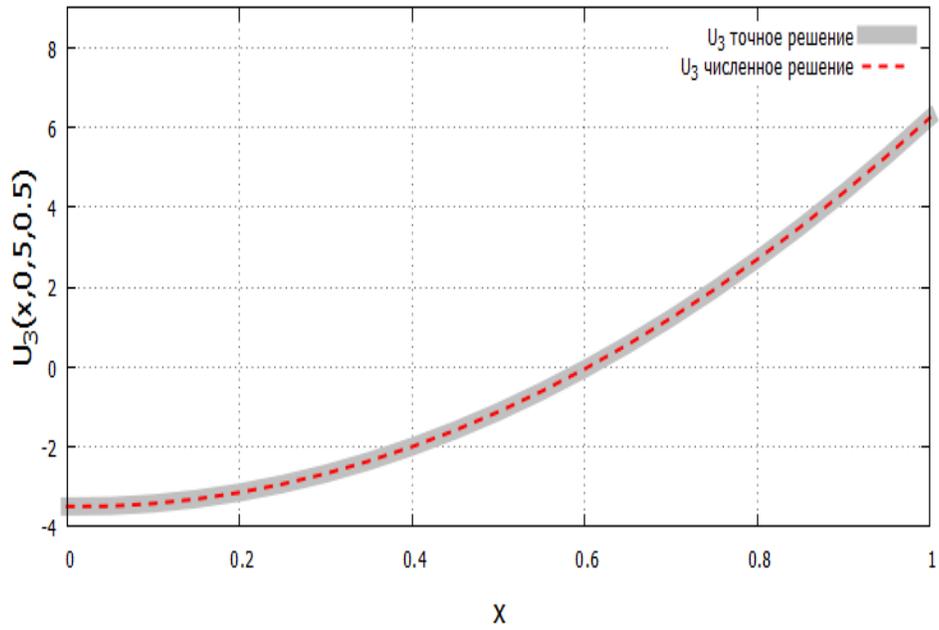


Рис. 5. Смешанная краевая задача в кубе: сравнение с точным решением.

На Рис. 6 изображены график решения  $U_2(x, 0.5, 0.5)$ , полученный стохастическим проекционным методом (красным цветом), и точное решение (серым цветом), шаг сетки задавался  $h_x = h_y = h_z = 0.05$ .

На Рис. 7 изображены графики решения  $U_3(x, 0.5, 0.5)$  стохастическим проекционным методом (красным цветом) и точное решение (серым цветом), шаг сетки задавался  $h_x = h_y = h_z = 0.05$ .

Относительная погрешность в данных расчетах:  $\varepsilon_{L_2} = 0.08\%$  для  $U_1$ ,  $\varepsilon_{L_2} = 0.7\%$  для  $U_2$ , и  $\varepsilon_{L_2} = 0.02\%$  для  $U_3$ .

Рис. 6. То же, что и на Рис. 5, но для компоненты  $U_2$ .Рис. 7. То же, что и на Рис. 5, но для компоненты  $U_3$ .

## Заключение

В данной работе предложен новый алгоритм стохастического моделирования для решения смешанной задачи для системы уравнений Ламе, которая описывает вектор смещений упругого тела в изотропном случае. Подробно рассмотрены как плоская, так и пространственная задача со смешанными граничными условиями. Основная идея заключается в использовании представления вектора решений Слободянского через вспомогательные гармонические функции. Проблема здесь переходит в поиск этих гармонических функций таким образом, чтобы выполнялись исходные смешанные граничные условия для уравнения Ламе, что представляет собой отдельную нетривиальную задачу даже в случае задачи Дирихле. В нашей работе мы используем приближение решения в виде линейных комбинаций фундаментальных решений для уравнения Лапласа, как это делается в методе фундаментальных решений. Следует подчеркнуть, что предложенный подход существенно отличается от прямого применения метода фундаментальных решений к уравнению Ламе, где используется фундаментальное решение этого уравнения, тем, что, благодаря разложению Слободянского, удается построить устойчивый метод, поскольку используется только фундаментальное решение уравнения Лапласа. В итоге задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов в этой линейной комбинации. Данная система решается с помощью стохастического проекционного метода.

## References

- [1] Аксюк И.А., Киреева А.Е., Сабельфельд К.К., Смирнов Д.Д. Алгоритмы стохастического моделирования для итерационного решения уравнения Ламе. СибЖВМ, 2023, т.26, N 4, 357–377.
- [2] Алексидзе, М. А. (1966). О приближенном решении одной смешанной граничной задачи теории гармонических функций. Дифференциальные уравнения, 2(7), 988–994.
- [3] В. Д. Купрадзе, М. А. Алексидзе, Метод функциональных уравнений для приближенного решения некоторых граничных задач, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, том 4, номер 4, 683–715.
- [4] В.Д.Купрадзе, Т.Г. Гегелиа, М.О. Башелейшвили, Т.В. Бурчуладзе, Трехмерные задачи теории упругости. – М. Наука, 1976.
- [5] А.И. Лурье. Теория упругости. – М. Наука, 1970.
- [6] A.D. Polyinin, S.A. Lychev. Decomposition methods for coupled 3D equations of applied mathematics and continuum mechanics: Partial survey, classification, new results, and generalizations. Applied Mathematical Modelling, v. 40 (2016), 3208–3324.
- [7] Sabelfeld K.K. A new randomized vector algorithm for iterative solution of large linear systems. Applied Mathematics Letters. – 2022. – Vol. 126. – 107830. DOI: 10.1016/j.aml.2021.107830
- [8] K. K. Sabelfeld. Monte Carlo Methods in Boundary Value Problems, Springer, Berlin, 1991.
- [9] Sabelfeld K. and Loshina N. Stochastic iterative projection methods for large linear systems. Monte Carlo Methods and Applications, vol.16, issue 3-4, 2010, pp. 343-359.

- [10] K.K. Sabelfeld, N.S. Mozartova. Stochastic boundary collocation and spectral methods for solving PDEs Monte Carlo Methods and Applications, vol.18 (2012), issue 3, 217-263.
- [11] K.K. Sabelfeld and I.A. Shalimova. Spherical and Plane Integral operators for PDEs. Construction, Analysis, and Applications. Walter de Gruyter, Berlin, 2013, 328 pp.
- [12] Sabelfeld K.K., Smirnov D.D. Stochastic simulation algorithm for solving the system of Lamé equations for two- and three-dimensional domains by combining the Slobodianskii representation, the method of fundamental solutions and a stochastic projection method. Numerical Analysis and Applications, 2024, v.17, N2, 196–214.
- [13] M. G. Slobodyanskii, General forms of solution of equations of elasticity for simply connected and multiply connected domains expressed in terms of harmonic functions, Prikl. Mat. Mekh., 18, No. 1, 55–74 (1954).
- [14] T. Strohmer and R. Vershynin, A Randomized Kaczmarz Algorithm with Exponential Convergence, Journal of Fourier Analysis and Applications, 15 (2007), 262–278.
- [15] A.J. Walker, New fast method for generating discrete random numbers with arbitrary frequency distributions, Electr. Lett., 10(8) (1974) 127-128.

КАРЛ КАРЛОВИЧ САБЕЛЬФЕЛЬД  
INSTITUTE OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL GEOPHYSICS,  
PR. LAVRENTIEVA, 6, 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA, AND  
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS, PR. КОПТУГА, 4,  
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*E-mail address:* [karl@osmf.sccc.ru](mailto:karl@osmf.sccc.ru)

ДМИТРИЙ ДМИТРИЕВИЧ СМИРНОВ  
INSTITUTE OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL GEOPHYSICS,  
PR. LAVRENTIEVA, 6, 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*E-mail address:* [smirnovdd@mail.ru](mailto:smirnovdd@mail.ru)