

Благодарим уважаемого рецензента за проделанную работу по ознакомлению с текстом рукописи, а также высказанные содержательные замечания. Ниже приводим ответы на данные замечания в виде пояснительных комментариев и описания внесенных в текст рукописи изменений.

**Авторы никак не прокомментировали связи своей постановки с классической задачей о  $(r|p)$ -центроиде. Есть основания считать, что классическую задачу можно погрузить в контекст новой постановки. Так как для любого клиента в ней также легко организовать линейный порядок на множестве точек, в которых можно открыть предприятия.**

Добавили указание на данную связь: For example, the linear order  $\succeq_j$  could be determined by the distances to the facilities, with the closer facility being considered better. This corresponds to a scenario where each customer is served by the closest open facility.

**Необходимо уточнить определение допустимого решения  $(X, Z)$ . Вопрос вызывает следующий момент: ограничение (4) задачи лидера содержит переменную нижнего уровня. Что значит в этой ситуации формулировка: «...if  $X$  is a feasible solution of the problem  $L$ ...»? Ведь в  $X$  нет переменных нижнего уровня. Как можно проверить это ограничение, если в нем есть неопределенный параметр?**

Определение допустимого решения уточнено: требуется, чтобы  $X$  при заданном  $Z$  был допустимым в задаче верхнего уровня, а  $Z$  при заданном  $X$  - оптимальным в задаче нижнего уровня. Уточненное определение имеет следующий вид

A pair  $(X, Z)$ , where  $X = ((x_i), (\chi_{ij}))$ ,  $Z = ((z_i), (\zeta_{ij}))$ , is called a *feasible solution* of the problem  $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ , if, given  $Z$ ,  $X$  is a feasible solution of the problem  $\mathcal{L}$  and, given  $X$ ,  $Z$  is an optimal solution of the problem  $\mathcal{F}$ .

**Фраза «The value of the Leader's objective function on a feasible solution  $(X,Z)$  would be denoted by  $L(X,Z)$ » не коррелирует с постановкой (1)-(12). В (1) под максимумом нет никаких переменных нижнего уровня.**

На самом деле, данное противоречие является кажущимся и в некотором смысле спровоцированным особенностями двухуровневых моделей. В (1) среди оптимизируемых переменных нет переменных нижнего уровня, поскольку первый игрок их не контролирует, однако переменные нижнего уровня влияют на допустимые значения переменных  $(\chi_i)$ , а с ними и на значение целевой функции (1). Таким образом, для корректного определения значения целевой функции верхнего уровня необходимо указать значения переменных как верхнего, так и нижнего уровня.

**Также вопросы вызывает формулировка «...the solution  $(X,Z)$  is induced by the vector  $x = (x_i)$ ...». Предположим, лидер выбрал вектор  $x = (x_i)$ . Решили задачу конкурента, и нашли оптимальное решение. Откуда следует, что будет выполнено ограничение (4)? При анализе постановки возникает понимание, что ограничение (4) должно быть в задаче конкурента. Тогда формулировки, подобные выше приведённому, будут по существу.**

Данный вопрос действительно связан с предыдущим, и здесь противоречие следует начать разрешать с того, чтобы отметить, что понятие допустимого решения и процедура вычисления допустимого решения - это разные сущности. Мы можем говорить о допустимом решении, не прибегая к описанию того, каким образом оно будет строиться, а просто требуя определенных свойств. Мы в статье не обсуждаем вопрос вычисления допустимого решения, задаваемого вектором  $x = (x_i)$ , но это можно сделать, к примеру, вычислив для данного вектора оптимальное решение  $Z$  задачи нижнего уровня, а затем довычислив переменные назначения  $(\chi_i)$  верхнего уровня для заданных  $x$  и  $Z$ . При этом, конечно, мы в любом случае можем говорить о допустимом решении, индуцированном вектором, даже не обсуждая процедуру

построения, а просто имея в виду только определение и предполагая, что объект, определяемый нами, существует.

**В работе отсутствует оценка качества процедуры генерации отсечений. Это существенно снижает оценку статьи. Для стороннего читателя нет возможности реально оценить, что дает данная процедура. Для реализации этой возможности нет никакой необходимости в проведении каких-то сложных теоретических исследований. Самый простой и очевидный вариант — это сравнить оптимум *high-point problem* до генерации отсечений и после. Практически большая часть современных пакетов типа *Gurobi* позволяет достаточно просто это сделать.**

Действительно, практическое исследование предлагаемых отсечений будет важным направлением дальнейшей работы. Ряд шагов в этом направлении уже сделан, и их результаты были представлены на международной конференции по исследованию операций MOTOR-2025 в Новосибирске, где в частности мы указали, что использование новых отсечений оказывает существенное влияние на работу процедуры генерации отсечений, предложенной ранее в литературе другими авторами, но на текущий момент остается открытым вопрос эффективной организации такой гибридной схемы, из-за чего обсуждение вычислительных экспериментов пока считаем преждевременным. В отражение этого дополнили текст заключения следующими утверждениями: Preliminary numerical experiments show that the new b-cuts successfully cut-off the optimal solution of the high-point relaxation and increase the convergence of the lower-bound in a cut generation procedure. At the same time, the overall performance of the procedure and its final design need further improvement before detailed discussion.