

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФИНАЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ

А.А. МАСТИХИНА, А.В. МАСТИХИН

Представлено

Abstract: For the birth and death process with two absorbing states and one initial state, the problem of final probabilities is considered, generalizing the problem of random walk on a segment. The final probabilities are obtained by methods of discrete mathematics. Namely, the process is represented as an oriented graph marked by the probabilities of transitions between states (nondeterministic automaton). For this automaton, regular expressions are found that determine the entry of formulas for the probabilities of transitions, including those to absorbing states. Then, the expressions for the final probabilities are reduced to finite continued fractions or their combinations and summed up using Euler fractions. As a result, an analytical representation is obtained for the generating function of the final probabilities.

Keywords: birth and death process, Markov process, regular expressions, nondeterministic automata, Euler fractions.

1 Введение

Одной из актуальных проблем теории случайных процессов является задача развития аналитических методов исследования марковских

процессов с конечным или счётным множеством состояний и непрерывным или дискретным временем. Работа посвящена рассмотрению классического марковского процесса рождения и гибели с условиями на границах множества состояний. Для процесса рождения и гибели с двумя поглощающими состояниями и одним начальным рассмотрена задача о финальных вероятностях, обобщающая задачу о случайном блуждании на конечном дискретном множестве с постоянными, не зависящими от состояния, вероятностями перехода и двумя поглощающими экранами. Финальные вероятности получены методами дискретной математики. Именно, процесс представляется в виде орграфа, размеченного по вероятностям переходов между состояниями (недетерминированного автомата). Для данного автомата находятся регулярные выражения, определяющие запись формул вероятностей переходов, в том числе в поглощающие состояния.

2 Определение процесса

На множестве состояний $i \in \{0, 1, 2, \dots, n + 1\}$, $n \in N$, определим однородный во времени марковский процесс $\xi(t)$, $t \in [0, \infty)$, с переходными вероятностями

$$P_j^i(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}.$$

Пусть переходные вероятности имеют вид $\Delta t \rightarrow 0+$:

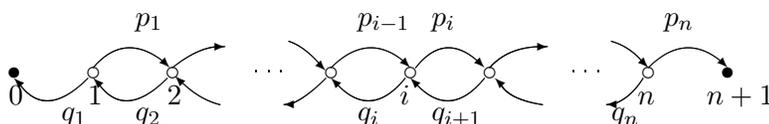
$$\begin{aligned} P_{i-1}^i(\Delta t) &= q_i \Delta t + o(\Delta t), 0 < i < n, \\ P_{i+1}^i(\Delta t) &= p_i \Delta t + o(\Delta t), 0 < i < n + 1, \end{aligned}$$

где $p_i + q_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Процесс носит название процесса рождения и гибели с поглощающими состояниями 0 и $n + 1$ и переменными вероятностями перехода. Для процесса $\xi(t)$ определяются *финальные вероятности* для поглощающих состояний 0 и $n + 1$, q_{i0} и q_{in+1} , $q_{i0} + q_{in+1} = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$

$$q_{i0} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_0^i(t), \quad q_{in+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{n+1}^i(t).$$

Определённому выше процессу $\xi(t)$ с непрерывным временем соответствует процесс с дискретным временем и финальными вероятностями переходов между состояниями $\{0, 1, 2, \dots, n + 1\}$, $n \in N$, и двумя поглощающими состояниями 0 и $n + 1$, экранами. Рассмотрим граф данного процесса.



Задача вычисления финальных вероятностей сводится к задаче о нахождении регулярных выражений (регулярных языков) в источнике (недетерминированном конечном автомате [1]), задаваемом данным графом. Искомые финальные вероятности q_{i0}, q_{in+1} суть значения, вычисляемые по соответствующим регулярным выражениям x_{i0}, x_{in+1} .

3 Сведение к вычислению регулярного выражения

Введём матрицу A для источника, аналогичную матрице весов для графа, она состоит из слов a_{ij} на односторонних путях из i в j . Обозначим через X матрицу, состоящую из слов, написанных на всех маршрутах из i в j . В идемпотентной полуалгебре регулярных выражений под суммой понимается объединение, под умножением конкатенация, ноль выполняет роль пустого множества, λ — пустого слова. Тогда верно равенство $X = XA + E$, где E единичная матрица с λ на диагонали [2]. Если требуется найти конкретный элемент x_{kj} матрицы X , где k и j начальная и конечная вершины соответственно, то можно рассмотреть только k строку матрицы, содержащую этот элемент. Таким образом получается система из n уравнений с n неизвестными. Матрица системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Напомним следующее [1]

Определение 1. Для регулярного выражения a будем называть его инверсией a^* регулярное выражение $a^* = \lambda + a + a^2 + a^3 + \dots$.

При решении системы будет применяться лемма

Лемма 1. [2] Пусть a, b — регулярные выражения, причём $\lambda \notin a$. Тогда для регулярного выражения c , такого, что $c = a + bc$, верно $c = b^*a$.

Для упрощения вычислений введём следующие обозначения

Определение 2. Прямыми частичными дробями назовём выражения вида

$$v_0 = 0, v_1 = p_{n-1}q_n, v_2 = p_{n-2}v_1^*q_{n-1}, \dots, \\ v_i = p_{n-i}v_{i-1}^*q_{n-i+1}, \dots, v_{n-1} = p_1v_{n-2}^*q_2.$$

Обратными частичными дробями назовём выражения вида

$$u_0 = 0, u_1 = q_2p_1, u_2 = q_3u_1^*p_2, \dots,$$

$$u_i = q_{i+1}u_{i-1}^*p_i, \dots, u_{n-1} = q_n u_{n-2}^*p_{n-1}.$$

Теорема 1. *Регулярные выражения имеют вид:*

$$\begin{aligned} x_{10} &= v_{n-1}^*q_1, \\ x_{1n+1} &= v_{n-1}^*p_1v_{n-2}^*p_2 \dots v_1^*p_{n-1}p_n, \\ x_{nn+1} &= u_{n-1}^*p_n, \\ x_{n0} &= u_{n-1}^*q_nu_{n-2}^*q_{n-1} \dots u_1^*q_2q_1, \\ x_{i0} &= (u_{i-1} + v_{n-i})^*q_iu_{i-2}^* \dots u_1^*q_2q_1, \\ x_{in+1} &= (u_{i-1} + v_{n-i})^*p_iv_{n-i-1}^* \dots v_1^*p_{n-1}p_n. \end{aligned}$$

Доказательство. Выпишем систему для строки неизвестных $(x_{10}, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{1n+1})$

$$\begin{aligned} x_{10} &= x_{11}q_1; \\ x_{11} &= x_{12}q_2 + \lambda; \\ x_{12} &= x_{11}p_1 + x_{13}q_3; \\ &\dots \\ x_{1i-1} &= x_{1i-2}p_{i-2} + x_{1i}q_i; \\ x_{1i} &= x_{1i-1}p_{i-1} + x_{1i+1}q_{i+1}; \\ &\dots \\ x_{1n-2} &= x_{1n-3}p_{n-3} + x_{1n-1}q_{n-1}; \\ x_{1n-1} &= x_{1n-2}p_{n-2} + x_{1n}q_n; \\ x_{1n} &= x_{1n-1}p_{n-1}; \\ x_{1n+1} &= x_{1n}p_n. \end{aligned}$$

Для её решения, начиная с предпоследнего уравнения, подставляем x_{1n} в предыдущее и применяем лемму. Получим

$$\begin{aligned} x_{1n-1} &= x_{1n-2}p_{n-2}(q_n p_{n-1})^*; \\ x_{1n-2} &= x_{1n-3}p_{n-3}(q_{n-1}(q_n p_{n-1})^* p_{n-2})^*; \\ &\dots \\ x_{12} &= x_{11}p_1(p_2(p_3 \dots (p_{n-1}q_n)^* \dots q_4)^* q_3)^*; \\ x_{11} &= x_{11}p_1(p_2(p_3 \dots (p_{n-1}q_n)^* \dots q_4)^* q_3)^* q_2 + \lambda; \\ x_{10} &= (p_1(p_2(p_3 \dots (p_{n-1}q_n)^* \dots q_4)^* q_3)^* q_2)^* q_1. \end{aligned}$$

Запишем результат, используя прямую дробь: $x_{10} = v_{n-1}^*q_1$.

Для строки $(x_{n0}, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}, x_{nn+1})$, записав систему и подставляя x_{n1} из второго уравнения в последующие, аналогично получим регулярное выражение $x_{nn+1} = u_{n-1}^*p_n$.

Выпишем систему для строки неизвестных $(x_{i0}, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}, x_{in+1})$

$$\begin{aligned}
 x_{i0} &= x_{i1}q_1; \\
 x_{i1} &= x_{i2}q_2; \\
 x_{i2} &= x_{i1}p_1 + x_{i3}q_3; \\
 &\dots \\
 x_{ii-1} &= x_{ii-2}p_{i-2} + x_{ii}q_i; \\
 x_{ii} &= x_{ii-1}p_{i-1} + x_{ii+1}q_{i+1} + \lambda; \\
 &\dots \\
 x_{in-2} &= x_{in-3}p_{n-3} + x_{in-1}q_{n-1}; \\
 x_{in-1} &= x_{in-2}p_{n-2} + x_{in}q_n; \\
 x_{in} &= x_{in-1}p_{n-1}; \\
 x_{in+1} &= x_{in}p_n.
 \end{aligned}$$

Подставляем сверху и снизу, x_{i2} из второго уравнения подставляем в третье, а также x_{in} из предпоследнего в предыдущее, и так далее. Получим в $(i-1)$ - уравнении: $x_{ii-1} = x_{ii}q_i u_{i-2}^*$, в $(i+1)$ - уравнении: $x_{ii+1} = x_{ii}p_i v_{n-i-1}^*$. Подставив в i - уравнение получим:

$$x_{ii} = x_{ii}q_i u_{i-2}^* + x_{ii}p_i v_{n-i-1}^* + \lambda,$$

откуда, после применения леммы, $x_{ii} = (u_{i-1} + v_{n-i})^*$. Последовательно подставляя получаем утверждение теоремы. \square

Полученные выражения дают минимальные решения линейных систем уравнений в идемпотентной полуалгебре регулярных языков. Для перехода к вычислению соответствующих вероятностей потребуется обращение к конечным цепным дробям. Рассмотрим некоторые их свойства.

4 Прямые и обратные частичные дроби. Связь с цепными дробями Эйлера

Перейдём к числовым выражениям в полученных формулах. Положим $\lambda = 1$. Тогда итерация записывается как формальный степенной ряд [3] $a^* = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$ с обратным $1 - a$. И формально можно записать выражение $v_2 = q_{n-1}v_1^*p_{n-2}$ как дробь

$$v_2 = \frac{q_{n-1}p_{n-2}}{1 - v_1} = \frac{q_{n-1}p_{n-2}}{1 - q_n p_{n-1}},$$

и, далее,

$$v_3 = q_{n-2}v_2^*p_{n-3} = \frac{q_{n-2}p_{n-3}}{1 - v_2} = \frac{q_{n-2}p_{n-3}}{1 - \frac{q_{n-1}p_{n-2}}{1 - q_n p_{n-1}}} =$$

$$= \frac{q_{n-2}p_{n-3}}{1} - \frac{q_{n-1}p_{n-2}}{1} - \frac{q_n p_{n-1}}{1},$$

$$v_{n-1} = \frac{q_2 p_1}{1} - \frac{q_3 p_2}{1} - \dots - \frac{q_n p_{n-1}}{1}.$$

Аналогично,

$$u_{n-1} = \frac{q_n p_{n-1}}{1} - \frac{q_{n-1} p_{n-2}}{1} - \dots - \frac{q_2 p_1}{1}.$$

Отсюда получаем запись двух финальных вероятностей в виде конечных цепных дробей

$$x_{10} = q_1 v_{n-1}^* = \frac{q_1}{1} - \frac{q_2 p_1}{1} - \frac{q_3 p_2}{1} \dots - \frac{q_n p_{n-1}}{1}$$

$$x_{nn+1} = p_n u_{n-1}^* = \frac{q_n}{1} - \frac{q_n p_{n-1}}{1} - \frac{q_{n-1} p_{n-2}}{1} - \dots - \frac{q_2 p_1}{1}.$$

Таким образом, все полученные ранее выражения для финальных вероятностей сводятся к конечным цепным дробям или их комбинациям. Так как $p_i + q_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, то дроби легко суммируются, поскольку сводятся к дробям Эйлера [4]

$$\rho_0 + \frac{\rho_1}{1} - \frac{\rho_2}{1 + \rho_2} - \frac{\rho_3}{1 + \rho_3} - \dots - \frac{\rho_n}{1 + \rho_n} = \rho_0 + \sum_{k=1}^n \rho_1 \rho_2 \dots \rho_k.$$

Предложение 1. Для прямых и обратных частичных дробей справедливости равенства

$$v_i = p_{n-i} \frac{\sum_{k=n+1-i}^n \prod_{l=n+1-i}^k q_l / p_l}{1 + \sum_{k=n+1-i}^n \prod_{l=n+1-i}^k q_l / p_l}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$u_i = q_{i+1} \frac{\sum_{k=n+1-i}^n \prod_{l=n+1-i}^k p_{n+1-l} / q_{n+1-l}}{1 + \sum_{k=n+1-i}^n \prod_{l=n+1-i}^k p_{n+1-l} / q_{n+1-l}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Доказательство. Для фиксированного i обозначим через $K = q_{n-i+1} v_{i-1}^*$, тогда $v_i = p_{n-i} K$ и получаем

$$K = \frac{q_{n-i+1}}{1} - \frac{q_{n-i+2} p_{n-i+1}}{1} - \dots - \frac{q_n p_{n-1}}{1} =$$

$$= \frac{q_{n-i+1}}{p_{n-i+1} + q_{n-i+1}} - \frac{q_{n-i+2} p_{n-i+1}}{p_{n-i+2} + q_{n-i+2}} - \dots - \frac{q_n p_{n-1}}{p_n + q_n} =$$

$$= \frac{q_{n-i+1} / p_{n-i+1}}{1 + q_{n-i+1} / p_{n-i+1}} - \frac{q_{n-i+2} / p_{n-i+2}}{1 + q_{n-i+3} / p_{n-i+2}} - \dots - \frac{q_n / p_n}{1 + q_n / p_n},$$

проводя эквивалентные преобразования цепной дроби [4]. K составляет часть частичной суммы дроби Эйлера

$$S = \frac{q_{n-i}/p_{n-i}}{1} - \frac{q_{n-i+1}/p_{n-i+1}}{1 + q_{n-i+1}/p_{n-i+1}} - \frac{q_{n-i+2}/p_{n-i+2}}{1 + q_{n-i+3}/p_{n-i+2}} - \dots - \frac{q_n/p_n}{1 + q_n/p_n} = \frac{q_{n-i}/p_{n-i}}{1} - \frac{K}{1} = \frac{q_{n-i}/p_{n-i}}{1 - K}.$$

Тогда

$$v_i = p_{n-i} \left(1 - \frac{q_{n-i}}{p_{n-i} S} \right) = p_{n-i} \left(1 - \frac{1}{\frac{p_{n-i}}{q_{n-i}} \left(\frac{q_{n-i}}{p_{n-i}} + \frac{q_{n-i}}{p_{n-i}} \frac{q_{n-i+1}}{p_{n-i+1}} + \dots + \frac{q_{n-i}}{p_{n-i}} \frac{q_{n-i+1}}{p_{n-i+1}} \dots \frac{q_n}{p_n} \right)} \right),$$

откуда следует утверждение предложения. Для u_i проводятся аналогичные вычисления. \square

5 Вероятностное свойство

Теперь, подставив значения частичных сумм в найденные выражения, можно записать формулы для финальных вероятностей перехода в поглощающие состояния. Однако, сделаем это позже, предварительно выяснив их вероятностные свойства, полезные для упрощения формул. Выражения теперь считаем коммутативными.

Предложение 2. Для финальных вероятностей верно равенство:

$$q_{10} + q_{1n+1} = x_{10} + x_{1n+1} = 1.$$

Доказательство.

$$1 - x_{10} = 1 - q_1 v_{n-1}^* = 1 - \frac{q_1}{1 - v_{n-1}} = \frac{p_1 - q_2 v_{n-2}^* p_1}{1 - v_{n-1}} = v_{n-1}^* p_1 (1 - q_2 v_{n-2}^*) = \dots = p_1 p_2 \dots p_n v_1^* v_2^* \dots v_{n-1}^* = x_{1n+1}.$$

\square

Аналогично доказывается

Предложение 3. Для финальных вероятностей верно равенство:

$$q_{n0} + q_{nn+1} = x_{n0} + x_{nn+1} = 1.$$

Следствие 1. Для прямых частичных дробей верно равенство:

$$p_n p_{n-1} \dots p_i v_1^* v_2^* \dots v_{n-i}^* = 1 - q_i v_{n-i}^*.$$

Следствие 2. Для обратных частичных дробей верно равенство:

$$q_1 q_2 \dots q_i u_1^* u_2^* \dots u_{i-1}^* = 1 - p_i u_{i-1}^*.$$

Предложение 4. Для финальных вероятностей верно равенство:

$$q_{i0} + q_{in+1} = x_{i0} + x_{in+1} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Доказательство. Из теоремы 2 и следствий 1 и 2 получаем

$$q_1 q_2 \dots q_i u_1^* u_2^* \dots u_{i-2}^* = \frac{1 - p_i u_{i-1}^*}{u_{i-1}^*} = \frac{1}{u_{i-1}^*} - p_i,$$

$$p_n p_{n-1} \dots p_i v_1^* v_2^* \dots v_{n-i-1}^* = \frac{1 - q_i v_{n-i}^*}{v_{n-i}^*} = \frac{1}{v_{n-i}^*} - q_i,$$

ПОЭТОМУ

$$x_{i0} + x_{in+1} = \left(\frac{1}{u_{i-1}^*} - p + \frac{1}{v_{n-i}^*} - q_i \right) (u_{i-1} + v_{n-i})^* =$$

$$= (1 - (u_{i-1} + v_{n-i})) (u_{i-1} + v_{n-i})^* = \frac{1 - (u_{i-1} + v_{n-i})}{1 - (u_{i-1} + v_{n-i})} = 1.$$

□

6 Формулы для финальных вероятностей

Теорема 2. Для $i > 1$

$$q_{i0} = \frac{q_i + q_i \sum_{k=i+1}^n \prod_{l=1+i}^k q_l/p_l}{1 + p_i \sum_{k=n+2-i}^n \prod_{l=n+2-i}^k p_{n+1-l}/q_{n+1-l} + q_i \sum_{k=i+1}^n \prod_{l=1+i}^k q_l/p_l},$$

$$q_{in+1} = \frac{p_i + p_i \sum_{k=n+2-i}^n \prod_{l=n+2-i}^k p_{n+1-l}/q_{n+1-l}}{1 + p_i \sum_{k=n+2-i}^n \prod_{l=n+2-i}^k p_{n+1-l}/q_{n+1-l} + q_i \sum_{k=i+1}^n \prod_{l=1+i}^k q_l/p_l},$$

для $i = 1$

$$q_{10} = \frac{\sum_{k=1}^n \prod_{l=1}^k q_l/p_l}{1 + \sum_{k=1}^n \prod_{l=1}^k q_l/p_l}, \quad q_{1n+1} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \prod_{l=1}^k q_l/p_l}.$$

Доказательство. Из доказательства предложения 2 $q_{i0} = \frac{q_i - u_{i-1}}{1 - u_{i-1} - v_{n-1}}$

и $q_{in+1} = \frac{p_i - v_{n-1}}{1 - u_{i-1} - v_{n-1}}$. Далее применяется предложение 1. □

Следствие 3. Для случая $p_i = p$, $q_i = q$, $p \neq q$ получаем, суммируя геометрические прогрессии,

$$q_{10} = \frac{(q/p)^i - (q/p)^{n+1}}{1 - (q/p)^{n+1}}.$$

Если $p = q$, то

$$q_{i0} = 1 - \frac{i}{n+1},$$

что соответствует классическим формулам [1].

В заключении отметим, что изложенный метод успешно применяется и в более общей задаче, где в каждом непоглощающем состоянии (то есть в каждой вершине графа, кроме двух крайних) помещается полупрозрачный экран с изменяемым коэффициентом прозрачности.

References

- [1] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications* Vol. 1, John Wiley and Sons, New York, 1950.
- [2] A.A. Mastikhina, *Chapters of Discrete Mathematics for Engineering majors on finding regular expressions*. Electronic Journal: science, Technology and education. **1** (2023), 24–30.
- [3] P. Henrici, *Applied and computational complex analysis.*, Vol. 1., John Wiley and Sons, New York, 1970.
- [4] W.B. Jones, W.J.Thron *Continued Fractions. Analitic Theory and Applications*, Cambridge Univirsity Press, 2010.

ANNA ANTONOVNA MASTIKHINA, ANTON VYACHESLAVOVICH MASTIKHIN
BAUMAN MOSCOW STATE TECHNOLOGICAL UNIVERSITY,
2-ND BAUMANSKAYA, 5-1 ,
105005, MOSCOW, RUSSIA
Email address: mastikhin@bmstu.ru