

О СЛОЖНОСТИ РЕШЕТКИ  
КВАЗИМНОГОБРАЗИЙ 3-СТУПЕННО  
НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

А.И. Будкин 

*Представлено* В.В. Пржиялковским

**Abstract:** Denote by  $\mathcal{N}_3$  the variety of nilpotent groups of class at most 3, by  $\mathcal{M}$  the quasivariety generated by the non-abelian  $\mathcal{N}_3$ -free group  $F$ . Let  $\mathcal{R}$  be an arbitrary quasivariety such that  $F \in \mathcal{R}$ . Suppose that there exists a torsion free nilpotent group  $G$  of class 3,  $G \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{M}$ , having the representation relative to  $\mathcal{N}_3$  in which each defining relation is a product of basic commutators of weight 3 on three different variables or a commutator of the form  $[x_i, x_j]$  (the last defining relations may be missing). It is proved that in this case the interval  $[\mathcal{M}, \mathcal{R}]$  in the lattice of quasivarieties of groups is continual.

**Keywords:** lattice, quasivariety, nilpotent group.

## 1 Введение

В процессе развития теории квазимногообразий достаточно быстро стало известно, что решётки квазимногообразий имеют весьма сложное строение. Информацию о сложности решёток квазимногообразий групп можно найти в [1]–[3].

---

BUDKIN, A.I., ON THE COMPLEXITY OF THE LATTICE OF QUASIVARIES OF NILPOTENT GROUPS OF CLASS 3.

© 2025 Будкин А.И.,

Поступила 30 марта 2025 г., опубликована 14 октября 2025 г.

Свойства решёток квазимногообразий часто связано с наличием независимых базисов квазитождеств. Существование бесконечного независимого базиса квазитождеств квазимногообразия означает, что данное квазимногообразие имеет бесконечное множество покрытий в решётке квазимногообразий ([4], предложение 6.3.1). Из ([4], предложение 6.3.1), в частности, следует, что если  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  — квазимногообразия ( $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ ) и для некоторого конечно аксиоматизируемого в  $\mathcal{N}$  квазимногообразия  $\mathcal{K}$  ( $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{N}$ ) справедливо следующее: для любого квазимногообразия  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{K}$ , интервал  $[\mathcal{M}, \mathcal{R}]$  в решётке квазимногообразий бесконечен, то  $\mathcal{M}$  в  $\mathcal{N}$  не имеет бесконечного независимого базиса квазитождеств. Очень часто при доказательстве отсутствия независимого базиса квазитождеств квазимногообразия  $\mathcal{M}$  этот интервал  $[\mathcal{M}, \mathcal{R}]$  оказывается континуальным. Например, континуальными оказались интервалы вида  $[\mathcal{M}, \mathcal{R}]$  для следующих квазимногообразий  $\mathcal{M}$ :  $\mathcal{M}$  — квазимногообразии, порождённое неабелевой свободной 2-ступенно нильпотентной группой простой экспоненты  $p$  ( $p \neq 2$ ) [5] (см., также [6], следствие 4.3.13);  $\mathcal{M}$  — квазимногообразии, порождённое неабелевой свободной 2-ступенно нильпотентной группой [7] (см., также [6], следствие 4.3.11);  $\mathcal{M}$  — квазимногообразии, порождённое неабелевой свободной 2-ступенно нильпотентной группой экспоненты  $p^k$  с коммутантом экспоненты  $p$  ( $p$  — простое число,  $k \geq 2$ ) [8]. Изучение интервалов  $[\mathcal{M}, \mathcal{R}]$  продолжено в [9] для квазимногообразий  $\mathcal{M}$ , порождённых относительно свободными 2-ступенно нильпотентными группами экспоненты  $p^k$  ( $p$  — простое число). В [10] получена теорема, характеризующая сложность решётки подквазимногообразий квазимногообразия 2-степенно нильпотентных групп без кручения, а именно установлено, что существует бесконечное множество квазимногообразий  $\mathcal{M}$  2-степенно нильпотентных групп без кручения, порождённых конечно порождённой группой, таких, что для любого квазимногообразия  $\mathcal{R}$  2-степенно нильпотентных групп без кручения ( $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{R}$ ) интервал  $[\mathcal{M}, \mathcal{R}]$  в решётке квазимногообразий континуален.

В данной работе доказывается континуальность интервала  $[\mathcal{M}, \mathcal{R}]$  в случае, когда  $\mathcal{M}$  — квазимногообразии, порождённое неабелевой свободной 3-ступенно нильпотентной группой, квазимногообразии  $\mathcal{R}$  содежит 3-ступенно нильпотентную группу  $G$  ( $G \notin \mathcal{M}$ ), имеющую в  $\mathcal{N}_3$  представление, каждое определяющее соотношение которого является произведением базисных коммутаторов веса 3 от трёх различных переменных либо коммутатором вида  $[x_i, x_j]$  (последние соотношения могут отсутствовать).

## 2 Предварительные сведения

В работе используются следующие обозначения:  $\mathbb{Z}$  — множество целых чисел;  $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y$ ,  $[x, y, z] = [[x, y], z]$ ;  $\mathcal{N}_c$  — многообразии нильпотентных групп степени не выше  $c$ ;  $\mathcal{N}_{3, \infty}$  — класс групп без кручения из  $\mathcal{N}_3$ ;  $F_X(\mathcal{N}_3)$  — свободная в  $\mathcal{N}_3$  группа с множеством

свободных порождающих  $X$ ;  $F_2 = F_2(\mathcal{N}_3)$  — свободная в  $\mathcal{N}_3$  группа со свободными порождающими  $a, b$ ;  $\langle x, y, \dots \rangle$  — группа, порождённая элементами  $x, y, \dots$ ;  $\langle x \rangle$  — циклическая группа, порождённая  $x$ ;  $\gamma_1(G) = G$ ,  $\gamma_2(G) = G' = [G, G]$ ,  $\gamma_3(G) = [\gamma_2(G), G]$ .

Если  $H$  — подгруппа группы  $G$ , то  $IsH = \{g \in G \mid (\exists n)(n \in \mathbb{Z} \ \& \ n \neq 0 \ \& \ g^n \in H)\}$  — изолятор подгруппы  $H$  в  $G$ .

$qM$  — это квазимногообразие, порождённое классом групп  $M$ . Если  $M = \{G\}$ , то вместо  $q\{G\}$  пишем  $qG$ .

Если  $\mathcal{M}, \mathcal{R}$  — квазимногообразия и  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{R}$ , то через  $[\mathcal{M}, \mathcal{R}]$  обозначаем интервал в решётке квазимногообразий, т.е. это множество всех квазимногообразий  $\mathcal{K}$  таких, что  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{R}$ .

Для всякого квазимногообразия  $\mathcal{M}$  обозначим через  $\mathcal{M}(G)$  — наименьшую нормальную подгруппу группы  $G$ , фактор-группа по которой принадлежит  $\mathcal{M}$ . В частности, при каждом гомоморфизме  $\varphi$  группы  $G$  в любую группу из  $\mathcal{M}$  имеем:  $(\mathcal{M}(G))^\varphi = 1$ .

Стандартным образом определяем вес  $w(a)$  коммутатора, считая, что

1)  $w(x) = 1$ , если  $x$  — предметная переменная,

2)  $w(a) = w(u) + w(v)$ , если  $a = [u, v]$ .

$[x_3, x_2, x_2], [x_3, x_2, x_3], [x_3, x_1, x_1], [x_3, x_1, x_2],$

$[x_3, x_1, x_3], [x_2, x_1, x_1], [x_2, x_1, x_2], [x_2, x_1, x_3]$

— это все базисные коммутаторы веса 3 в переменных  $x_1, x_2, x_3$ .

При написании тождеств кванторы всеобщности будем опускать.

Нам потребуются следующие известные коммутаторные тождества ([11], теорема 33.33), истинные в каждой нильпотентной группе степени 3:

$$[a, bc] = [a, c][a, b][a, b, c], \quad (1)$$

$$[ab, c] = [a, c][a, c, b][b, c], \quad (2)$$

$$[a, b, c][b, c, a][c, a, b] = 1. \quad (3)$$

Полезными окажутся легко доказываемые по индукции тождества, истинные в нильпотентной группе степени 3:

$$y^n x = xy^n [y, x]^n [y, x, y]^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad (4)$$

$$(xy)^n = x^n y^n [y, x]^{\frac{n(n-1)}{2}} [y, x, x]^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} [y, x, y]^{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}. \quad (5)$$

Нам понадобится тождество (4) в следующем виде:

$$[x, y]^n = [x, y^n][y, x, y]^{\frac{n(n-1)}{2}}. \quad (6)$$

Напомним определение свободного произведения групп в многообразии  $\mathcal{N}_3$ . Предположим, что группы  $A$  и  $B$  имеют в  $\mathcal{N}_3$  представления:

$$A = \langle \{x_i \mid i \in I_1\}; \{t_j = 1 \mid j \in J_1\} \rangle, B = \langle \{y_i \mid i \in I_2\}; \{r_j = 1 \mid j \in J_2\} \rangle.$$

Тогда группа  $G$ , имеющая в  $\mathcal{N}_3$  представление

$$G = \langle \{x_i \mid i \in I_1\} \cup \{y_i \mid i \in I_2\}; \{t_j = 1 \mid j \in J_1\} \cup \{r_j = 1 \mid j \in J_2\} \rangle,$$

обозначается через  $G = A *_{\mathcal{N}_3} B$  и называется свободным произведением групп  $A$  и  $B$  в многообразии  $\mathcal{N}_3$ . Часто вместо  $A *_{\mathcal{N}_3} B$  будем писать  $G = A * B$ , опуская индекс  $\mathcal{N}_3$ . Подгруппы группы  $G$ , порождённые множествами элементов  $\{x_i \mid i \in I_1\}$  и  $\{y_i \mid i \in I_2\}$ , изоморфны группам  $A$  и  $B$ . Их будем обозначать, соответственно, через  $A$  и  $B$ .

Нам понадобится следующая теорема Дика ([12], с. 281, [13], с. 55).

**Лемма 1.** Пусть группа  $G$  имеет в данном квазимногообразии  $\mathcal{N}$  представление  $G = \langle \{x_i \mid i \in I\} ; \{r_j(x_{j_1}, \dots, x_{j_{l(j)}}) = 1 \mid j \in J\} \rangle$ . Предположим, что  $H \in \mathcal{N}$  и группа  $H$  содержит множество элементов  $\{g_i \mid i \in I\}$  такое, что для всякого  $j \in J$  равенство  $r_j(g_{j_1}, \dots, g_{j_{l(j)}}) = 1$  истинно в  $H$ . Тогда отображение  $x_i \rightarrow g_i$  ( $i \in I$ ) продолжается до гомоморфизма  $G$  в  $H$ .

Будем пользоваться (частный случай теоремы 3 [14]) признаком принадлежности конечно определённой группы  $G$  квазимногообразию  $q\mathcal{R}$ .

**Лемма 2.** Конечно определённая в квазимногообразии  $\mathcal{M}$  группа  $G$  принадлежит квазимногообразию, порождённому классом групп  $\mathcal{R}$  ( $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}$ ), тогда и только тогда, когда для любого элемента  $g \in G, g \neq 1$ , существует гомоморфизм  $\varphi_g$  группы  $G$  в некоторую группу из класса  $\mathcal{R}$  такой, что  $g^{\varphi_g} \neq 1$ .

Будем ссылаться на следующую теорему 3 из [15].

**Теорема 1.** Пусть  $B = \langle b_1, \dots, b_n, A \rangle$  — конечно порождённая 3-ступенно нильпотентная группа без кручения и  $b_i^{k_i} \in B'$  для некоторого ненулевого  $k_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Если  $A \in qF_2$ , то  $B \in qF_2$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\mathcal{M}$  — квазимногообразие,  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}_{3,\infty}$ ,  $F_2(\mathcal{N}_3) \in \mathcal{M}$ . Предположим, что группы  $G_1$  и  $G_2$  имеют в  $\mathcal{N}_3$  представления

$$G_1 = \langle x_1, x_2, \dots; \Sigma_1 \rangle, G_2 = \langle y_1, y_2, \dots; \Sigma_2 \rangle,$$

определяющие соотношения в которых — произведения коммутаторов веса 3 от трёх переменных либо коммутаторы видов  $[x_i, x_j]$ ,  $[y_i, y_j]$ . Пусть  $N$  — нормальная подгруппа группы  $G_1 * G_2$ , порождённая некоторыми коммутаторами  $[x_i, y_j]$  (возможно единичная). Если  $G_1, G_2 \in \mathcal{M}$ , то  $G = (G_1 * G_2)/N \in \mathcal{M}$ .

Эта теорема для случая  $\mathcal{M} = qF_2(\mathcal{N}_3)$  доказана в [15] (теорема 4). Доказательство теоремы 2 в приведённой формулировке полностью совпадает с доказательством теоремы 4 [15] и поэтому мы его опустим.

С основными понятиями можно познакомиться в [4, 6, 13].

### 3 Квазимногообразие $qF_2(\mathcal{N}_3)$

Следующая лемма известна (доказательство более общего утверждения см., например, в [16]).

**Лемма 3.** Пусть  $u, v \in F_2$ ,  $u \notin F_2'$ ,  $[u, v] = 1$ . Тогда  $u, v$  являются степенями одного и того же элемента по модулю  $\gamma_3(F_2)$ , т.е.  $u = h^l c_1$ ,  $v = h^t c_2$  для некоторых  $c_1, c_2 \in \gamma_3(F_2)$ ,  $h \in F_2$  и целых чисел  $l, t$ .

**Замечание 1.** Из леммы 3 следует, что если  $w \in F_2 \setminus F_2'$ , то централизатор  $C(w)$  в  $F_2$  элемента  $w$  абелев.

Действительно, пусть  $[w, u] = 1, [w, v] = 1$ . По лемме 3  $w = h^l c_1$ ,  $u = h^t c_2$ ,  $w = f^s c_3$ ,  $v = f^q c_4$  ( $c_i \in \gamma_3(F_2)$ ). Отсюда  $[h^l, f^s] = 1$ . Как хорошо известно (см., например, [13], 16.2.9), из перестановочности степеней элементов нильпотентной группы без кручения следует перестановочность этих элементов. Поэтому  $[h, f] = 1$ , откуда  $[u, v] = [h^t, f^q] = 1$ , т.е.  $C(w)$  — абелева группа.

Следующая лемма говорит, что элемент  $c$  из леммы 4 нельзя записать в виде произведения "малого" числа коммутаторов.

**Лемма 4.** Пусть  $F$  — свободная 3-нильпотентная группа со свободными порождающими  $x_1, \dots, x_{3m}$ . Предположим, что натуральные числа  $l, t, f$  выбраны так, чтобы  $l(f+1) + 3t < \frac{f^2-1}{3}$ ,  $\frac{f^3-f}{3} < m$ . Тогда элемент  $c = \prod_{i=1}^m [x_i, x_{i+m}, x_{i+2m}]$  из  $F$  не представим в виде  $c = \prod_{i=1}^l [f_i, f_{i+l}] \prod_{i=1}^t [u_i, u_{i+t}, u_{i+2t}]$ .

*Доказательство.* Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда в группе  $F$  имеет место соотношение вида

$$\prod_{i=1}^l [f_i(\bar{x}), f_{i+l}(\bar{x})] \prod_{i=1}^t [u_i(\bar{x}), u_{i+t}(\bar{x}), u_{i+2t}(\bar{x})] = \prod_{i=1}^m [x_i, x_{i+m}, x_{i+2m}]. \quad (7)$$

Поскольку  $F$  — свободная нильпотентная группа ступени 3, то на это соотношение можно смотреть как на тождество, истинное в любой нильпотентной группе ступени не выше 3.

Пусть  $\tilde{F}$  — свободная 3-нильпотентная группа экспоненты  $p$  (т.е. в  $\tilde{F}$  истинно тождество  $x^p = 1$ , где  $p$  — фиксированное простое число,  $p \neq 2, p \neq 3$ ) со свободными порождающими  $x_1, \dots, x_f$ . Оценим порядок  $\tilde{F}'$  двумя способами. Всякий элемент из  $\gamma_3(\tilde{F})$  можно записать в виде произведения степеней базисных коммутаторов веса 3. Как хорошо известно ([17], теорема 11.2.2), этих базисных коммутаторов  $\frac{f^3-f}{3}$  штук. Из линейности коммутаторов веса 3 теперь следует, что всякий элемент из  $\gamma_3(\tilde{F})$  можно записать в виде произведения  $\frac{f^3-f}{3}$  коммутаторов веса 3. Так как  $\frac{f^3-f}{3} < m$ , из истинности в  $\tilde{F}$  тождества (7) следует, что всякий элемент из  $\gamma_3(\tilde{F})$  можно записать в виде произведения  $l$  коммутаторов вида  $[u, v]$  и произведения  $t$  коммутаторов вида  $[u, v, w]$ .

Оценим число коммутаторов вида  $[u, v]$ . Любые элементы  $u, v$  можно представить так:

$$u = x_1^{k_1} \dots x_f^{k_f} \prod_{1 \leq j < i \leq f} [x_i, x_j]^{k_{ij}} c_1,$$

$$v = x_1^{m_1} \dots x_f^{m_f} \prod_{1 \leq j < i \leq f} [x_i, x_j]^{m_{ij}} c_2,$$

где  $c_1, c_2$  — подходящие элементы из  $\gamma_3(\tilde{F})$ ,  $0 \leq k_i, k_{ij}, m_i, m_{ij} \leq p - 1$ . Отсюда

$$[u, v] = [x_1^{k_1} \dots x_f^{k_f} \prod_{1 \leq j < i \leq f} [x_i, x_j]^{k_{ij}}, x_1^{m_1} \dots x_f^{m_f} \prod_{1 \leq j < i \leq f} [x_i, x_j]^{m_{ij}}].$$

Таких записей  $p^f p^{\frac{f(f-1)}{2}} p^f p^{\frac{f(f-1)}{2}} = p^{f^2+f}$  штук. Значит, произведений из  $l$  коммутаторов вида  $[u, v]$  не более  $p^{l(f^2+f)}$ .

Оценим число коммутаторов вида  $[u, v, w]$ . Любые элементы  $u, v, w$  можно представить так:

$$u = x_1^{k_1} \dots x_f^{k_f} \prod_{1 \leq j < i \leq f} [x_i, x_j]^{k_{ij}} c_1,$$

$$v = x_1^{m_1} \dots x_f^{m_f} \prod_{1 \leq j < i \leq f} [x_i, x_j]^{m_{ij}} c_2,$$

$$w = x_1^{s_1} \dots x_f^{s_f} \prod_{1 \leq j < i \leq f} [x_i, x_j]^{f_{ij}} c_3,$$

где  $c_1, c_2, c_3$  — подходящие элементы из  $\gamma_3(\tilde{F})$ ,  $0 \leq k_i, k_{ij}, m_i, m_{ij}, s_i, f_{ij} \leq p - 1$ . Отсюда  $[u, v, w] = [x_1^{k_1} \dots x_f^{k_f}, x_1^{m_1} \dots x_f^{m_f}, x_1^{s_1} \dots x_f^{s_f}]$ . Таких записей  $p^{3f}$  штук. Значит, произведений из  $t$  коммутаторов вида  $[u, v, w]$  не более  $p^{3tf}$ . Таким образом,  $|\gamma_3(\tilde{F})| \leq p^{l(f^2+f)} p^{3tf} = p^{l(f^2+f)+3tf}$ .

Хорошо известно ([17], теорема 11.2.4 о базисе), что если в некоторой последовательности базисных коммутаторов  $c_1, c_2, \dots, c_q$  — все базисные коммутаторы весов  $1, 2, \dots, r$ , то произвольный элемент  $f$  свободной группы однозначно представим в виде  $f = c_1^{e_1} c_2^{e_2} \dots c_q^{e_q} \text{ mod } \gamma_{r+1}(F)$ . Отсюда и из тождества (5) следует, что при  $p \neq 2, 3$  любой элемент из свободной 3-ступенно нильпотентной группы экспоненты  $p$  однозначно представим в виде  $c_1^{e_1} c_2^{e_2} \dots c_q^{e_q}$ , где  $c_1, c_2, \dots, c_q$  — все базисные коммутаторы весов  $1, 2, 3$  и  $0 \leq e_1, e_2, \dots, e_q < p$ .

Всякий элемент из  $\gamma_3(\tilde{F})$  можно однозначно представить в виде произведения  $\frac{f^3-f}{3}$  степеней базисных коммутаторов. Поэтому  $|\gamma_3(\tilde{F})| = p^{\frac{f^3-f}{3}}$ . У нас  $p^{l(f^2+f)+3tf} < p^{\frac{f^3-f}{3}}$ . Противоречие.  $\square$

**Замечание 2.** Фактически мы показали, что равенство (7) ложно в  $\tilde{F}$ .

Лемма 4 легко распространяется на элементы вида  $c^k$ .

**Следствие 1.** В условиях леммы 4 элемент  $c^k$  ( $k \neq 0$ ) не представим в виде  $c^k = \prod_{i=1}^l [f_i, f_{i+l}] \prod_{i=1}^{t-l} [u_i, u_{i+t-l}, u_{i+2t-2l}]$ .

*Доказательство.* Предположим, что утверждение леммы неверно. Берём любое простое число  $p$  ( $p > k$ ,  $p \neq 3$ ). Тогда в группе  $\tilde{F}$  из доказательства леммы 4 имеет место тождество

$$\prod_{i=1}^l [f_i(\bar{x}), f_{i+l}(\bar{x})] \prod_{i=1}^{t-l} [u_i(\bar{x}), u_{i+t-l}(\bar{x}), u_{i+2t-2l}(\bar{x})] = \prod_{i=1}^m [x_i, x_{i+m}, x_{i+2m}]^k.$$

Возводим обе части этого тождества в степень  $q$  (где  $qk \equiv 1 \pmod{p}$ ), учитывая, ввиду (6), что  $[f_i(\bar{x}), f_{i+l}(\bar{x})]^q$  — произведение коммутатора веса 2 и веса 3, видим, что  $\prod_{i=1}^m [x_i, x_{i+m}, x_{i+2m}]$  представим в виде произведения  $l$  коммутаторов веса 2 и  $t$  коммутаторов веса 3. Это противоречит замечанию 2.  $\square$

**Следствие 2.** [15] Предположим, что группа  $G$  имеет в  $\mathcal{N}_3$  представление  $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n; \Sigma \rangle$ , где  $\Sigma$  — любое множество определяющих соотношений вида  $[x_i, x_j]$ . Тогда  $G \in qF_2(\mathcal{N}_3)$ .

В случае многообразия  $\mathcal{N}_2$  аналогичное утверждение, а именно следствие 3, следует из [6] (теорема 4.2.12). Отметим, что доказательство теоремы 4.2.12 [6] совпадает с доказательством леммы 1 [18].

**Следствие 3.** [6] Предположим, что группа  $G$  имеет в  $\mathcal{N}_2$  представление  $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n; \Sigma \rangle$ , где  $\Sigma$  — любое множество определяющих соотношений вида  $[x_i, x_j]$ . Тогда  $G \in qF_2(\mathcal{N}_2)$ .

**Лемма 5.** [15] Пусть группа  $A_m$  имеет в  $\mathcal{N}_3$  следующее представление:  $A_m = \langle \{x_i, y_i, z_i \mid i = 1, \dots, m\}; \prod_{i=1}^m [x_i, y_i, z_i] = 1 \rangle$ . Тогда  $A_m \in qF_2$ .

**Лемма 6.** [15] Пусть группа  $A_{rm}$  ( $r \geq 2, m \geq 0$ ) задана в  $\mathcal{N}_3$  порождающими  $\{x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, a_j, b_j, d_j \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r\}$  и определяющими соотношениями

$$[a_1, b_1, d_1] \prod_{i=1}^m [x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}] = \dots = [a_r, b_r, d_r] \prod_{i=1}^m [x_{ir}, y_{ir}, z_{ir}],$$

и всеми соотношениями вида  $[f_u, f_v] = 1$  при  $u \neq v$ , где  $f_l$  пробегает множество  $\{x_{il}, y_{il}, z_{il} \mid i = 1, \dots, m\}$ . Тогда  $A_{rm} \in qF_2$  и

$$A_{rm} / \langle [a_1, b_1, d_1] \prod_{i=1}^m [x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}] \rangle \in qF_2.$$

Заметим,  $m = 0$  означает, что произведения вида  $\prod_{i=1}^m [*, *, *]$  равны 1.

#### 4 Группа $H_{rm}$

Зафиксируем квазимногообразие  $\mathcal{M}$ ,  $qF_2 \subsetneq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}_{3,\infty}$ . Будем иногда использовать обозначение:  $\mathcal{N} = qF_2$ .

Среди конечно порождённых 3-ступенно нильпотентных групп из  $\mathcal{M} \setminus qF_2$ , заданных в  $\mathcal{N}_{3,\infty}$  в порождающих  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  определяющими соотношениями, которые являются произведением базисных коммутаторов в точности от 3-х переменных веса 3 либо имеют вид  $[x_i, x_j]$ , возьмём группу с наименьшим числом соотношений из  $\gamma_3(F_X(\mathcal{N}_3))$ . Предполагаем, что такая группа  $G$  существует. Заметим, что поскольку  $G$  — 3-ступенно нильпотентная группа без кручения, то  $F_2 \in qG$ . Пусть

$$G = \langle x_1, \dots, x_n; r_1 = 1, \dots, r_s = 1, f_1 = 1, \dots, f_d = 1 \rangle, \quad (8)$$

где  $r_1, \dots, r_s \in \gamma_3(F_X(\mathcal{N}_3))$ ,  $f_1, \dots, f_d$  — коммутаторы вида  $[x_i, x_j]$ . Отметим, что какое-то из соотношений  $r_1 = 1, \dots, r_s = 1$  не следует в  $\mathcal{N}_{3,\infty}$  из соотношений  $f_1 = 1, \dots, f_d = 1$  (иначе, по следствию 2  $G \in qF_2$ ).

Будем рассматривать следующие элементарные преобразования определяющих соотношений группы  $G$ :

- 1) замена определяющего соотношения  $r_i = 1$  на определяющее соотношение  $r_i r_j^{-k} = 1$  при  $i \neq j$ ,  $k$  — произвольное целое число;
- 2) замена определяющего соотношения  $r_i = 1$  на определяющее соотношение  $r_i^k = 1$ , где  $k$  — произвольное целое число,  $k \neq 0$ .

В результате этих преобразований мы приходим к некоторому представлению группы  $G$  в классе  $\mathcal{N}_{3,\infty}$ . Многократное применение преобразований 1) и 2) (и переименование переменных) позволяет считать, что определяющие соотношения  $r_1 = 1, \dots, r_s = 1$  ( $r_i$  — произведение базисных коммутаторов) группы  $G$  обладают следующими свойствами:

коммутатор  $[x_3, x_1, x_2]$  входит в ненулевой степени только в  $r_1$  (соотношение  $[x_3, x_1, x_2] = 1$  не следует в  $\mathcal{N}_{3,\infty}$  из  $f_1 = 1, \dots, f_d = 1$ ),

коммутатор  $[x_2, x_1, x_3]$  не входит в  $r_3, \dots, r_s$ ,

если коммутатор  $[x_2, x_1, x_3]$  входит в ненулевой степени в  $r_2$ , то он не входит в  $r_1$ ,

базисные коммутаторы веса 3 от двух переменных не входят в  $r_1, \dots, r_s$ .

Отметим ещё, что если соотношение  $[x_3, x_2] = 1$  истинно в  $G$  (т.е. следует в  $\mathcal{N}_{3,\infty}$  из соотношений  $f_1 = 1, \dots, f_d = 1$ ), то по тождеству (3)  $[x_3, x_1, x_2] = [x_1, x_2, x_3]^{-1} [x_2, x_3, x_1]^{-1}$ . Значит, определяющее соотношение  $[x_2, x_1, x_3] = [x_3, x_1, x_2]$  следует из соотношения  $[x_3, x_2] = 1$ . В этом случае удаляем коммутатор  $[x_2, x_1, x_3]$  из всех соотношений группы  $G$ , заменяя его на  $[x_3, x_1, x_2]$ . Затем с помощью преобразований 1 и 2 добиваемся, чтобы в представлении (8) группы  $G$  коммутатор  $[x_3, x_1, x_2]$  входил в ненулевой степени только в  $r_1$ , коммутатор  $[x_2, x_1, x_3]$  не входил в  $r_1, r_2, \dots, r_s$ .

Далее всюду в работе будем рассматривать группу  $G$  с представлением (8), удовлетворяющим перечисленным свойствам.

**Лемма 7.** Пусть группы  $H_1$  имеет в  $\mathcal{N}_{3,\infty}$  следующие представления:  $H_1 = \langle x_1, \dots, x_n; r_2 = 1, \dots, r_s = 1, f_1 = 1, \dots, f_d = 1 \rangle$ . Тогда  $H_1 \in qF_2$ .

*Доказательство.* Заметим, что  $H_1/Is\langle r_1 \rangle \cong G \in \mathcal{M}$ .

Сначала предположим, что соотношения  $[x_2, x_1] = 1$  и  $[x_3, x_2] = 1$  не входят в список определяющих соотношений группы  $G$ . По лемме 1 существует гомоморфизм  $\varphi : H_1 \rightarrow F_2$ , при котором  $x_1^\varphi = a, x_2^\varphi = a, x_3^\varphi = b$ , образы остальных порождающих равны 1. В этом случае  $r_1$  имеет вид:

$$r_1 = [x_3, x_1, x_2]^u [x_2, x_1, x_3]^w \dots (u \neq 0),$$

тогда  $r_1^\varphi = [b, a, a]^u \neq 1$ . Следовательно,  $\ker \varphi \cap Is\langle r_1 \rangle = 1$ , откуда по теореме Ремака ([13], глава 2, §3)  $H_1$  изоморфна подходящей подгруппе группы  $H_1/\ker \varphi \times H_1/Is\langle r_1 \rangle \in \mathcal{M}$ . Поскольку определяющих соотношений, которые являются произведением базисных коммутаторов веса 3, в представлении группы  $H_1$  меньше чем в представлении  $G$ , то по выбору  $G$  имеем:  $H_1 \in qF_2$ .

Пусть теперь соотношение  $[x_2, x_1] = 1$  истинно в  $G$ . Тогда  $r_1$  имеет вид:  $r_1 = [x_3, x_1, x_2]^u \dots$ . По (3)  $[x_3, x_1, x_2] = [x_1, x_2, x_3]^{-1} [x_2, x_3, x_1]^{-1}$ , откуда соотношение  $[x_3, x_2] = 1$  ложно в  $G$  (иначе соотношение  $[x_3, x_1, x_2] = 1$  следует из  $f_1 = 1, \dots, f_d = 1$  и поэтому  $[x_3, x_1, x_2]$  отсутствует в записи  $r_1$ , что не так). По лемме 1 существует гомоморфизм  $\varphi : H_1 \rightarrow F_2$ , при котором  $x_1^\varphi = a, x_2^\varphi = a, x_3^\varphi = b$ , образы остальных порождающих равны 1. Ясно, что  $r_1^\varphi = [b, a, a]^u \neq 1$ . Далее, как и раньше, замечаем, что  $\ker \varphi \cap Is\langle r_1 \rangle = 1$ , откуда  $H_1 \in qF_2$ .

Осталось рассмотреть случай, когда соотношение  $[x_3, x_2] = 1$  истинно в  $G$ . В этом случае, как было отмечено, коммутатор  $[x_2, x_1, x_3]$  не входит в  $r_1, r_2, \dots, r_s$ . Отсюда по лемме 1 существует гомоморфизм  $\varphi : H_1 \rightarrow F_2$ , при котором  $x_1^\varphi = a, x_2^\varphi = b, x_3^\varphi = b$ , образы остальных порождающих равны 1. Ясно, что  $r_1^\varphi = [b, a, b]^u \neq 1$  для некоторого  $u, u \neq 0$ . Далее, как и раньше, замечаем, что  $\ker \varphi \cap Is\langle r_1 \rangle = 1$ , откуда  $H_1 \in qF_2$ .  $\square$

Пусть группа  $G$  имеет представление (8) и удовлетворяет условиям, относящимся к группе (8). Напомним, что ввиду леммы 7 группа  $H_1$ , имеющая в  $\mathcal{N}_{3,\infty}$  представление  $H_1 = \langle x_1, \dots, x_n; r_2 = 1, \dots, r_s = 1, f_1 = \dots, f_d = 1 \rangle$ , принадлежит  $qF_2$ .

Возьмём произвольный неединичный элемент  $v \in \mathcal{N}(G)$  ( $\mathcal{N} = qF_2$ ). По следствию 3  $G/\gamma_3(G) \in \mathcal{N}$ , отсюда  $v$  можно записать так:

$$v = \prod_{i=1}^q [x_{h(i)}, x_{h(i+q)}, x_{h(i+2q)}]^{\delta_i}.$$

Рассматривая вместо  $v$  подходящую его степень и используя соотношение  $r_1 = 1$ , можно и будем предполагать, что в запись  $v$  не входит коммутатор  $[x_3, x_1, x_2]$ .

Во всех группах элемент, имеющий вид  $\prod_{i=1}^q [x_{h(i)}, x_{h(i+q)}, x_{h(i+2q)}]^{\delta_i}$ , будем обозначать через  $v$ .

Заметим, что в запись  $v$  не входят базисные коммутаторы от 2 переменных. Действительно, допустим, что  $[x_j, x_i, x_i]^{\delta_{i1}} [x_j, x_i, x_j]^{\delta_{i2}}$  входит в запись  $v$  ( $[x_j, x_i, x_i]^{\delta_{i1}} [x_j, x_i, x_j]^{\delta_{i2}} \neq 1$  в  $G$ ). Рассмотрим гомоморфизм  $\varphi : G \rightarrow F_2$ , при котором  $x_i^\varphi = a$ ,  $x_j^\varphi = b$ , образы остальных порождающих группы  $G$  равны 1. Тогда  $v^\varphi = [b, a, a]^{\delta_{i1}} [b, a, b]^{\delta_{i2}} \neq 1$ . Это противоречит тому, что  $v \in \mathcal{M}(G)$ .

Пусть группа  $H_{rm}$  задана в  $\mathcal{N}_{3,\infty}$  порождающими

$$x_1, \dots, x_n, x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, a_j, b_j, d_j (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r)$$

и следующими определяющими соотношениями:

(i) все определяющие соотношения группы  $A_{rm}$ ;

(ii)  $r_1 c_1 = 1$ , где  $c_1 = [a_1, b_1, d_1] \prod_{i=1}^m [x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}]$ ;

(iii) в каждом коммутаторе  $[x_{h(i)}, x_{h(i+q)}, x_{h(i+2q)}]$  фиксируем ровно один элемент (если такой существует), отличный от  $x_1, x_2, x_3$  (обозначим его через  $\bar{x}_i$ ) и вводим для каждого  $i$  и всех  $t$  таких, что  $i \equiv t \pmod{q}$  соотношения

$$[\bar{x}_i, a_t] = 1, [\bar{x}_i, b_t] = 1 (i = 1, \dots, q);$$

если  $[x_{h(i)}, x_{h(i+q)}, x_{h(i+2q)}]$  есть  $[x_2, x_1, x_3]$ , то считаем, что  $i = 1$  (т.е. это первый сомножитель), и пишем соотношения:

$$[x_1, b_t] = 1, [x_2, b_t] = 1 \text{ для всех } t \text{ таких, что } t \equiv 1 \pmod{q};$$

(iv)  $r_2 = 1, \dots, r_s = 1, f_1 = 1, \dots, f_d = 1$ .

Отметим, возможно, что  $m = 0$ . В группе  $H_{r0}$  порождающих  $x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}$  нет.

**Лемма 8.**  $H_{rm} \in qG$ .

*Доказательство.* Ясно, что  $H_{rm}/Is\langle c_1 \rangle \cong (G * A_{rm}/\langle c_1 \rangle)/N$ , где  $N$  — подходящая подгруппа. По лемме 6 и теореме 2  $(G * A_{rm}/\langle c_1 \rangle)/N \in qG$ . Пусть  $r_1 = [x_3, x_1, x_2]^u [x_2, x_1, x_3]^v \dots$  ( $u \neq 0$ ). По лемме 1 отображение:  $x_1 \rightarrow a, x_2 \rightarrow a, x_3 \rightarrow b, a_i \rightarrow b^{-u}, b_i \rightarrow a, d_i \rightarrow a$  (для всех  $i$ ), образы остальных порождающих группы  $H_{rm}$  равны единице, продолжаемо до гомоморфизма  $\varphi : H_{rm} \rightarrow F_2$ , при этом  $c_1^\varphi = [b, a, a]^{-u} \neq 1$ . Отсюда  $\ker \varphi \cap Is\langle c_1 \rangle = 1$ , следовательно,  $H_{rm}$  изоморфна подходящей подгруппе группы  $F_2 \times (H_{rm}/Is\langle c_1 \rangle) \in qG$ .  $\square$

**Лемма 9.** Пусть  $H \in qF_2$ ,  $r \geq 2q$  и  $\chi : H_{rm} \rightarrow H$  — произвольный гомоморфизм. Тогда  $v^\chi = 1$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $v^\chi \neq 1$ . Поскольку  $H_{rm}^\chi$  — конечно порождённая нильпотентная группа, то по лемме 2 существует гомоморфизм  $\chi_1 : H_{rm}^\chi \rightarrow F_2$ , при котором  $v^{\chi\chi_1} \neq 1$ . Пусть  $\varphi = \chi\chi_1$ .

Рассмотрим любой сомножитель  $[x_{h(i)}, x_{h(i+q)}, x_{h(i+2q)}]$  в  $v$  такой, что  $[x_{h(i)}, x_{h(i+q)}, x_{h(i+2q)}]^\varphi \neq 1$ . Пусть  $t \equiv i \pmod{q}$ . Докажем равенство  $[a_t, b_t, d_t]^\varphi = 1$ . Можно считать, что  $a_t^\varphi, b_t^\varphi \notin F_2'$ .

Если  $\bar{x}_i$  существует, то  $\bar{x}_i^\varphi \notin F_2'$  и  $[\bar{x}_i^\varphi, a_t^\varphi] = 1, [\bar{x}_i^\varphi, b_t^\varphi] = 1$ . Из леммы 3 централизатор элемента  $\bar{x}_i^\varphi$  в  $F_2$  абелев, отсюда  $[a_t, b_t, d_t]^\varphi = 1$ .

Если  $[x_{h(i)}, x_{h(i+q)}, x_{h(i+2q)}] = [x_2, x_1, x_3]$  (в частности,  $i = 1$ ), то из  $[x_1^\varphi, b_t^\varphi] = 1, [x_2^\varphi, b_t^\varphi] = 1, b_t^\varphi \notin F_2'$  и из леммы 3  $[x_2, x_1, x_3]^\varphi = 1$ . Противоречие.

Рассмотрим подгруппы

$$A = \langle x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}, \dots, x_{mi}, y_{mi}, z_{mi} \rangle^\varphi,$$

$$B = \langle x_{1,i+q}, y_{1,i+q}, z_{1,i+q}, \dots, x_{m,i+q}, y_{m,i+q}, z_{m,i+q} \rangle^\varphi$$

группы  $H_{rm}^\varphi$ . Из определения  $H_{rm}$  следует, что  $[A, B] = 1$ . Из леммы 3 вытекает, что одна из групп  $A$  или  $B$  абелева. Допустим, что  $A$  — абелева группа. Тогда  $\prod_{i=1}^m [x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}]^\varphi = 1$ . Но  $[a_i, b_i, d_i]^\varphi = 1$ , откуда  $c_1^\varphi = 1$ . Аналогично показывается, что если  $B$  — абелева группа, то  $c_1^\varphi = 1$ . Итак,  $c_1^\varphi = 1$ .

Пусть  $\psi : H_{rm} \rightarrow H_{rm}/Is\langle c_1 \rangle$  — естественный гомоморфизм. Из только что доказанного следует, что  $Is\langle c_1 \rangle \subseteq \ker \varphi$ . Отсюда, существует гомоморфизм  $\xi : H_{rm}/Is\langle c_1 \rangle \rightarrow F_2$  такой, что  $\varphi = \psi\xi$ . В частности,  $(gIs\langle c_1 \rangle)^\xi = g^\varphi$  для каждого  $g \in H_{rm}$ . Так как  $H_{rm}/Is\langle c_1 \rangle \cong (G * A_{rm}/\langle c_1 \rangle)/N$  для некоторой подгруппы  $N$ , порождённой подходящими коммутаторами вида  $[x_j, l_i]$  ( $l_j$  из множества порождающих группы  $A_{rm}/\langle c_1 \rangle$ ), то  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle^\psi \cong G$ . Поскольку  $v^\psi \in \mathcal{N}(G)$  ( $\mathcal{N} = qF_2$ ), то  $v^{\psi\xi} = 1$ , т.е.  $v^\varphi = 1$ . Получили противоречие.  $\square$

Из признака принадлежности (лемма 2) непосредственно вытекает

**Следствие 4.**  $H_{rm} \notin qF_2$  при любом  $r \geq 2q$ .

Пусть группа  $B_{rm}$  задана в  $\mathcal{N}_{3,\infty}$  порождающими

$$x_1, \dots, x_n, x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, a_j, b_j, d_j (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r)$$

и следующими определяющими соотношениями:

(i') всеми соотношениями вида  $[s_u, s_w] = 1$  при  $u \neq w$ , где  $s_l$  пробегает множество  $\{x_{il}, y_{il}, z_{il} \mid i = 1, \dots, m\}$ ;

(ii') всеми соотношениями вида  $[\bar{x}_i, a_t] = 1, [\bar{x}_i, b_t] = 1$ ;

если  $[x_2, x_1, x_3]$ , входит в запись  $v$ , то добавляем соотношения  $[x_1, b_t] = 1, [x_2, b_t] = 1$  для всех  $t$  таких, что  $t \equiv 1 \pmod{q}$ ;

(iii')  $r_2 = 1, \dots, r_s = 1, f_1 = 1, \dots, f_d = 1$ .

Пусть  $c_j = [a_j, b_j, d_j] \prod_{i=1}^m [x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}] \in B_{rm}$  и

$$N_{rm} = \langle r_1 c_1, c_1 c_2^{-1}, \dots, c_1 c_r^{-1} \rangle.$$

— подгруппа группы  $B_{rm}$ . Ясно, что  $H_{rm} \cong B_{rm}/IsN_{rm}$ .

**Лемма 10.**  $B_{rm} \in qF_2$ .

*Доказательство.* Пусть группа  $B$  задана в  $\mathcal{N}_{3,\infty}$  в порождающих

$$x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, a_j, b_j, d_j (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r)$$

всеми определяющими соотношениями ( $i'$ ). По следствию 2  $B \in qF_2$ . Как легко заметить,  $B_{rm} \cong (H_1 * B)/N$ , где  $N$  — подходящая подгруппа,  $H_1$  имеет в  $\mathcal{N}_{3,\infty}$  представление

$$H_1 = \langle x_1, \dots, x_n; r_2 = 1, \dots, r_s = 1, f_1 = 1, \dots, f_d = 1 \rangle.$$

По лемме 7  $H_1 \in qF_2$ , откуда в силу теоремы 2  $B_{rm} \in qF_2$ . □

**Лемма 11.** Пусть  $w$  — фиксированное натуральное число. Предположим, что для чисел  $m, f, l = C_w^2, t = \frac{w^3-w}{3} + 2l$  выполнены условия леммы 4. Если  $B$  —  $w$ -порождённая подгруппа группы  $B_{rm}$ , то  $B' \cap IsN_{rm} = 1$ .

*Доказательство.* Достаточно установить, что  $B' \cap N_{rm} = 1$ . Пусть  $g \in B' \cap N_{rm}, g \neq 1$ . По (6) элемент вида  $[x, y]^k$  равен произведению коммутатора веса 2 и коммутатора веса 3. Отсюда и поскольку  $g \in B'$  и  $B$  —  $w$ -порождённая группа, то, как при доказательстве следствия 1, замечаем, что  $g$  можно представить в следующем виде:

$$g = \prod_{i=1}^l [h_i, h_{i+l}] \prod_{i=1}^{t-l} [s_i, s_{i+t-l}, s_{i+2(t-l)}],$$

где  $l = C_w^2$  (это число базисных коммутаторов веса 2 на  $w$  переменных),  $t - l = \frac{w^3-w}{3} + l$  (это число базисных коммутаторов весов 2 и 3).

Так как  $g \in N_{rm}$ , то  $g$  можно записать следующим образом:  $g = (r_1 c_1)^{t_1} \prod_{i=2}^r (c_i c_i^{-1})^{t_i}$ . Следовательно,  $g$  можно представить так:

$$g = r_1^{t_1} c_1^{t_1 + \dots + t_r} \prod_{i=2}^r c_i^{-t_i}.$$

Поскольку  $g \neq 1$ , то видим, что некоторый элемент  $c_i$  (пусть для удобства это  $c_1$ ) входит в  $g$  в ненулевой степени. Пусть

$$F_{3m} = \langle u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_m \rangle$$

— свободная 3-ступенно нильпотентная группа ранга  $3m$ ,  $\pi : B_{rm} \rightarrow F_{3m}$  — гомоморфизм, при котором  $x_{i1}^\varphi = u_i, y_{i1}^\varphi = v_i, z_{i1}^\varphi = w_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), образы остальных порождающих группы  $B_{rm}$  равны 1 (существование такого гомоморфизма следует из леммы 1). Отсюда выводим, что

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^l [h_i^\pi, h_{i+l}^\pi] \prod_{i=1}^{t-l} [s_i^\pi, s_{i+t-l}^\pi, s_{i+2(t-l)}^\pi] &= \prod_{i=1}^m [x_{i1}^\pi, y_{i1}^\pi, z_{i1}^\pi]^{t_1 + \dots} = \\ &= \prod_{i=1}^m [u_i, v_i, w_i]^{t_1 + \dots}. \end{aligned}$$

Это противоречит следствию 1. □

**Лемма 12.** Пусть число  $w$  удовлетворяет лемме 11,  $\overline{B}$  —  $w$ -порождённая подгруппа группы  $H_{rm}$ . Тогда  $\overline{B} \in qF_2$ .

*Доказательство.* Пусть  $I = IsN_{rm}$ . Для удобства считаем, что  $H_{rm} = B_{rm}/I$ . Имеем:

$$\overline{B}/\overline{B}' = \langle \overline{b}_1 \overline{B}' \rangle \times \cdots \times \langle \overline{b}_u \overline{B}' \rangle \times \langle \overline{b}_{u+1} \overline{B}' \rangle \times \cdots \times \langle \overline{b}_z \overline{B}' \rangle$$

для подходящих  $\overline{b}_1, \dots, \overline{b}_z \in \overline{B}$ . Ясно, что  $z \leq w$ . Считаем, что  $\langle \overline{b}_1 \overline{B}' \rangle, \dots, \langle \overline{b}_u \overline{B}' \rangle$  — конечные,  $\langle \overline{b}_{u+1} \overline{B}' \rangle, \dots, \langle \overline{b}_z \overline{B}' \rangle$  — бесконечные группы (группы какого-либо вида могут отсутствовать). Отметим, что поскольку  $\overline{B} = \langle \overline{b}_1, \dots, \overline{b}_z, \overline{B}' \rangle$  и  $\overline{B}'$  содержится в подгруппе Фраттини группы  $\overline{B}$ , то  $\overline{B} = \langle \overline{b}_1, \dots, \overline{b}_z \rangle$ . Фиксируем элементы  $b_i \in B_{rm}$  такие, что  $\overline{b}_i = b_i I$ . Пусть  $B = \langle b_1, \dots, b_z \rangle$ ,  $B_1 = \langle b_{u+1}, \dots, b_z \rangle$  и  $\overline{B}_1 = \langle \overline{b}_{u+1}, \dots, \overline{b}_z \rangle$ . Ясно, что  $\overline{B} = \langle \overline{b}_1, \dots, \overline{b}_u, \overline{B}_1 \rangle$  — конечно порождённая 3-ступенно нильпотентная группа без кручения,  $\overline{b}_i^{k_i} \in \overline{B}'$  для некоторого ненулевого  $k_i$  ( $i = 1, \dots, u$ ). Докажем, что  $\overline{B}_1 \in qF_2$ , откуда, по теореме 1, получим, что  $\overline{B} \in qF_2$ .

Ввиду леммы 10 достаточно установить, что  $B_1 \cap N_{rm} = 1$ . Пусть  $g$  — произвольный элемент из  $B_1 \cap N_{rm}$ . Рассмотрим естественный гомоморфизм  $\varphi_1 : B_1 \rightarrow \overline{B}_1$  ( $\ker \varphi_1 = B_1 \cap I$ ,  $b_i^{\varphi_1} = \overline{b}_i$ ). Поскольку  $g \in B_1 \cap N_{rm}$ , то  $g^{\varphi_1} = 1$ .

С другой стороны,  $g = b_{u+1}^{m_{u+1}} \dots b_z^{m_z} c$  для некоторого  $c \in B'_1$  и подходящих целых чисел  $m_{u+1}, \dots, m_z$ . Отсюда  $g^{\varphi_1} \overline{B}' = (\overline{b}_{u+1} \overline{B}')^{m_{u+1}} \dots (\overline{b}_z \overline{B}')^{m_z}$ . Поскольку  $\langle \overline{b}_{u+1} \overline{B}' \rangle, \dots, \langle \overline{b}_z \overline{B}' \rangle$  порождают группу, являющуюся прямым произведением этих бесконечных циклических групп, то  $m_i = 0$  ( $i = u+1, \dots, z$ ), следовательно  $g \in B'_1$ . По лемме 11  $I \cap B'_1 = 1$ , откуда  $g = 1$ .  $\square$

Отметим, что  $H_{rm}$  —  $(n + 3(m+1)r)$ -порождённая группа.

**Лемма 13.** Пусть  $\varphi : H_{rm} \rightarrow H_{xy}$  — гомоморфизм,  $H_{xy}$  не содержит свободных абелевых подгрупп ранга  $r'$  и  $r \geq (2r' + 1)q$ . Предположим, что все  $(n+6q)$ -порождённые подгруппы группы  $H_{xy}$  содержатся в  $\mathcal{N} =$

$$qF_2. \text{ Тогда } v^\varphi = 1, \text{ где } v = \prod_{i=1}^q [x_{h(i)}, x_{h(i+q)}, x_{h(i+2q)}]^{\delta_i}.$$

*Доказательство.* Пусть  $B_i = \langle x_{1i}, y_{1i}, \dots, x_{mi}, y_{mi} \rangle \leq H_{rm}$  ( $i = 1, \dots, r$ ). Возьмём любое число  $k$  из множества  $\{1, 2, \dots, q\}$ .

**СЛУЧАЙ 1.** Для каждого  $i$  ( $i = k, k+q, \dots, k+r'q$ ) множество  $\{x_{ji}^\varphi \mid j = 1, 2, \dots, m\}$  содержит такой элемент  $g_i$ , всякая ненулевая степень, которого не принадлежит подгруппе  $(B_k B_{k+q} \dots B_{i-q} B_{i+q} \dots B_{k+r'q})^\varphi$ . В этом случае элементы  $g_k, g_{k+q}, \dots, g_{k+r'q}$  порождают свободную абелеву группу ранга  $r' + 1$ , что невозможно.

**СЛУЧАЙ 2.** Существует  $i_k \in \{k, k+q, \dots, k+r'q\}$  (фиксируем это  $i_k$ ), такое, что всякий элемент из множества  $\{x_{ji}^\varphi \mid j = 1, 2, \dots, m\}$  в некоторой ненулевой степени, содержится в  $(B_k B_{k+q} \dots B_{i_k-q} B_{i_k+q} \dots B_{k+r'q})^\varphi$ .

Пусть

$$(x_{j i_k}^\varphi)^{n_j} \in (B_k B_{k+q} \dots B_{i-q} B_{i+q} \dots B_{k+r'q})^\varphi,$$

где  $n_j$  — подходящие ненулевые целые числа. Тогда  $[(x_{j i_k}^\varphi)^{n_j}, y_{j i_k}^\varphi] = 1$ , откуда  $[x_{j i_k}^\varphi, y_{j i_k}^\varphi, z_{j i_k}^\varphi]^{n_j} = 1$ . Отсюда следует, что  $[x_{j i_k}^\varphi, y_{j i_k}^\varphi, z_{j i_k}^\varphi] = 1$ . Таким образом,  $\prod_{j=1}^m [x_{j i_k}^\varphi, y_{j i_k}^\varphi, z_{j i_k}^\varphi] = 1$ . Аналогично существует  $i_{k'} \in \{k + (r' + 1)q, k + (r' + 2)q, \dots, k + 2r'q\}$  (фиксируем это  $i_{k'}$ ) такой, что  $\prod_{j=1}^m [x_{j i_{k'}}^\varphi, y_{j i_{k'}}^\varphi, z_{j i_{k'}}^\varphi] = 1$ . Отметим, что  $i_k - i_{k'} \equiv 0 \pmod{q}$  для каждого  $k = 1, 2, \dots, q$ . Имеем:

$$\begin{aligned} [a_{i_1}^\varphi, b_{i_1}^\varphi, d_{i_1}^\varphi] &= [a_{i_2}^\varphi, b_{i_2}^\varphi, d_{i_2}^\varphi] = \dots = [a_{i_q}^\varphi, b_{i_q}^\varphi, d_{i_q}^\varphi] = \\ &= [a_{i_{1'}}^\varphi, b_{i_{1'}}^\varphi, d_{i_{1'}}^\varphi] = [a_{i_{2'}}^\varphi, b_{i_{2'}}^\varphi, d_{i_{2'}}^\varphi] = \dots = [a_{i_{q'}}^\varphi, b_{i_{q'}}^\varphi, d_{i_{q'}}^\varphi]. \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 1 следует, что существует гомоморфизм  $\psi : H_{2q,0} \rightarrow H_{xy}$  такой, что

$$\begin{aligned} x_1^\psi &= x_1^\varphi, \dots, x_n^\psi = x_n^\varphi, \\ a_1^\psi &= a_{i_1}^\varphi, b_1^\psi = b_{i_1}^\varphi, d_1^\psi = d_{i_1}^\varphi, \dots, a_q^\psi = a_{i_q}^\varphi, b_q^\psi = b_{i_q}^\varphi, d_q^\psi = d_{i_q}^\varphi, \\ a_{1+q}^\psi &= a_{i_{1'}}^\varphi, b_{1+q}^\psi = b_{i_{1'}}^\varphi, d_{1+q}^\psi = d_{i_{1'}}^\varphi, \dots, a_{2q}^\psi = a_{i_{q'}}^\varphi, b_{2q}^\psi = b_{i_{q'}}^\varphi, d_{2q}^\psi = d_{i_{q'}}^\varphi. \end{aligned}$$

Так как

$H_{2q,0}^\psi = \langle x_1^\psi, \dots, x_n^\psi, a_1^\psi, b_1^\psi, d_1^\psi, \dots, a_q^\psi, b_q^\psi, d_q^\psi, a_{1+q}^\psi, b_{1+q}^\psi, d_{1+q}^\psi, \dots, b_{2q}^\psi, d_{2q}^\psi \rangle$  —  $(n + 6q)$ -порождённая подгруппа группы  $H_{xy}$ , то по условию  $H_{2q,0}^\psi \in qF_2$ . По лемме 9  $v^\psi = 1$ . Поскольку  $v^\varphi = v^\psi$ , то  $v^\varphi = 1$ .  $\square$

Докажем наш основной результат.

**Теорема 3.** Пусть  $\mathcal{R}$  — квазимногообразие групп и  $qF_2(\mathcal{N}_3) \subsetneq \mathcal{R}$ . Предположим, что среди групп из  $\mathcal{R} \setminus qF_2(\mathcal{N}_3)$  найдётся 3-ступенно нильпотентная группа  $G$  без кручения с представлением

$$G = \langle x_1, \dots, x_n; r_1 = 1, \dots, r_s = 1, f_1 = 1, \dots, f_d = 1 \rangle$$

в  $\mathcal{N}_3$ , где  $r_1, \dots, r_s$  — произведения базисных коммутаторов веса 3 от трёх различных переменных,  $f_1, \dots, f_d$  — коммутаторы вида  $[x_i, x_j]$  (они могут отсутствовать). Тогда интервал  $[qF_2(\mathcal{N}_3), \mathcal{R}]$  в решётке квазимногообразий групп континуален.

*Доказательство.* Выберем в квазимногообразии  $\mathcal{M} = \mathcal{R} \cap \mathcal{N}_{3,\infty}$  группу (обозначим её снова через  $G$ ), не принадлежащую  $qF_2$ , с наименьшим числом определяющих соотношений, являющихся произведениями базисных коммутаторов веса 3 от трёх переменных, и возможно с определяющими соотношениями вида  $[x_i, x_j] = 1$ . Отметим, что эта группа будет удовлетворять всем доказанным леммам. Будем строить счётную последовательность групп  $H_1, H_2, \dots$ , содержащихся в  $qG$ . В качестве  $H_1$  берём произвольную группу  $H_{rm}$  из  $qG$ . Пусть группа  $H_{i-1}$  уже построена. В качестве  $H_i$  берём группу  $H_{r_i m_i}$  такую, что

1) при любом гомоморфизме группы  $H_i$  в группу  $H_j (j < i)$  образ элемента  $v$  равен единице;

2) если  $q_{i-1}$  — число порождающих группы  $H_{i-1}$ , то всякая  $q_{i-1}$ -порождённая подгруппа группы  $H_i$  принадлежит квазимногообразию  $qF_2$  (существование  $H_i$  вытекает из лемм 9, 11, 13).

Пусть  $\mathbb{N}$  — множество всех натуральных чисел. Для подмножества  $I \subseteq \mathbb{N}$  полагаем  $\mathcal{M}_I = q\{H_i \mid i \in I\}$  — квазимногообразие, порождённое всеми группами  $H_i (i \in I)$ . Если  $H_i \in \mathcal{M}_I (i \notin I)$ , то по признаку принадлежности (лемма 2) группа  $H_i$  аппроксимируется группами из множества  $\{H_i \mid i \in I\}$ , что противоречит леммам 9, 13. Поэтому  $H_i \notin \mathcal{M}_I$  при  $i \notin I$ , откуда получаем требуемое утверждение.  $\square$

**Замечание 3.** Группа  $G$ , имеющая в  $\mathcal{N}_3$  представление  $G = \langle x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3; [x_1, x_2, x_3] = [y_1, y_2, y_3], [x_i, y_j] = 1 (i = 1, 2; j = 1, 2, 3) \rangle$ , не принадлежит  $qF_2$ . В частности, интервал  $[qF_2, qG]$  континуален.

*Доказательство.* Предположим, что  $G \in qF_2$ . Тогда по признаку принадлежности (лемма 2) существует гомоморфизм  $\varphi : G \rightarrow F_2$  такой, что  $[x_1, x_2, x_3]^\varphi \neq 1$ . Ясно, что  $x_1^\varphi \notin F_2'$ . Из леммы 3 следует, что  $[y_1^\varphi, y_2^\varphi] = 1$ , откуда  $[y_1^\varphi, y_2^\varphi, y_2^\varphi] = 1$ . Получили противоречие, значит,  $G \notin qF_2$ .  $\square$

В заключение хочу выразить благодарность Шаховой Светлане и Лодейщиковой Виктории за внимательное прочтение этой работы и полезные замечания.

## References

- [1] S.A. Shakhova, *On the lattice of quasivarieties of nilpotent groups of class 2*, Sib. Adv. Math., **7**:3 (1997), 98–125. Zbl 0917.20026
- [2] S.A. Shakhova, *On a quasivariety generated by a finite  $p$ -group*, Math. Notes, **53**:3, 345–347 (1993). Zbl 0811.20028
- [3] S.A. Shakhova, *On the cardinality of the lattice of quasivarieties of nilpotent groups*, Algebra Logic, **38**:3 (1999), 202–206. Zbl 0930.08005
- [4] V.A. Gorbunov, *Algebraic theory of quasivarieties*, Nauch. Kniga, Novosibirsk, 1999. Zbl 0986.08002
- [5] A.N. Fyodorov, *Quasi-identities of finite 2-nilpotent groups*, VINITI, No. 5489-B87, Moscow, 1987.
- [6] A.I. Budkin, *Quasivarieties of groups*, Altai State Univ., Barnaul, 2002.
- [7] A.I. Budkin, *A lattice of quasivarieties of nilpotent groups*, Algebra Logic, **33**:1 (1994), 14–21. Zbl 0823.20025
- [8] A.I. Budkin, *On the quasivarieties generated by a finite group and lacking any independent bases of quasi-identities*, Sib. Math. J., **61**:6 (2020), 983–993. Zbl 1498.20067
- [9] A.I. Budkin, S.A. Shakhova, *On the complexity of the lattice of quasivarieties of nilpotent groups*, Sib. Electron. Mat. Izv., **21**:2 (2024), 1118–1131.
- [10] A.I. Budkin, *Independent axiomatizability of quasivarieties of torsion-free nilpotent groups*, Algebra Logic, **60**:2 (2021), 79–88. Zbl 1515.08008
- [11] H. Neumann, *Varieties of groups*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, (1967). Zbl 0251.20001
- [12] A.I. Malcev, *Algebraic Systems*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1973. Zbl 0266.08001

- [13] M.I. Kargapolov, Yu.I. Merzlyakov, *Fundamentals of the theory of groups*, Springer-Verlag, New York etc., 1979. Zbl 0549.20001
- [14] A.I. Budkin, V.A. Gorbunov, *Quasivarieties of algebraic systems*, Algebra Logic, **14**:2 (1975), 73–84. Zbl 0328.08006
- [15] A.I. Budkin, *On the quasivariety generated by a 3-nilpotent group*, Sib. Èlectron. Mat. Izv., **22**:1 (2025), 110–124.
- [16] A.L. Evtyagin, V.A. Roman'kov, *On embeddings in the class of partially commutative nilpotent groups*, Math. Notes, **116**:2 (2024), 258–264. Zbl 07942200
- [17] M. Hall, *The theory of groups*, The Macmillan Company, New York, 1959. Zbl 1381.20002
- [18] A.N. Fedorov, *Subquasivarieties of nilpotent minimal non-Abelian group varieties*, Sib. Math. J., **21**:6 (1980), 840–850. Zbl 0463.20024

ALEXANDR IVANOVICH BUDKIN  
ALTAI STATE UNIVERSITY,  
PR. LENINA, 61,  
656049, BARNaul, RUSSIA  
Email address: [budkin@math.asu.ru](mailto:budkin@math.asu.ru)