S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 22, №1, стр. 144–145 (2025) УДК 512.54
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 20F05

О СЛОЖНОСТИ РЕШЕТКИ КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ 3-СТУПЕННО НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

А.И. Будкин

Представлено П.П. Петровым

Abstract: Denote by $\mathcal{N}_3$ the variety of nilpotent groups of class at most 3, by $\mathcal{M}$ the quasivariety generated by the non-abelian $\mathcal{N}_3$-free group F. Let $\mathcal{R}$ be an arbitrary quasivariety such that $F \in \mathcal{R}$. Suppose that there exits a torsion free nilpotent group G of class 3, $G \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{M}$, having the representation relative to $\mathcal{N}_3$ in which each defining relation is a product of basic commutators of weight 3 on three different variables or a commutator of the form $[x_i, x_j]$ (the last defining relations may be missing). It is proved that in this case the interval $[\mathcal{M}, \mathcal{R}]$ in the lattice of quasivarieties of groups is continual.

Keywords: lattice, quasivariety, nilpotent group.

1 Введение

В процессе развития теории квазимногообразий достаточно быстро стало известно, что решётки квазимногообразий имеют весьма сложное строение. Информацию о сложности решёток квазимногообразий групп можно найти в [1]–[3].

Budkin, A.I., On the complexity of the lattice of quasivaries of nilpotent groups of class 3.

Поступила 30 марта 2025 г., опубликована 31 декабря 2024 г.

Свойства решёток квазимногообразий часто связано с наличием независимых базисов квазитождеств. Существование бесконечного независимого базиса квазитождеств квазимногообразия означает, что данное квазимногообразие имеет бесконечное множество покрытий в решётке квазимногообразий ([4], предложение 6.3.1). Из ([4], предложение 6.3.1), в частности, следует, что если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — квазимногообразия ($\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$) и для некоторого конечно аксиоматизируемого в $\mathcal{N}$ квазимногообразия $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K} \subseteq \mathcal{N}$) справедливо следующее: для любого квазимногообразия $\mathcal{R}$, $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{K}$, интервал $[\mathcal{M}, \mathcal{R}]$ в решётке квазимногообразий бесконечен, то $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$ не имеет бесконечного независимого базиса квазитождеств. Очень часто при доказательстве отсутствия независимого базиса квазитождеств квазимногообразия $\mathcal{M}$ этот интервал $[\mathcal{M}, \mathcal{R}]$ оказывается континуальным. Например, континуальными оказались интервалы вида $[\mathcal{M}, \mathcal{R}]$ для следующих квазимногообразий $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}$ — квазимногообразие, порождённое неабелевой свободной 2-ступенно нильпотентной группой простой экспоненты p ($p \neq 2$) [5] (см., также [6], следствие 4.3.13); $\mathcal{M}$ — квазимногообразие, порождённое неабелевой свободной 2-ступенно нильпотентной группой [7] (см., также [6], следствие 4.3.11); $\mathcal{M}$ — квазимногообразие, порождённое неабелевой свободной 2-ступенно нильпотентной группой экспоненты p^k с коммутантом экспоненты p (p — простое число, $k \geq 2$) [8]. Изучение интервалов $[\mathcal{M}, \mathcal{R}]$ продолжено в [9] для квазимногообразий $\mathcal{M}$, порождённых относительно свободными 2-ступенно нильпотентными группами экспоненты p^k (p — простое число). В [10] получена теорема, характеризующая сложность решётки подквазимногообразий квазимногообразия 2-степенно нильпотентных групп без кручения, а именно установлено, что существует бесконечное множество квазимногообразий $\mathcal{M}$ 2-ступенно нильпотентных групп без кручения, порождённых конечно порождённой группой, таких, что для любого квазимногообразия $\mathcal{R}$ 2-ступенно нильпотентных групп без кручения ($\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{R}$) интервал $[\mathcal{M}, \mathcal{R}]$ в решётке квазимногообразий континуален.

В данной работе доказывается континуальность интервала $[\mathcal{M}, \mathcal{R}]$ в случае, когда $\mathcal{M}$ — квазимногообразие, порождённое неабелевой свободной 3-ступенно нильпотентной группой, квазимногообразие $\mathcal{R}$ содежит 3-ступенно нильпотентную группу G ($G \notin \mathcal{M}$), имеющую в $\mathcal{N}_3$ представление, каждое определяющее соотношение которого является произведением базисных коммутаторов веса 3 от трёх различных переменных либо коммутатором вида $[x_i, x_j]$ (последние соотношения могут отсутствовать).

2 Предварительные сведения

В работе используются следующие обозначения: $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел; $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y$, $[x, y, z] = [[x, y], z]$; $\mathcal{N}_c$ — многообразие нильпотентных групп ступени не выше c; $\mathcal{N}_{3,\infty}$ — класс групп без кручения из $\mathcal{N}_3$; $F_X(\mathcal{N}_3)$ — свободная в $\mathcal{N}_3$ группа с множеством свободных порождающих X; $F_2 = F_2(\mathcal{N}_3)$ — свободная в $\mathcal{N}_3$ группа со свободными порождающими a, b; $\langle x, y, \dots \rangle$ — группа, порождённая элементами $x, y, \dots$; $\langle x \rangle$ — циклическая группа, порождённая x; $\gamma_1(G) = G, \gamma_2(G) = G' = [G, G], \gamma_3(G) = [\gamma_2(G), G]$.

Если H — подгруппа группы G, то $IsH = \{g \in G \mid (\exists n)(n \in \mathbb{Z} \; \& \; n \neq 0 \; \& \; g^n \in H)\}$ — изолятор подгруппы H в G.

qM — это квазимногообразие, порождённое классом групп M. Если $M = \{G\}$, то вместо $q\{G\}$ пишем qG.

Если $\mathcal{M}, \mathcal{R}$ — квазимногообразия и $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{R}$, то через $[\mathcal{M}, \mathcal{R}]$ обозначаем интервал в решётке квазимногообразий, т.е. это множество всех квазимногообразий $\mathcal{K}$ таких, что $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{R}$.

Для всякого квазимногообразия $\mathcal{M}$ обозначим через $\mathcal{M}(G)$ — наименьшую нормальную подгруппу группы G, фактор-группа по которой принадлежит $\mathcal{M}$. В частности, при каждом гомоморфизме φ группы G в любую группу из $\mathcal{M}$ имеем: $(\mathcal{M}(G))^{\varphi} = 1$.

Стандартным образом определяем вес $w(a)$ коммутатора, считая, что

1) $w(x) = 1$, если x — предметная переменная,

2) $w(a) = w(u) + w(v)$, если $a = [u, v]$.

$[x_3, x_2, x_2], [x_3, x_2, x_3], [x_3, x_1, x_1], [x_3, x_1, x_2],$
$[x_3, x_1, x_3], [x_2, x_1, x_1], [x_2, x_1, x_2], [x_2, x_1, x_3]$
— это все базисные коммутаторы веса 3 в переменных x_1, x_2, x_3.

При написании тождеств кванторы всеобщности будем опускать.

Нам потребуются следующие известные коммутаторные тождества ([11], теорема 33.33), истинные в каждой нильпотентной группе ступени 3:

$$[a, bc] = [a, c][a, b][a, b, c], \tag{1}$$
$$[ab, c] = [a, c][a, c, b][b, c], \tag{2}$$
$$[a, b, c][b, c, a][c, a, b] = 1. \tag{3}$$

Полезными окажутся легко доказываемые по индукции тождества, истинные в нильпотентной группе ступени 3:

$$y^n x = x y^n [y, x]^n [y, x, y]^{\frac{n(n-1)}{2}}, \tag{4}$$
$$(xy)^n = x^n y^n [y, x]^{\frac{n(n-1)}{2}} [y, x, x]^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} [y, x, y]^{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}. \tag{5}$$

Нам понадобится тождество (4) в следующем виде:

$$[x, y]^n = [x, y^n][y, x, y^{\frac{n(n-1)}{2}}]. \tag{6}$$

Напомним определение свободного произведения групп в многообразии $\mathcal{N}_3$. Предположим, что группы A и B имеют в $\mathcal{N}_3$ представления:

$$A = \langle \{x_i \mid i \in I_1\}; \{t_j = 1 \mid j \in J_1\} \rangle, B = \langle \{y_i \mid i \in I_2\}; \{r_j = 1 \mid j \in J_2\} \rangle.$$

Тогда группа G, имеющая в $\mathcal{N}_3$ представление

$$G = \langle \{x_i \mid i \in I_1\} \cup \{y_i \mid i \in I_2\}; \{t_j = 1 \mid j \in J_1\} \cup \{r_j = 1 \mid j \in J_2\} \rangle,$$

обозначается через $G = A *_{\mathcal{N}_3} B$ и называется свободным произведением групп A и B в многообразии $\mathcal{N}_3$. Часто вместо $A *_{\mathcal{N}_3} B$ будем писать $G = A * B$, опуская индекс $\mathcal{N}_3$. Подгруппы группы G, порождённые множествами элементов $\{x_i \mid i \in I_1\}$ и $\{y_i \mid i \in I_2\}$, изоморфны группам A и B. Их будем обозначать, соответственно, через A и B.

Нам понадобится следующая теорема Дика ([12], с. 281, [13], с. 55).

Лемма 1. *Пусть группа G имеет в данном квазимногообразии $\mathcal{N}$ представление $G = \langle \{x_i \mid i \in I\} \ ; \ \{r_j(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{l(j)}}) = 1 \mid j \in J\}\rangle$. Предположим, что $H \in \mathcal{N}$ и группа H содержит множество элементов $\{g_i \mid i \in I\}$ такое, что для всякого $j \in J$ равенство $r_j(g_{j_1}, \ldots, g_{j_{l(j)}}) = 1$ истинно в H. Тогда отображение $x_i \to g_i$ $(i \in I)$ продолжается до гомоморфизма G в H.*

Будем пользоваться (частный случай теоремы 3 [14]) признаком принадлежности конечно определённой группы G квазимногообразию $q\mathcal{R}$.

Лемма 2. *Конечно определённая в квазимногообразии $\mathcal{M}$ группа G принадлежит квазимногообразию, порождённому классом групп $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}$), тогда и только тогда, когда для любого элемента $g \in G, g \neq 1$, существует гомоморфизм φ_g группы G в некоторую группу из класса $\mathcal{R}$ такой, что $g^{\varphi_g} \neq 1$.*

Будем ссылаться на следующую теорему 3 из [15].

Теорема 1. *Пусть $B = \langle b_1, \ldots, b_n, A\rangle$ — конечно порождённая 3-ступенно нильпотентная группа без кручения и $b_i^{k_i} \in B'$ для некоторого ненулевого k_i $(i = 1, \ldots, n)$. Если $A \in qF_2$, то $B \in qF_2$.*

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}$ — квазимногообразие, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}_{3,\infty}$, $F_2(\mathcal{N}_3) \in \mathcal{M}$. Предположим, что группы G_1 и G_2 имеют в $\mathcal{N}_3$ представления*

$$G_1 = \langle x_1, x_2, \ldots ; \Sigma_1\rangle, G_2 = \langle y_1, y_2, \ldots ; \Sigma_2\rangle,$$

определяющие соотношения в которых — произведения коммутаторов веса 3 от трёх переменных либо коммутаторы видов $[x_i, x_j]$, $[y_i, y_j]$. Пусть N — нормальная подгруппа группы $G_1 * G_2$, порождённая некоторыми коммутаторами $[x_i, y_j]$ (возможно единичная). Если $G_1, G_2 \in \mathcal{M}$, то $G = (G_1 * G_2)/N \in \mathcal{M}$.

Эта теорема для случая $\mathcal{M} = qF_2(\mathcal{N}_3)$ доказана в [15] (теорема 4). Доказательство теоремы 2 в приведённой формулировке полностью совпадает с доказательством теоремы 4 [15] и поэтому мы его опустим.

С основными понятиями можно познакомиться в [4, 6, 13].

3 Квазимногообазие $qF_2(\mathcal{N}_3)$

Следующая лемма известна (доказательство более общего утверждения см., например, в [16]).

Лемма 3. *Пусть* $u, v \in F_2$, $u \notin F_2'$, $[u,v] = 1$. *Тогда* u, v *являются степенями одного и того же элемента по модулю* $\gamma_3(F_2)$, *т.е.* $u = h^l c_1$, $v = h^t c_2$ *для некоторых* $c_1, c_2 \in \gamma_3(F_2)$, $h \in F_2$ *и целых чисел* l, t.

Замечание 1. *Из леммы 3 следует, что если* $w \in F_2 \setminus F_2'$, *то централизатор* $C(w)$ *в* F_2 *элемента* w *абелев.*

Действительно, пусть $[w,u] = 1, [w,v] = 1$. По лемме 3 $w = h^l c_1$, $u = h^t c_2$, $w = f^s c_3$, $v = f^q c_4$ $(c_i \in \gamma_3(F_2))$. Отсюда $[h^l, f^s] = 1$. Как хорошо известно (см., например, [13], 16.2.9), из перестановочности степеней элементов нильпотентной группы без кручения следует перестановочность этих элементов. Поэтому $[h,f] = 1$, откуда $[u,v] = [h^t, f^q] = 1$, т.е. $C(w)$ — абелева группа.

Следующая лемма говорит, что элемент c из леммы 4 нельзя записать в виде произведения "малого" числа коммутаторов.

Лемма 4. *Пусть* F — *свободная* 3*-нильпотентная группа со свободными порождающими* $x_1, \ldots, x_{3m}$. *Предположим, что натуральные числа* l, t, f *выбраны так, чтобы* $l(f+1) + 3t < \frac{f^2-1}{3}$, $\frac{f^3-f}{3} < m$. *Тогда элемент* $c = \prod_{i=1}^{m} [x_i, x_{i+m}, x_{i+2m}]$ *из* F *не представим в виде* $c = \prod_{i=1}^{l} [f_i, f_{i+l}] \prod_{i=1}^{t} [u_i, u_{i+t}, u_{i+2t}]$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда в группе F имеет место соотношение вида

$$\prod_{i=1}^{l} [f_i(\overline{x}), f_{i+l}(\overline{x})] \prod_{i=1}^{t} [u_i(\overline{x}), u_{i+t}(\overline{x}), u_{i+2t}(\overline{x})] = \prod_{i=1}^{m} [x_i, x_{i+m}, x_{i+2m}]. \quad (7)$$

Поскольку F — свободная нильпотентная группа ступени 3, то на это соотношение можно смотреть как на тождество, истинное в любой нильпотентной группе ступени не выше 3.

Пусть $\widetilde{F}$ — свободная 3-нильпотентная группа экспоненты p (т.е. в $\widetilde{F}$ истинно тождество $x^p = 1$, где p — фиксированное простое число, $p \neq 2, p \neq 3$) со свободными порождающими $x_1, \ldots, x_f$. Оценим порядок $\widetilde{F}'$ двумя способами. Всякий элемент из $\gamma_3(\widetilde{F})$ можно записать в виде произведения степеней базисных коммутаторов веса 3. Как хорошо известно ([17], теорема 11.2.2), этих базисных коммутаторов $\frac{f^3-f}{3}$ штук. Из линейности коммутаторов веса 3 теперь следует, что всякий элемент из $\gamma_3(\widetilde{F})$ можно записать в виде произведения $\frac{f^3-f}{3}$ коммутаторов веса 3. Так как $\frac{f^3-f}{3} < m$, из истинности в $\widetilde{F}$ тождества (7) следует, что всякий элемент из $\gamma_3(\widetilde{F})$ можно записать в виде произведения l коммутаторов вида $[u,v]$ и произведения t коммутаторов вида $[u,v,w]$.

Оценим число коммутаторов вида $[u,v]$. Любые элементы u,v можно представить так:

$$u = x_1^{k_1}\dots x_f^{k_f}\prod_{1\le j<i\le f}[x_i,x_j]^{k_{ij}}c_1,$$

$$v = x_1^{m_1}\dots x_f^{m_f}\prod_{1\le j<i\le f}[x_i,x_j]^{m_{ij}}c_2,$$

где c_1, c_2 — подходящие элементы из $\gamma_3(\widetilde{F})$, $0\le k_i,k_{ij},m_i,m_{ij}\le p-1$. Отсюда

$$[u,v] = [x_1^{k_1}\dots x_f^{k_f}\prod_{1\le j<i\le f}[x_i,x_j]^{k_{ij}}, x_1^{m_1}\dots x_f^{m_f}\prod_{1\le j<i\le f}[x_i,x_j]^{m_{ij}}].$$

Таких записей $p^f p^{\frac{f(f-1)}{2}} p^f p^{\frac{f(f-1)}{2}} = p^{f^2+f}$ штук. Значит, произведений из l коммутаторов вида $[u,v]$ не более $p^{l(f^2+f)}$.

Оценим число коммутаторов вида $[u,v,w]$. Любые элементы u,v,w можно представить так:

$$u = x_1^{k_1}\dots x_f^{k_f}\prod_{1\le j<i\le f}[x_i,x_j]^{k_{ij}}c_1,$$

$$v = x_1^{m_1}\dots x_f^{m_f}\prod_{1\le j<i\le f}[x_i,x_j]^{m_{ij}}c_2,$$

$$w = x_1^{s_1}\dots x_f^{s_f}\prod_{1\le j<i\le f}[x_i,x_j]^{f_{ij}}c_3,$$

где c_1, c_2, c_3 — подходящие элементы из $\gamma_3(\widetilde{F})$, $0\le k_i,k_{ij},m_i,m_{ij},s_i,f_{ij}\le p-1$. Отсюда $[u,v,w] = [x_1^{k_1}\dots x_f^{k_f}, x_1^{m_1}\dots x_f^{m_f}, x_1^{s_1}\dots x_f^{s_f}]$. Таких записей p^{3f} штук. Значит, произведений из t коммутаторов вида $[u,v,w]$ не более p^{3tf}. Таким образом, $|\gamma_3(\widetilde{F})| \le p^{l(f^2+f)}p^{3tf} = p^{l(f^2+f)+3tf}$.

Хорошо известно ([17], теорема 11.2.4 о базисе), что если в некоторой последовательности базисных коммутаторов $c_1, c_2, \dots, c_q$ — все базисные коммутаторы весов $1,2,\dots,r$, то произвольный элемент f свободной группы однозначно представим в виде $f = c_1^{e_1}c_2^{e_2}\dots c_q^{e_q} mod\ \gamma_{r+1}(F)$. Отсюда и из тождества (5) следует, что при $p\ne 2,3$ любой элемент из свободной 3-ступенно нильпотентной группы экспоненты p однозначно представим в виде $c_1^{e_1}c_2^{e_2}\dots c_q^{e_q}$, где $c_1, c_2, \dots, c_q$ — все базисные коммутаторы весов $1,2,3$ и $0\le e_1,e_2,\dots,e_q<p$.

Всякий элемент из из $\gamma_3(\widetilde{F})$ можно однозначно представить в виде произведения $\frac{f^3-f}{3}$ степеней базисных коммутаторов. Поэтому $|\gamma_3(\widetilde{F})| = p^{\frac{f^3-f}{3}}$. У нас $p^{l(f^2+f)+3tf} < p^{\frac{f^3-f}{3}}$. Противоречие. □

Замечание 2. *Фактически мы показали, что равенство* (7) *ложно в* $\widetilde{F}$.

Лемма 4 легко распространяется на элементы вида c^k.

Следствие 1. *В условиях леммы 4 элемент c^k $(k \neq 0)$ не представим в виде* $c^k = \prod_{i=1}^{l}[f_i, f_{i+l}] \prod_{i=1}^{t-l}[u_i, u_{i+t-l}, u_{i+2t-2l}]$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Берём любое простое число p $(p > k,\ p \neq 3)$. Тогда в группе $\widetilde{F}$ из доказательства леммы 4 имеет место тождество

$$\prod_{i=1}^{l}[f_i(\overline{x}), f_{i+l}(\overline{x})] \prod_{i=1}^{t-l}[u_i(\overline{x}), u_{i+t-l}(\overline{x}), u_{i+2t-2l}(\overline{x})] = \prod_{i=1}^{m}[x_i, x_{i+m}, x_{i+2m}]^k.$$

Возводим обе части этого тождества в степень q (где $qk \equiv 1$ $(mod\ p)$), учитывая, ввиду (6), что $[f_i(\overline{x}), f_{i+l}(\overline{x})]^q$ — произведение коммутатора веса 2 и веса 3, видим, что $\prod_{i=1}^{m}[x_i, x_{i+m}, x_{i+2m}]$ представим в виде произведения l коммутаторов веса 2 и t коммутаторов веса 3. Это противоречит замечанию 2. □

Следствие 2. [15] *Предположим, что группа G имеет в $\mathcal{N}_3$ представление $G = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n; \Sigma\rangle$, где Σ — любое множество определяющих соотношений вида $[x_i, x_j]$. Тогда $G \in qF_2(\mathcal{N}_3)$.*

В случае многообразия $\mathcal{N}_2$ аналогичное утверждение, а именно следствие 3, следует из [6] (теорема 4.2.12). Отметим, что доказательство теоремы 4.2.12 [6] совпадает с доказательством леммы 1 [18].

Следствие 3. [6] *Предположим, что группа G имеет в $\mathcal{N}_2$ представление $G = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n; \Sigma\rangle$, где Σ — любое множество определяющих соотношений вида $[x_i, x_j]$. Тогда $G \in qF_2(\mathcal{N}_2)$.*

Лемма 5. [15] *Пусть группа A_m имеет в $\mathcal{N}_3$ следующее представление:* $A_m = \langle \{x_i, y_i, z_i \mid i = 1, \ldots, m\}; \prod_{i=1}^{m}[x_i, y_i, z_i] = 1\rangle$. *Тогда $A_m \in qF_2$.*

Лемма 6. [15] *Пусть группа A_{rm} $(r \geq 2, m \geq 0)$ задана в $\mathcal{N}_3$ порождающими $\{x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, a_j, b_j, d_j \mid i = 1, \ldots m, j = 1, \ldots, r\}$ и определяющими соотношениями*

$$[a_1, b_1, d_1] \prod_{i=1}^{m}[x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}] = \cdots = [a_r, b_r, d_r] \prod_{i=1}^{m}[x_{ir}, y_{ir}, z_{ir}],$$

и всеми соотношениями вида $[f_u, f_v] = 1$ при $u \neq v$, где f_l пробегает множество $\{x_{il}, y_{il}, z_{il} \mid i = 1, \ldots m\}$. Тогда $A_{rm} \in qF_2$ и
$A_{rm}/\langle [a_1, b_1, d_1] \prod_{i=1}^{m}[x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}]\rangle \in qF_2$.

Заметим, $m = 0$ означает, что произведения вида $\prod_{i=1}^{m}[*, *, *]$ равны 1.

4 Группа H_{rm}

Зафиксируем квазимногообразие $\mathcal{M}$, $qF_2 \subsetneq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}_{3,\infty}$. Будем иногда использовать обозначение: $\mathcal{N} = qF_2$.

Среди конечно порождённых 3-ступенно нильпотентных групп из $\mathcal{M} \setminus qF_2$, заданных в $\mathcal{N}_{3,\infty}$ в порождающих $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ определяющими соотношениями, которые являются произведением базисных коммутаторов в точности от 3-х переменных веса 3 либо имеют вид $[x_i, x_j]$, возьмём группу с наименьшим числом соотношений из $\gamma_3(F_X(\mathcal{N}_3))$. Предполагаем, что такая группа G существует. Заметим, что поскольку G — 3-ступенно нильпотентная группа без кручения, то $F_2 \in qG$. Пусть

$$G = \langle x_1, \dots, x_n; r_1 = 1, \dots, r_s = 1, f_1 = 1, \dots, f_d = 1\rangle, \tag{8}$$

где $r_1, \dots, r_s \in \gamma_3(F_X(\mathcal{N}_3))$, $f_1, \dots, f_d$ — коммутаторы вида $[x_i, x_j]$. Отметим, что какое-то из соотношений $r_1 = 1, \dots, r_s = 1$ не следует в $\mathcal{N}_{3,\infty}$ из соотношений $f_1 = 1, \dots, f_d = 1$ (иначе, по следствию 2 $G \in qF_2$).

Будем рассматривать следующие элементарные преобразования определяющих соотношений группы G:

1) замена определяющего соотношения $r_i = 1$ на определяющее соотношение $r_i r_j^{-k} = 1$ при $i \neq j$, k — произвольное целое число;

2) замена определяющего соотношения $r_i = 1$ на определяющее соотношение $r_i^k = 1$, где k — произвольное целое число, $k \neq 0$.

В результате этих преобразований мы приходим к некоторому представлению группы G в классе $\mathcal{N}_{3,\infty}$. Многократное применение преобразований 1) и 2) (и переименование переменных) позволяет считать, что определяющие соотношения $r_1 = 1, \dots, r_s = 1$ (r_i — произведение базисных коммутаторов) группы G обладают следующими свойствами:

коммутатор $[x_3, x_1, x_2]$ входит в ненулевой степени только в r_1 (соотношение $[x_3, x_1, x_2] = 1$ не следует в $\mathcal{N}_{3,\infty}$ из $f_1 = 1, \dots, f_d = 1$),

коммутатор $[x_2, x_1, x_3]$ не входит в $r_3, \dots, r_s$,

если коммутатор $[x_2, x_1, x_3]$ входит в ненулевой степени в r_2, то он не входит в r_1,

базисные коммутаторы веса 3 от двух переменных не входят в $r_1, \dots, r_s$.

Отметим ещё, что если соотношение $[x_3, x_2] = 1$ истинно в G (т.е. следует в $\mathcal{N}_{3,\infty}$ из соотношений $f_1 = 1, \dots, f_d = 1$), то по тождеству (3) $[x_3, x_1, x_2] = [x_1, x_2, x_3]^{-1}[x_2, x_3, x_1]^{-1}$. Значит, определяющее соотношение $[x_2, x_1, x_3] = [x_3, x_1, x_2]$ следует из соотношения $[x_3, x_2] = 1$. В этом случае удаляем коммутатор $[x_2, x_1, x_3]$ из всех соотношений группы G, заменяя его на $[x_3, x_1, x_2]$. Затем с помощью преобразований 1 и 2 добиваемся, чтобы в представлении (8) группы G коммутатор $[x_3, x_1, x_2]$ входил в ненулевой степени только в r_1, коммутатор $[x_2, x_1, x_3]$ не входил в $r_1, r_2, \dots, r_s$.

Далее всюду в работе будем рассматривать группу G с представлением (8), удовлетворяющим перечисленным свойствам.

Лемма 7. *Пусть группы H_1 имеет в $\mathcal{N}_{3,\infty}$ следующие представление:* $H_1 = \langle x_1, \dots, x_n; r_2 = 1, \dots, r_s = 1, f_1 = 1, \dots, f_d = 1\rangle$. *Тогда* $H_1 \in qF_2$.

Доказательство. Заметим, что $H_1/Is\langle r_1\rangle \cong G \in \mathcal{M}$.

Сначала предположим, что соотношения $[x_2, x_1] = 1$ и $[x_3, x_2] = 1$ не входят в список определяющих соотношений группы G. По лемме 1 существует гомоморфизм $\varphi : H_1 \to F_2$, при котором $x_1^\varphi = a, x_2^\varphi = a, x_3^\varphi = b$, образы остальных порождающих равны 1. В этом случае r_1 имеет вид:

$$r_1 = [x_3, x_1, x_2]^u [x_2, x_1, x_3]^w \dots (u \neq 0),$$

тогда $r_1^\varphi = [b, a, a]^u \neq 1$. Следовательно, $\ker\varphi \cap Is\langle r_1\rangle = 1$, откуда по теореме Ремака ([13], глава 2, §3) H_1 изоморфна подходящей подгруппе группы $H_1/\ker\varphi \times H_1/Is\langle r_1\rangle \in \mathcal{M}$. Поскольку определяющих соотношений, которые являются произведением базисных коммутаторов веса 3, в представлении группы H_1 меньше чем в представлении G, то по выбору G имеем: $H_1 \in qF_2$.

Пусть теперь соотношение $[x_2, x_1] = 1$ истинно в G. Тогда r_1 имеет вид: $r_1 = [x_3, x_1, x_2]^u \dots$ По (3) $[x_3, x_1, x_2] = [x_1, x_2, x_3]^{-1}[x_2, x_3, x_1]^{-1}$, откуда соотношение $[x_3, x_2] = 1$ ложно в G (иначе соотношение $[x_3, x_1, x_2] = 1$ следует из $f_1 = 1, \dots, f_d = 1$ и поэтому $[x_3, x_1, x_2]$ отсутствует в записи r_1, что не так). По лемме 1 существует гомоморфизм $\varphi : H_1 \to F_2$, при котором $x_1^\varphi = a, x_2^\varphi = a, x_3^\varphi = b$, образы остальных порождающих равны 1. Ясно, что $r_1^\varphi = [b, a, a]^u \neq 1$. Далее, как и раньше, замечаем, что $\ker\varphi \cap Is\langle r_1\rangle = 1$, откуда $H_1 \in qF_2$.

Осталось рассмотреть случай, когда соотношение $[x_3, x_2] = 1$ истинно в G. В этом случае, как было отмечено, коммутатор $[x_2, x_1, x_3]$ не входит в $r_1, r_2, \dots, r_s$. Отсюда по лемме 1 существует гомоморфизм $\varphi : H_1 \to F_2$, при котором $x_1^\varphi = a, x_2^\varphi = b, x_3^\varphi = b$, образы остальных порождающих равны 1. Ясно, что $r_1^\varphi = [b, a, b]^u \neq 1$ для некоторого u, $u \neq 0$. Далее, как и раньше, замечаем, что $\ker\varphi \cap Is\langle r_1\rangle = 1$, откуда $H_1 \in qF_2$. □

Пусть группа G имеет представление (8) и удовлетворяет условиям, относящимися к группе (8). Напомним, что ввиду леммы 7 группа H_1, имеющая в $\mathcal{N}_{3,\infty}$ представление $H_1 = \langle x_1, \dots, x_n; r_2 = 1, \dots, r_s = 1, f_1 = , \dots, f_d = 1\rangle$, принадлежит qF_2.

Возьмём произвольный неединичный элемент $v \in \mathcal{N}(G)$ ($\mathcal{N} = qF_2$). По следствию 3 $G/\gamma_3(G) \in \mathcal{N}$, отсюда v можно записать так:

$$v = \prod_{i=1}^{q} [x_{h(i)}, x_{h(i+q)}, x_{h(i+2q)}]^{\delta_i}.$$

Рассматривая вместо v подходящую его степень и используя соотношение $r_1 = 1$, можно и будем предполагать, что в запись v не входит коммутатор $[x_3, x_1, x_2]$.

Во всех группах элемент, имеющий вид $\prod\limits_{i=1}^{q} [x_{h(i)}, x_{h(i+q)}, x_{h(i+2q)}]^{\delta_i}$, будем обозначать через v.

Заметим, что в запись v не входят базисные коммутаторы от 2 переменных. Действительно, допустим, что $[x_j,x_i,x_i]^{\delta_{i1}}[x_j,x_i,x_j]^{\delta_{i2}}$ входит в запись v ($[x_j,x_i,x_i]^{\delta_{i1}}[x_j,x_i,x_j]^{\delta_{i2}} \neq 1$ в G). Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : G \to F_2$, при котором $x_i^{\varphi} = a$, $x_j^{\varphi} = b$, образы остальных порождающих группы G равны 1. Тогда $v^{\varphi} = [b,a,a]^{\delta_{i1}}[b,a,b]^{\delta_{i2}} \neq 1$. Это противоречит тому, что $v \in \mathcal{M}(G)$.

Пусть группа H_{rm} задана в $\mathcal{N}_{3,\infty}$ порождающими

$$x_1,\ldots,x_n,x_{ij},y_{ij},z_{ij},a_j,b_j,d_j (i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,r)$$

и следующими определющими соотношениями:

(i) все определяющие сооношения группы A_{rm};

(ii) $r_1c_1 = 1$, где $c_1 = [a_1,b_1,d_1]\prod_{i=1}^{m}[x_{i1},y_{i1},z_{i1}]$;

(iii) в каждом коммутаторе $[x_{h(i)},x_{h(i+q)},x_{h(i+2q)}]$ фиксируем ровно один элемент (если такой существует), отличный от x_1,x_2,x_3 (обозначим его через $\overline{x}_i$) и вводим для каждого i и всех t таких, что $i \equiv t \ (mod\ q)$ соотношения

$$[\overline{x}_i,a_t] = 1, [\overline{x}_i,b_t] = 1 (i=1,\ldots,q);$$

если $[x_{h(i)},x_{h(i+q)},x_{h(i+2q)}]$ есть $[x_2,x_1,x_3]$, то считаем, что $i=1$ (т.е. это первый сомножитель), и пишем соотношения:

$$[x_1,b_t] = 1, [x_2,b_t] = 1 \text{ для всех } t \text{ таких, что } t \equiv 1 \ (mod\ q);$$

(iv) $r_2 = 1,\ldots,r_s = 1, f_1 = 1,\ldots,f_d = 1$.

Отметим, возможно, что $m=0$. В группе H_{r0} порождающих x_{ij},y_{ij},z_{ij} нет.

Лемма 8. $H_{rm} \in qG$.

Доказательство. Ясно, что $H_{rm}/Is\langle c_1\rangle \cong (G * A_{rm}/\langle c_1\rangle)/N$, где N — подходящая подгруппа. По лемме 6 и теореме 2 $(G * A_{rm}/\langle c_1\rangle)/N \in qG$. Пусть $r_1 = [x_3,x_1,x_2]^u[x_2,x_1,x_3]^v\ldots$ $(u \neq 0)$. По лемме 1 отображение: $x_1 \to a$, $x_2 \to a$, $x_3 \to b$, $a_i \to b^{-u}$, $b_i \to a$, $d_i \to a$ (для всех i), образы остальных порождающих группы H_{rm} равны единице, продолжаемо до гоморфизма $\varphi : H_{rm} \to F_2$, при этом $c_1^{\varphi} = [b,a,a]^{-u} \neq 1$. Отсюда $\ker\varphi \cap Is\langle c_1\rangle = 1$, следовательно, H_{rm} изоморфна подходящей подгруппе группы $F_2 \times (H_{rm}/Is\langle c_1\rangle) \in qG$. □

Лемма 9. *Пусть $H \in qF_2$, $r \geq 2q$ и $\chi : H_{rm} \to H$ — произвольный гомоморфизм. Тогда $v^{\chi} = 1$.*

Доказательство. Предположим, что $v^{\chi} \neq 1$. Поскольку H_{rm}^{χ} — конечно порождённая нильпотентная группа, то по лемме 2 существует гомоморфмзм $\chi_1 : H_{rm}^{\chi} \to F_2$, при котором $v^{\chi\chi_1} \neq 1$. Пусть $\varphi = \chi\chi_1$.

Рассмотрим любой сомножитель $[x_{h(i)},x_{h(i+q)},x_{h(i+2q)}]$ в v такой, что $[x_{h(i)},x_{h(i+q)},x_{h(i+2q)}]^{\varphi} \neq 1$. Пусть $t \equiv i \ (mod\ q)$. Докажем равенство $[a_t,b_t,d_t]^{\varphi} = 1$. Можно считать, что $a_t^{\varphi}, b_t^{\varphi} \notin F_2'$.

Если $\overline{x}_i$ существует, то $\overline{x}_i^\varphi \notin F_2'$ и $[\overline{x}_i^\varphi, a_t^\varphi] = 1, [\overline{x}_i^\varphi, b_t^\varphi] = 1$. Из леммы 3 централизатор элемента $\overline{x}_i^\varphi$ в F_2 абелев, отсюда $[a_t, b_t, d_t]^\varphi = 1$.

Если $[x_{h(i)}, x_{h(i+q)}, x_{h(i+2q)}] = [x_2, x_1, x_3]$ (в частности, $i = 1$), то из $[x_1^\varphi, b_t^\varphi] = 1$, $[x_2^\varphi, b_t^\varphi] = 1$, $b_t^\varphi \notin F_2'$ и из леммы 3 $[x_2, x_1, x_3]^\varphi = 1$. Противоречие.

Рассмотрим подгруппы

$$A = \langle x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}, \ldots, x_{mi}, y_{mi}, z_{mi}\rangle^\varphi,$$

$$B = \langle x_{1,i+q}, y_{1,i+q}, z_{1,i+q}, \ldots, x_{m,i+q}, y_{m,i+q}, z_{m,i+q}\rangle^\varphi$$

группы H_{rm}^φ. Из определения H_{rm} следует, что $[A, B] = 1$. Из леммы 3 вытекает, что одна из групп A или B абелева. Допустим, что A — абелева группа. Тогда $\prod_{i=1}^{m} [x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}]^\varphi = 1$. Но $[a_i, b_i, d_i]^\varphi = 1$, откуда $c_1^\varphi = 1$. Аналогично показывается, что если B — абелева группа, то $c_1^\varphi = 1$. Итак, $c_1^\varphi = 1$.

Пусть $\psi : H_{rm} \to H_{rm}/Is\langle c_1\rangle$ — естественный гомоморфизм. Из только что доказанного следует, что $Is\langle c_1\rangle \subseteq \ker\varphi$. Отсюда, существует гомоморфизм $\xi : H_{rm}/Is\langle c_1\rangle \to F_2$ такой, что $\varphi = \psi\xi$. В частности, $(gIs\langle c_1\rangle)^\xi = g^\varphi$ для каждого $g \in H_{rm}$. Так как $H_{rm}/Is\langle c_1\rangle \cong (G * A_{rm}/\langle c_1\rangle)/N$ для некоторой подгруппы N, порождённой подходящими коммутаторами вида $[x_j, l_i]$ (l_j из множества порождающих группы $A_{rm}/\langle c_1\rangle$), то $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle^\psi \cong G$. Поскольку $v^\psi \in \mathcal{N}(G)$ ($\mathcal{N} = qF_2$), то $v^{\psi\xi} = 1$, т.е. $v^\varphi = 1$. Получили противоречие. □

Из признака принадлежности (лемма 2) непосредственно вытекает

Следствие 4. *$H_{rm} \notin qF_2$ при любом $r \geq 2q$.*

Пусть группа B_{rm} задана в $\mathcal{N}_{3,\infty}$ порождающими

$$x_1, \ldots, x_n, x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, a_j, b_j, d_j (i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, r)$$

и следующими определющими соотношениями:

(i') всеми соотношениями вида $[s_u, s_w] = 1$ при $u \neq w$, где s_l пробегает множество $\{x_{il}, y_{il}, z_{il} \mid i = 1, \ldots, m\}$;

(ii') всеми соотношениями вида $[\overline{x}_i, a_t] = 1, [\overline{x}_i, b_t] = 1$;

если $[x_2, x_1, x_3]$, входит в запись v, то добавляем соотношения $[x_1, b_t] = 1, [x_2, b_t] = 1$ для всех t таких, что $t \equiv 1$ $(mod\ q)$;

(iii') $r_2 = 1, \ldots, r_s = 1, f_1 = 1, \ldots, f_d = 1$.

Пусть $c_j = [a_j, b_j, d_j] \prod_{i=1}^{m} [x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}] \in B_{rm}$ и

$$N_{rm} = \langle r_1c_1, c_1c_2^{-1}, \ldots, c_1c_r^{-1}\rangle.$$

— подгруппа группы B_{rm}. Ясно, что $H_{rm} \cong B_{rm}/IsN_{rm}$.

Лемма 10. *$B_{rm} \in qF_2$.*

Доказательство. Пусть группа B задана в $\mathcal{N}_{3,\infty}$ в порождающих
$$x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, a_j, b_j, d_j (i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, r)$$
всеми определяющими соотношениями (i'). По следствию 2 $B \in qF_2$. Как легко заметить, $B_{rm} \cong (H_1 * B)/N$, где N — подходящая подгруппа, H_1 имеет в $\mathcal{N}_{3,\infty}$ представление
$$H_1 = \langle x_1, \ldots, x_n; r_2 = 1, \ldots, r_s = 1, f_1 = 1, \ldots, f_d = 1 \rangle.$$
По лемме 7 $H_1 \in qF_2$, откуда в силу теоремы 2 $B_{rm} \in qF_2$. □

Лемма 11. *Пусть w — фиксированное натуральное число. Предположим, что для чисел m, f, $l = C_w^2$, $t = \frac{w^3 - w}{3} + 2l$ выполнены условия леммы 4. Если B — w-порождённая подгруппа группы B_{rm}, то $B' \cap IsN_{rm} = 1$.*

Доказательство. Достаточно установить, что $B' \cap N_{rm} = 1$. Пусть $g \in B' \cap N_{rm}$, $g \neq 1$. По (6) элемент вида $[x, y]^k$ равен произведению коммутатора веса 2 и коммутатора веса 3. Отсюда и поскольку $g \in B'$ и B — w-порождённая группа, то, как при доказательстве следствия 1, замечаем, что g можно представить в следующем виде:
$$g = \prod_{i=1}^{l} [h_i, h_{i+l}] \prod_{i=1}^{t-l} [s_i, s_{i+t-l}, s_{i+2(t-l)}],$$
где $l = C_w^2$ (это число базисных коммутаторов веса 2 на w переменных), $t - l = \frac{w^3 - w}{3} + l$ (это число базисных коммутаторов весов 2 и 3).

Так как $g \in N_{rm}$, то g можно записать следующим образом: $g = (r_1 c_1)^{t_1} \prod\limits_{i=2}^{r} (c_1 c_i^{-1})^{t_i}$. Следовательно, g можно представить так:
$$g = r_1^{t_1} c_1^{t_1 + \cdots + t_r} \prod_{i=2}^{r} c_i^{-t_i}.$$
Поскольку $g \neq 1$, то видим, что некоторый элемент c_i (пусть для удобства это c_1) входит в g в ненулевой степени. Пусть
$$F_{3m} = \langle u_1, \ldots u_m, v_1, \ldots v_m, w_1, \ldots w_m \rangle$$
— свободная 3-ступенно нильпотентная группа ранга $3m$, $\pi : B_{rm} \to F_{3m}$ — гомоморфизм, при котором $x_{i1}^{\varphi} = u_i$, $y_{i1}^{\varphi} = v_i$, $z_{i1}^{\varphi} = w_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, образы остальных порождающих группы B_{rm} равны 1 (существование такого гомоморфизма следует из леммы 1). Отсюда выводим, что
$$\prod_{i=1}^{l} [h_i^{\pi}, h_{i+l}^{\pi}] \prod_{i=1}^{t-l} [s_i^{\pi}, s_{i+t-l}^{\pi}, s_{i+2(t-l)}^{\pi}] = \prod_{i=1}^{m} [x_{i1}^{\pi}, y_{i1}^{\pi}, z_{i1}^{\pi}]^{t_1 + \cdots} =$$
$$= \prod_{i=1}^{m} [u_i, v_i, w_i]^{t_1 + \cdots}.$$
Это противоречит следствию 1. □

Лемма 12. *Пусть число w удовлетворяет лемме 11, $\overline{B}$ — w-порождённая подгруппа группы H_{rm}. Тогда $\overline{B} \in qF_2$.*

Доказательство. Пусть $I = IsN_{rm}$. Для удобства считаем, что $H_{rm} = B_{rm}/I$. Имеем:

$$\overline{B}/\overline{B}' = \langle \bar{b}_1\overline{B}'\rangle \times \cdots \times \langle \bar{b}_u\overline{B}'\rangle \times \langle \bar{b}_{u+1}\overline{B}'\rangle \times \cdots \times \langle \bar{b}_z\overline{B}'\rangle$$

для подходящих $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_z \in \overline{B}$. Ясно, что $z \le w$. Считаем, что $\langle \bar{b}_1\overline{B}'\rangle, \ldots, \langle \bar{b}_u\overline{B}'\rangle$ — конечные , $\langle \bar{b}_{u+1}\overline{B}'\rangle, \ldots, \langle \bar{b}_z\overline{B}'\rangle$ — бесконечные группы (группы какого-либо вида могут отсутствовать). Отметим, что поскольку $\overline{B} = \langle \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_z, \overline{B}'\rangle$ и $\overline{B}'$ содержится в подгруппе Фраттини группы $\overline{B}$, то $\overline{B} = \langle \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_z\rangle$. Фиксируем элементы $b_i \in B_{rm}$ такие, что $\bar{b}_i = b_iI$. Пусть $B = \langle b_1, \ldots, b_z\rangle$, $B_1 = \langle b_{u+1}, \ldots, b_z\rangle$ и $\overline{B}_1 = \langle \bar{b}_{u+1}, \ldots, \bar{b}_z\rangle$. Ясно, что $\overline{B} = \langle \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_u, \overline{B}_1\rangle$ — конечно порождённая 3-ступенно нильпотентная группа без кручения, $\bar{b}_i^{k_i} \in \overline{B}'$ для некоторого ненулевого k_i $(i = 1, \ldots, u)$. Докажем, что $\overline{B}_1 \in qF_2$, откуда, по теореме 1, получим, что $\overline{B} \in qF_2$.

Ввиду леммы 10 достаточно установить, что $B_1 \cap N_{rm} = 1$. Пусть g — произвольный элемент из $B_1 \cap N_{rm}$. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\varphi_1 : B_1 \to \overline{B}_1$ $(\ker \varphi_1 = B_1 \cap I,\ b_i^{\varphi_1} = \bar{b}_i)$. Поскольку $g \in B_1 \cap N_{rm}$, то $g^{\varphi_1} = 1$.

С другой стороны, $g = b_{u+1}^{m_{u+1}} \ldots b_z^{m_z}c$ для некоторого $c \in B_1'$ и подходящих целых чисел $m_{u+1}, \ldots, m_z$. Отсюда $g^{\varphi_1}\overline{B}' = (\bar{b}_{u+1}\overline{B}')^{m_{u+1}} \ldots (\bar{b}_z\overline{B}')^{m_z}$. Поскольку $\langle \bar{b}_{u+1}\overline{B}_1'\rangle, \ldots, \langle \bar{b}_v\overline{B}_1'\rangle$ порождают группу, являющуюся прямым произведением этих бесконечных циклических групп, то $m_i = 0$ $(i = u+1, \ldots, z)$, следовательно $g \in B_1'$. По лемме 11 $I \cap B_1' = 1$, откуда $g = 1$. □

Отметим, что H_{rm} — $(n + 3(m+1)r)$-порождённая группа.

Лемма 13. *Пусть $\varphi : H_{rm} \to H_{xy}$ — гомоморфизм, H_{xy} не содержит свободных абелевых подгрупп ранга r' и $r \ge (2r'+1)q$. Предположим, что все $(n+6q)$-порождённые подгруппы группы H_{xy} содержатся в $\mathcal{N} = qF_2$. Тогда $v^{\varphi} = 1$, где $v = \prod_{i=1}^{q}[x_{h(i)}, x_{h(i+q)}, x_{h(i+2q)}]^{\delta_i}$.*

Доказательство. Пусть $B_i = \langle x_{1i}, y_{1i}, \ldots, x_{mi}, y_{mi}\rangle \le H_{rm}$ $(i = 1, \ldots, r)$. Возьмём любое число k из множества $\{1, 2, \ldots, q\}$.

Случай 1. Для каждого i $(i = k, k+q, \ldots, k+r'q)$ множество $\{x_{ji}^{\varphi} \mid j = 1, 2, \ldots, m\}$ содержит такой элемент g_i, всякая ненулевая степень, которого не принадлежит подгруппе $(B_kB_{k+q} \ldots B_{i-q}B_{i+q} \ldots B_{k+r'q})^{\varphi}$. В этом случае элементы $g_k, g_{k+q}, \ldots, g_{k+r'q}$ порождают свободную абелеву группу ранга $r'+1$, что невозможно.

Случай 2. Существует $i_k \in \{k, k+q, \ldots, k+r'q\}$ (фиксируем это i_k), такое, что всякий элемент из множества $\{x_{ji_k}^{\varphi} \mid j = 1, 2, \ldots, m\}$ в некоторой ненулевой степени, содержится в $(B_kB_{k+q} \ldots B_{i_k-q}B_{i_k+q} \ldots B_{k+r'q})^{\varphi}$.

Пусть
$$(x_{ji_k}^{\varphi})^{n_j} \in (B_k B_{k+q} \dots B_{i-q} B_{i+q} \dots B_{k+r'q})^{\varphi},$$
где n_j — подходящие ненулевые целые числа. Тогда $[(x_{ji_k}^{\varphi})^{n_j}, y_{ji_k}^{\varphi}] = 1$, откуда $[x_{ji_k}^{\varphi}, y_{ji_k}^{\varphi}, z_{ji_k}^{\varphi}]^{n_j} = 1$. Отсюда следует, что $[x_{ji_k}^{\varphi}, y_{ji_k}^{\varphi}, z_{ji_k}^{\varphi}] = 1$. Таким образом, $\prod_{j=1}^{m}[x_{ji_k}^{\varphi}, y_{ji_k}^{\varphi}, z_{ji_k}^{\varphi}] = 1$. Аналогично существует $i_{k'} \in \{k+(r'+1)q, k+(r'+2)q, \dots, k+2r'q\}$ (фиксируем это $i_{k'}$) такой, что $\prod_{j=1}^{m}[x_{ji_{k'}}^{\varphi}, y_{ji_{k'}}^{\varphi}, z_{ji_{k'}}^{\varphi}] = 1$. Отметим, что $i_k - i_{k'} \equiv 0 (mod\ q)$ для каждого $k = 1, 2, \dots, q$. Имеем:
$$[a_{i_1}^{\varphi}, b_{i_1}^{\varphi}, d_{i_1}^{\varphi}] = [a_{i_2}^{\varphi}, b_{i_2}^{\varphi}, d_{i_2}^{\varphi}] = \dots = [a_{i_q}^{\varphi}, b_{i_q}^{\varphi}, d_{i_q}^{\varphi}] =$$
$$= [a_{i_{1'}}^{\varphi}, b_{i_{1'}}^{\varphi}, d_{i_{1'}}^{\varphi}] = [a_{i_{2'}}^{\varphi}, b_{i_{2'}}^{\varphi}, d_{i_{2'}}^{\varphi}] = \dots = [a_{i_{q'}}^{\varphi}, b_{i_{q'}}^{\varphi}, d_{i_{q'}}^{\varphi}].$$

Отсюда и из леммы 1 следует, что существует гомоморфизм $\psi : H_{2q,0} \to H_{xy}$ такой, что

$x_1^{\psi} = x_1^{\varphi}, \dots, x_n^{\psi} = x_n^{\varphi}$,

$a_1^{\psi} = a_{i_1}^{\varphi}, b_1^{\psi} = b_{i_1}^{\varphi}, d_1^{\psi} = d_{i_1}^{\varphi}, \dots, a_q^{\psi} = a_{i_q}^{\varphi}, b_q^{\psi} = b_{i_q}^{\varphi}, d_q^{\psi} = d_{i_q}^{\varphi}$,

$a_{1+q}^{\psi} = a_{i_{1'}}^{\varphi}, b_{1+q}^{\psi} = b_{i_{1'}}^{\varphi}, d_{1+q}^{\psi} = d_{i_{1'}}^{\varphi}, \dots, a_{2q}^{\psi} = a_{i_{q'}}^{\varphi}, b_{2q}^{\psi} = b_{i_{q'}}^{\varphi}, d_{2q}^{\psi} = d_{i_{q'}}^{\varphi}$.

Так как $H_{2q,0}^{\psi} = \langle x_1^{\psi}, \dots, x_n^{\psi}, a_1^{\psi}, b_1^{\psi}, d_1^{\psi}, \dots, a_q^{\psi}, b_q^{\psi}, d_q^{\psi}, a_{1+q}^{\psi}, b_{1+q}^{\psi}, d_{1+q}^{\psi}, \dots, b_{2q}^{\psi}, d_{2q}^{\psi}\rangle$ — $(n+6q)$-порождённая подгруппа группы H_{xy}, то по условию $H_{2q,0}^{\psi} \in qF_2$. По лемме 9 $v^{\psi} = 1$. Поскольку $v^{\varphi} = v^{\psi}$, то $v^{\varphi} = 1$. □

Докажем наш основной результат.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{R}$ — квазимногообразие групп и $qF_2(\mathcal{N}_3) \subsetneqq \mathcal{R}$. Предположим, что среди групп из $\mathcal{R} \setminus qF_2(\mathcal{N}_3)$ найдётся 3-ступенно нильпотентная группа G без кручения с представлением*
$$G = \langle x_1, \dots, x_n; r_1 = 1, \dots, r_s = 1, f_1 = 1, \dots, f_d = 1\rangle$$
в $\mathcal{N}_3$, где $r_1, \dots, r_s$ — произведения базисных коммутаторов веса 3 от трёх различных переменных, $f_1, \dots f_d$ — коммутаторы вида $[x_i, x_j]$ (они могут отсутствовать). Тогда интервал $[qF_2(\mathcal{N}_3), \mathcal{R}]$ в решётке квазимногообразий групп континуален.

Доказательство. Выберем в квазимногообразии $\mathcal{M} = \mathcal{R} \cap \mathcal{N}_{3,\infty}$ группу (обозначим её снова через G), не принадлежащую qF_2, с наименьшим числом определяющих соотношений, являющихся произведениями базисных коммутаторов веса 3 от трёх переменных, и возможно с определяющими соотношениями вида $[x_i, x_j] = 1$. Отметим, что эта группа будет удовлетворять всем доказанным леммам. Будем строить счётную последовательность групп $H_1, H_2, \dots$, содержащихся в qG. В качестве H_1 берём произвольную группу H_{rm} из qG. Пусть группа H_{i-1} уже построена. В качестве H_i берём группу $H_{r_i m_i}$ такую, что

1) при любом гомоморфизме группы H_i в группу $H_j (j < i)$ образ элемента v равен единице;

2) если q_{i-1} — число порождающих группы H_{i-1}, то всякая q_{i-1}-порождённая подгруппа группы H_i принадлежит квазимногообразию qF_2 (существование H_i вытекает из лемм 9, 11, 13).

Пусть $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел. Для подмножества $I \subseteq \mathbb{N}$ полагаем $\mathcal{M}_I = q\{H_i \mid i \in I\}$ — квазимногообразие, порождённое всеми группами H_i $(i \in I)$. Если $H_i \in \mathcal{M}_I (i \notin I)$, то по признаку принадлежности (лемма 2) группа H_i аппроксимируется группами из множества $\{H_i \mid i \in I\}$, что противоречит леммам 9, 13. Поэтому $H_i \notin \mathcal{M}_I$ при $i \notin I$, откуда получаем требуемое утверждение. □

Замечание 3. *Группа G, имеющая в $\mathcal{N}_3$ представление $G =$*

$\langle x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3; [x_1, x_2, x_3] = [y_1, y_2, y_3], [x_i, y_j] = 1 (i = 1, 2; j = 1, 2, 3)\rangle$,

не принадлежит qF_2. В частности, интервал $[qF_2, qG]$ континуален.

Доказательство. Предположим, что $G \in qF_2$. Тогда по признаку принадлежности (лемма 2) существует гомоморфизм $\varphi : G \to F_2$ такой, что $[x_1, x_2, x_3]^\varphi \neq 1$. Ясно, что $x_1^\varphi \notin F_2'$. Из леммы 3 следует, что $[y_1^\varphi, y_2^\varphi] = 1$, откуда $[y_1^\varphi, y_2^\varphi, y_2^\varphi] = 1$. Получили противоречие, значит, $G \notin qF_2$. □

В заключение хочу выразить благодарность Шаховой Светлане и Лодейщиковой Виктории за внимательное прочтение этой работы и полезные замечания.

References

[1] S.A. Shakhova, *On the lattice of quasivarieties of nilpotent groups of class 2*, Sib. Adv. Math., **7**:3 (1997), 98–125. Zbl 0917.20026

[2] S.A. Shakhova, *On a quasivariety generated by a finite p-group*, Math. Notes, **53**:1, 345–347 (1993). Zbl 0811.20028

[3] S.A. Shakhova, *On a cardinality of the lattice of quasivarieties of nilpotent groups*, Algebra and Logic, **38**:3 (1999), 202—206. Zbl 0930.08005

[4] V.A. Gorbunov, *Algebraic theory of quasivarieties* [in Russian], Nauch. Kniga, Novosibirsk, 1999. Zbl 0986.08002

[5] A.N. Fyodorov, *Quasi-identities of finite 2-nilpotent groups*, VINITI, No. 5489-B87, Moscow, 1987.

[6] A.I. Budkin, *Quasivarieties of groups* [in Russian], Altai State Univ., Barnaul, 2002.

[7] A.I. Budkin, *A lattice of quasivarieties of nilpotent groups*, Algebra and Logic, **33**:1 (1994), 14—21. Zbl 0823.20025

[8] A.I. Budkin, *On the Quasivarieties Generated by a Finite Group and Lacking Any Independent Bases of Quasi-Identities*, Sib. Math. J., **61**:6 (2020), 983–993. Zbl 1498.20067

[9] A.I. Budkin, S.A. Shakhova,*On the complexity of the lattice of quasivarieties of nilpotent groups*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **21**:2 (2024), 1118–1131, http://semr.math.nsc.ru/v21/n2/p1118-1131.pdf.

[10] A.I. Budkin, *Independent Axiomatizability of Quasivarieties of Torsion-Free Nilpotent Groups*, Algebra and Logic, **60**:2 (2021), 79—88. Zbl 1515.08008

[11] H. Neumann, *Varieties of groups*, Springer, New York, Heidelberg, and Berlin (1967). Zbl 0251.20001

[12] A.I. Malcev, *Algebraic Systems*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1973. Zbl 0266.08001

[13] M.I. Kargapolov, Yu.I. Merzlyakov, *Foundations of Group Theory*, Springer-Verlag, New York etc., 1979. Zbl 0549.20001

[14] A.I. Budkin, V.A. Gorbunov, *Quasivarieties of algebraic systems*, Algebra and Logic, **14**:2 (1975), 73—84. Zbl 0328.08006

[15] A.I. Budkin, *On the quasivariety generated by a 3-nilpotent group*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **22**:1 (2025), 110–124. http://semr.math.nsc.ru/v22/n1/p0110-0124.pdf

[16] A.L. Evtyagin, V.A. Roman'kov, *On Embeddings in the Class of Partially Commutative Nilpotent Groups*, Math. Notes, **116**:2 (2024), 258 – 264. Zbl 07942200

[17] M. Hall, *The theory of groups*, The Macmillan Company, New York, 1959. Zbl 1381.20002

[18] A.N. Fedorov, *Subquasivarieties of nilpotent minimal non-Abelian group varieties*, Sib. Math. J., **21**:6 (1980), 840–850. Zbl 0463.20024

Alexandr Ivanovich Budkin
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
Email address: budkin@math.asu.ru