S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 22, № 1, стр. 143–162 (2025) УДК 517.956.6
https://doi.org/10.33048/semi.2025***** MSC 35M10

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К.Т. Каримов, Д.С.Олимова

Представлено ***

Abstract: In this paper, a nonlocal problem in a parallelepiped is investigated for a three-dimensional equation of mixed type with two singular coefficients. The proof of the uniqueness of the solution and its construction are carried out by the method of spectral analysis. The solution to the problem is constructed as a double Fourier series by the sum of trigonometric and Bessel functions. When substantiating the uniform convergence of the constructed series, the problem of small denominators arises. In this regard, an estimate of the separation from zero of the small denominator with the corresponding asymptotes is found. The obtained estimate made it possible to prove the convergence of the obtained series and its derivatives up to the second order inclusive, as well as the existence theorem in the class of regular solutions.

Keywords: mixed type equation, nonlocal problem, singular coefficient, spectral method.

Karimov, K.T., Olimova D.S. Boundary value problem with nonlocal conditions for a three-dimensional equation of mixed type with two singular coefficients.

*Поступила 31 марта 2025 г., опубликована **** июля 2025 г.*

1 Введение. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + (\mathrm{sgn} y)\, u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\beta}{|y|} u_y + \frac{2\gamma}{z} u_z = 0 \tag{1}$$

в области $\Omega = \{(x, y, z) : \, x \in (0, a)\,,\ y \in (-b_0, b)\,,\ z \in (0, c)\}$, где $a, b_0, b, c \in R^+$, $\beta, \gamma \in (0, 1/2)$. Уравнение (1) в области Ω принадлежит смешанному типу, а именно: в области $\Omega_+ = \Omega \cap \{y > 0\}$ принадлежит эллиптическому типу, а в области $\Omega_- = \Omega \cap \{y < 0\}-$ гиперболическому типу. Плоскости $y = 0$ и $z = 0$ являются плоскостями сингулярности коэффициентов уравнения. Среди них $y = 0-$ плоскость изменения типа уравнения.

В области Ω для уравнения (1) рассмотрим следующую задачу:

Задача А. Найти функцию $u\,(x, y, z)$, удовлетворяющую в области $\Omega_+ \cup \Omega_-$ уравнению (1) и условиям

$$u\,(x, y, z) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^{2,2,2}_{x,y,z}\left(\Omega_+ \cup \Omega_-\right),\ \ u_x,\ \ z^{2\gamma} u_z \in C\left(\bar{\Omega}\right); \tag{2}$$

$$u\,(0, y, z) = u\,(a, y, z)\,,\ \ u_x\,(0, y, z) = u_x\,(a, y, z)\,,\ \ y \in [0, b]\,,\ \ z \in [0, c]\,; \tag{3}$$

$$u\,(x, y, 0) = 0,\ \ \ u\,(x, y, c) = 0,\ \ x \in [0, a]\,,\ \ y \in [0, b]\,; \tag{4}$$

$$u\,(x, 0, z) = \tau_1\,(x, z)\,,\ \ u\,(x, b, z) = \tau_2\,(x, z)\,,\ \ x \in [0, a]\,,\ \ z \in [0, c]\,; \tag{5}$$

а также условию склеивания

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{2\beta} u_y\,(x, y, z) = \lim_{y \to +0} y^{2\beta} u_y\,(x, y, z)\,,\ \ x \in (0, a)\,,\ \ z \in (0, c)\,, \tag{6}$$

где $\tau_1\,(x, z)\,,\ \tau_2\,(x, z)-$ заданные функции.

В работе [1] А.А.Дезин исследовал уравнение $(d/dt)\, u - Au = f,\ 0 \le t \le a$ при граничном условии $b\, u|_{t=0} - u|_{t=a} = g$. Здесь поясняется, что заданные условия «нелокальные» в том смысле, что задают связь между значениями неизвестной функции в различных точках границы.

Нелокальные краевые задачи представляют весьма интересное обобщение классических задач и, в то же время, они естественным образом получаются при построении математических моделей реальных процессов и явлений в физике, в инженерии и т.д. С этими вопросами можно ознакомиться в работах [2], [3], [4], [5], [6]. Задачи с нелокальными условиями для уравнений в частных производных изучались многими авторами. Ниже приведем обзор задач, близких задаче А, которые поставлены и исследованы в двумерных областях.

В 1956 г. Ф.И. Франкль в работе [7], рассматривая обтекание конечного симметричного профиля потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения, поставил задачу для уравнения Чаплыгина в смешанной области с нелокальным условием вида $u\,(0, y) = u\,(0, -y)$. При этом, дополнительно было задано локальное условие $u_x\,(0, y) = 0$.

В работе [8] Н.И. Ионкин доказал существование решения нелокальной задачи с условиями $u_x\,(0, y) = u_x\,(1, y)\,,\ u\,(0, y) = 0,\ 0 \le y \le T$

и $u(x,0) = \tau(x),\ 0 \le x \le 1$, для уравнения теплопроводности методом спектрального анализа. В работе [9], он обосновал единственность решения этой задачи. Такого рода условия встречаются, например, при решении задач, описывающих процесс диффузии частиц в турбулентной плазме, а также в процессах распространения тепла в тонком нагретом стержне, если задан закон изменения общего количества тепла стержня. В работе Н.И. Ионкина и Е.И. Моисеева [10] доказана однозначная разрешимость задачи для уравнения теплопроводности с условиями

$$a_1 u_x(0,t) + b_1 u_x(1,t) + a_0 u(0,t) + b_0 u(1,t) = 0,$$
$$c_1 u_x(0,t) + d_1 u_x(1,t) + c_0 u(0,t) + d_0 u(1,t) = 0,$$

где $a_j, b_j, c_j, d_j,\ j = \overline{0,1}-$ заданные постоянные.

М.Е.Лернер, О.А.Репин [11] в области $D = \{(x,y) : 0 < x < 1, y > 0\}$ изучили задачу: найти функцию $u(x,y)$ со свойствами

$$u(x,y) \in C\left(\bar{D}\right) \cap C^1(D \cup \{x=0\}) \cap C^2(D);$$
$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0,\ \ (x,y) \in D,\ m > -1;$$
$$u(x,y) \to 0 \text{ при } y \to +\infty \text{ равномерно по } x \in [0,1];$$
$$u(0,y) - u(1,y) = \varphi_1(y),\ u_x(0,y) = \varphi_2(y),\ y \ge 0;\ u(x,0) = \tau(x),$$

где $\tau(x), \varphi_1(y), \varphi_2(y)-$ заданные достаточно гладкие функции, причем $\tau(x)$ ортогональна системе функций $1, \cos(2n+1)\pi x,\ n = 0,1,2,...$. В работе [12] исследована аналогичная задача в полуполосе D для уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{2p}{y} u_y - b^2 u = 0,\ \ p, b \in R,$$

при условии $\varphi_1(y) \equiv 0$ и $\varphi_2(y) \equiv 0$. Единственность решения этой задачи доказана на основании принципа экстремума. Используя методы разделения переменных и интегральных преобразований, установлена разрешимость рассматриваемой задачи. В работе [13] Е.И.Моисеев в полуполосе D изучил следующую нелокальную краевую задачу

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0,\ \ m > -2;$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 \le x \le 1;$$
$$u(0,y) = u(1,y),\ u_x(0,y) = 0,\ y \ge 0;$$
$$f(x) \in C^{2+\alpha}[0,1],\ f(0) = f(1),\ \ f'(0) = 0.$$

Методом спектрального анализа доказаны единственность и существование решения этой задачи в классе функций $u(x,y) \in C\left(\bar{D}\right) \cap C^2(D)$ и стремящихся к нулю или ограниченных на бесконечности. При этом, решение задачи построено в виде суммы биортогонального ряда. Эти результаты перенесены на уравнения $y^m u_{xx} + u_{yy} - b^2 y^m u = 0,\ m, b \in R$, причем $b \ge 0,\ m > 0$ в [14]. В работе Ю.К.Сабитовой [15] для уравнения $y^m u_{xx} - u_{yy} - b^2 y^m u = 0$ в области $\{(x,y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < T\}$, где $m > 0,\ b \ge 0,\ T > 0-$ заданные действительные числа, изучены задачи с начальными условиями $u(x,0) = \tau(x),\ u_y(x,0) = \nu(x),\ 0 \le x \le 1$

и нелокальными граничными условиями $u(0,y)=u(1,y)\,,\ u_x(0,y)=0$ или $u_x(0,y)=u_x(1,y)\,,\ u(1,y)=0$ при $0\le y\le T$. Методом спектрального анализа доказаны теоремы единственности и существования решения указанных задач. А.А. Абашкин [16] для уравнения

$$L_0u\equiv u_{xx}+\mathrm{sgn}y\,u_{yy}+(2p/|y|)\,u_y+ku=0$$

в области $D_1=\{(x,y):0<x<1,y<\alpha\}$ исследовал следующую задачу:

$$u\in C\left(\bar{D}_1\right)\cap C^2\left(D_1\backslash\{y=0\}\right),\ \ L_0u=0;$$

$u(0,y)=u(1,y)\,,\ \ u_x(0,y)=0$ при $y<\alpha$; $u(x,\alpha)=\varphi(x)$ при $0<x<1$,

где $\varphi(x)-$ заданная функция, удовлетворяющая условию $\varphi(0)=\varphi(1)\,,$ а $p,k,\alpha-$ заданные действительные числа, причем $\alpha>0$, $p\ge 1/2$.

В монографиях [17], [18] и в статьях [19], [20], [21], [22] исследованы нелокальные задачи для уравнения Лаврентьева-Бицадзе и для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа со степенным вырождением.

Нелокальные краевые задачи для эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами в трехмерных областях изучены в работах [23], [24], [25], [26], а такие задачи для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами в трехмерных областях методом спектрального анализа до сих пор является неизученными.

2 Построение собственных функций

Найдем нетривиальные решения задачи $\{(1)\text{-}(4)\}$. С этой целью, разделив переменные по формуле $u(x,y,z)=X(x)\,Q(y)\,Z(z)\,,$ из уравнения (1) и условий (3) и (4) получим уравнение

$$(\mathrm{sgn}y)\,Q''(y)+\frac{2\beta}{|y|}Q'(y)-\lambda Q(y)=0,\ y\in(-b_0,0)\cup(0,b),\tag{7}$$

и задачи на собственные значения

$$Z''(z)+\frac{2\gamma}{z}Z'(z)+(\lambda-\mu)\,Z(z)=0,\ Z(0)=0,\ Z(c)=0;\tag{8}$$

$$X''(x)+\mu X(x)=0,\ X(0)=X(a)\,,\ X'(0)=X'(a)\,,\tag{9}$$

где $\mu,\lambda\in R-$ константа разделения.

Собственные значения и собственные функции задачи (9) имеют вид [22]

$$\mu_n=(2\pi n/a)^2\,,\ n=0,1,2,...,$$

$$X_0(x)=\frac{1}{\sqrt{a}},\ X_{2n-1}(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{2\pi nx}{a},\ X_{2n}(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{2\pi nx}{a}.\tag{10}$$

Система собственных функций (10) ортонормальна и полна в пространстве $L_2(0,a)$ и в нем образует ортонормированный базис [22], [27].

Теперь перейдем к исследованию задачи (8). Решение задачи (8) определяется формулой [28]

$$Z_m(z) = z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sigma_{\gamma m} z/c), m \in N. \tag{11}$$

Здесь $J_\nu(z)-$ функция Бесселя первого рода порядка ν, а $\sigma_{\gamma m}-$ m-ный положительный корень уравнения $J_{1/2-\gamma}(z) = 0$, $\lambda_{nm} = (2\pi n/a)^2 + (\sigma_{\gamma m}/c)^2$, $n+1, m \in N$.

Полагая в уравнении (7) $\lambda = \lambda_{nm}$, найдем его общее решение:

$$Q_{nm}(y) = \begin{cases} a_{nm} y^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} y\right) + \\ \qquad +b_{nm} y^{1/2-\beta} K_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} y\right), \ \ y \in (0,b], \\ c_{nm}(-y)^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}\left[\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right] + \\ \quad +d_{nm}(-y)^{1/2-\beta} Y_{1/2-\beta}\left[\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right], \ y \in [-b_0, 0), \end{cases} \tag{12}$$

где a_{nm}, b_{nm}, c_{nm} и $d_{nm}-$ произвольные постоянные, $I_l(x)$ и $K_l(x)-$ функция Бесселя мнимого аргумента и функция Макдональда порядка l [29] соответственно.

Теперь в (12) на основании $u \in C\left(\bar{\Omega}\right)$ и условия склеивания (6) подберем постоянные a_{nm}, b_{nm}, c_{nm} и d_{nm} так, чтобы выполнялись условия

$$Q_{nm}(+0) = Q_{nm}(-0), \quad \lim_{y \to -0} (-y)^{2\beta} Q'_{nm}(y) = \lim_{y \to +0} y^{2\beta} Q'_{nm}(y). \tag{13}$$

Из (12) в силу $\beta \in (0, 1/2)$, следует, что первое из равенств (13) выполнено, если $d_{nm} = -\pi b_{nm}/2$ при любых a_{nm} и c_{nm}, а второе равенство имеет место при $c_{nm} = \frac{\pi b_{nm}}{2} ctg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta\pi}{2}\right) - a_{nm}$ и $d_{nm} = -\frac{\pi b_{nm}}{2}$. С учетом последних равенств, функция (12) перепишется в виде

$$Q_{nm}(y) = \begin{cases} a_{nm} y^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} y\right) + \\ \qquad +b_{nm} y^{1/2-\beta} K_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} y\right), \quad y \in [0,b], \\ -a_{nm}(-y)^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}\left[\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right] + \\ \quad +b_{nm}(-y)^{1/2-\beta} \bar{Y}_{1/2-\beta}\left[\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right], \ y \in [-b_0, 0], \end{cases} \tag{14}$$

где $\bar{Y}_{1/2-\beta}\left[\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right] =$

$$= \frac{\pi}{2\cos\beta\pi}\left\{J_{1/2-\beta}\left[\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right] + J_{\beta-1/2}\left[\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right]\right\}.$$

3 Единственность решения задачи A

Пусть $u(x,y,z)-$ решение задачи A. Рассмотрим следующую функцию:

$$\omega_{nm}(y) = d_m \int_0^c \int_0^a u(x,y,z) X_n(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz, \ \ m, n \in N, \tag{15}$$

где $X_n(x)$ и $Z_m(z)$ – функции, определенные равенствами (10) и (11),

$$d_m = \left[\|Z_m\|_{L_{2,q}(0,c)}\right]^{-2},$$

$$\|Z_m\|_{L_{2,q}(0,c)} = \left(\int\limits_0^c q(z)\, Z_m^2(z)\, dz\right)^{1/2} = \left|cJ_{3/2-\gamma}(\sigma_{\gamma m})\right|/\sqrt{2}, \quad q(z) = z^{2\gamma}.$$

На основании (15) введем функции

$$\omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y) = d_{nm} \int\limits_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2} \int\limits_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1} u(x,y,z)\, X_n(x)\, z^{2\gamma} Z_m(z)\, dxdz, \quad n,m \in N, \quad (16)$$

где ε_1 и ε_2– достаточно малые положительные числа.

Очевидно, что $\lim\limits_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0} \omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y) = \omega_{nm}(y)$.

Здесь и далее, для удобства и компактности используется оператор Бесселя [30]: $B_q^y \equiv \partial^2/\partial y^2 + [(2q+1)/y]\,\partial/\partial y$.

С помощью функции (16) и уравнения (1) вычислим выражение $(\mathrm{sgn} y)\, B_{\beta-1/2}^y \omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y)$:

$$(\mathrm{sgn} y)\, B_{\beta-1/2}^y \omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y) =$$

$$d_m \int\limits_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2} \int\limits_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1} \left[(\mathrm{sgn} y) B_{\beta-1/2}^y u\right] X_n(x)\, z^{2\gamma} Z_m(z)\, dxdz =$$

$$= -d_m \int\limits_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2} \int\limits_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1} \left[\left(B_{-1/2}^x + B_{\gamma-1/2}^z\right) u(x,y,z)\right] X_n(x)\, z^{2\gamma} Z_m(z)\, dxdz =$$

$$= -d_m \left[\int\limits_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2} \left(\int\limits_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1} \left[B_{-1/2}^x u(x,y,z)\right] X_n(x)\, dx\right) z^{2\gamma} Z_m(z)\, dz + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1} \left(\int\limits_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2} \left[B_{\gamma-1/2}^z u(x,y,z)\right] z^{2\gamma} Z_m(z)\, dz\right) X_n(x)\, dx\right]. \quad (17)$$

Применяя правило интегрирования по частям, из (17) получим

$$(\mathrm{sgn} y) B_{\beta-1/2}^y \omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y) =$$

$$-d_m \left[\int\limits_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2} \left\{ \left[u_x(x,y,z) X_n(x) - u(x,y,z) X_n'(x)\right]\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=a-\varepsilon_1} - \right.\right.$$

$$\left. -\mu_n \int\limits_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1} u(x,y,z) X_n(x)\, dx \right\} z^{2\gamma} Z_m(z)\, dz +$$

$$+\int\limits_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1}\left\{\left[u_z(x,y,z)Z_m(z)-u(x,y,z)Z_m'(z)\right]z^{2\gamma}\Big|_{z=\varepsilon_2}^{z=c-\varepsilon_2}-\right.$$

$$\left.-\left(\sigma_{\gamma m}/c\right)^2\int\limits_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2}u(x,y,z)z^{2\gamma}Z_m(z)\,dz\right\}X_n(x)\,dx\Bigg]. \qquad (18)$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что следующий предел существует:

$$\lim_{z\to 0}z^{2\gamma}Z_m'(z)=2^{1/2+\gamma}\left(\sigma_{\gamma m}/c\right)^{1/2-\gamma}/\Gamma\left(1/2-\alpha\right), \qquad (19)$$

а при $x\to a$ и $z\to c$, функции $Z_m'(z)$ не имеют особенности.

Из равенства (18), переходя к пределу при $\varepsilon_1\to 0,\ \varepsilon_2\to 0$ и учитывая условия (2), (3), (4) и равенство (19), а также граничные условия задач (8), (9) и обозначение (15), получим равенство

$$\mathrm{sgn}y\cdot\left[\omega_{nm}(y)\right]''+\frac{2\beta}{|y|}\left[\omega_{nm}(y)\right]'-\lambda_{nm}\omega_{nm}(y)=0,\ \ y\in(-b_0,0)\cup(0,b)$$

Кроме того, учитывая граничные условия (5), из (15) находим

$$\omega_{nm}(-b_0)=\tau_{1nm},\ \ \omega_{nm}(b)=\tau_{2nm}, \qquad (20)$$

где

$$\tau_{jnm}=d_m\int\limits_0^c\int\limits_0^a\tau_j(x,z)\,X_n(x)\,z^{2\gamma}Z_m(z)\,dxdz,\ \ j=\overline{1,2}. \qquad (21)$$

Отсюда следует, что функция $\omega_{nm}(y)$, которая имеет вид (15), является решением уравнения (7) при $\lambda=\lambda_{nm}$, удовлетворяющим условиям (20). Поэтому удовлетворяя решения (14) уравнения (7) (при $\lambda=\lambda_{nm}$) условиям (20), получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{nm}I_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b\right)+b_{nm}K_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b\right)=\tau_{2nm}b^{\beta-1/2}, \\ -a_{nm}J_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b_0\right)+b_{nm}\bar{Y}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b_0\right)=\tau_{1nm}b_0^{\beta-1/2}, \end{cases} \qquad (22)$$

откуда при условии

$$\Delta_{nm}(b_0,b)=I_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b\right)\bar{Y}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b_0\right)+$$

$$+K_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b\right)J_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b_0\right)\neq 0, \qquad (23)$$

однозначно находим коэффициенты a_{nm} и b_{nm} :

$$a_{nm}=\frac{b^{\beta-1/2}\bar{Y}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b_0\right)\tau_{2nm}-b_0^{\beta-1/2}K_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b\right)\tau_{1nm}}{\Delta_{nm}(b_0,b)},$$

$$b_{nm}=\frac{b_0^{\beta-1/2}I_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b\right)\tau_{1nm}+b^{\beta-1/2}J_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b_0\right)\tau_{2nm}}{\Delta_{nm}(b_0,b)}.$$

Подставляя эти коэффициенты в (14), получим

$$\omega_{nm}(y) = \begin{cases} \Big[(y/b)^{1/2-\beta}\,\Delta_{nm}(b_0,y)\,\tau_{2nm} + \\ +(y/b_0)^{1/2-\beta}\,A_{nm}(y,b)\,\tau_{1nm}\Big]\Big/\Delta_{nm}(b_0,b),\, y\in[0,b]\,; \\ \Big[(-y/b_0)^{1/2-\beta}\,\Delta_{nm}(-y,b)\,\tau_{1nm} + (-y/b)^{1/2-\beta}\,\times \\ \quad \times B_{nm}(b_0,-y)\,\tau_{2nm}]/\Delta_{nm}(b_0,b),\; y\in[-b_0,0]\,, \end{cases} \tag{24}$$

где

$$A_{nm}(y,b) = I_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b\right)K_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right) -$$

$$-K_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b\right)I_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right),$$

$$B_{nm}(b_0,-y) = J_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b_0\right)\bar{Y}_{1/2-\beta}\left(-\sqrt{\lambda_{nm}}y\right) -$$

$$-\bar{Y}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b_0\right)J_{1/2-\beta}\left(-\sqrt{\lambda_{nm}}y\right).$$

Из изложенного выше следует, что каждая из функций

$$u_{nm}(x,y,z) = X_n(x)\,Z_m(z)\,\omega_{nm}(y)\,,\;\; n+1,m\in N,$$

где $X_n(x)$, $Z_m(z)$, $\omega_{nm}(y) -$ функции, определяемые соответственно равенствами (10), (11), (24), при выполнении условия (23), удовлетворяют всем условиям задачи A.

Пусть при некоторых b_0, b и $n=l$, $m=k\in N$ нарушено условие (23), т.е. $\Delta_{lk}(b_0,b)=0$. Тогда однородная задача A, где $\tau_j(x,z)\equiv 0$, $j=\overline{1,2}$, имеет нетривиальное решение

$$u_{lk}(x,y,z) = \begin{cases} y^{1/2-\beta}\,[\Delta_{lk}(b_0,y) + A_{lk}(y,b)]\,X_l(x)\,Z_k(z)\,,\;\; y>0; \\ (-y)^{1/2-\beta}\,[\Delta_{lk}(-y,b) + B_{lk}(b_0,-y)]\,X_l(x)\,Z_k(z)\,,\; y<0, \end{cases} \tag{25}$$

где $X_l(x)$ и $Z_k(z)$ находятся по формуле (10) и (11).

Теперь можем доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Если существует решение задачи A, то оно единственно только тогда, когда* $\Delta_{nm}(b_0,b)\neq 0$ *при всех* $n+1,m\in N$.

Доказательство. Для этого достаточно доказать, что однородная задача A имеет только тривиальные решения. Пусть $\tau_j(x,z)\equiv 0$, $j=\overline{1,2}$ и выполнено условие (23). Тогда из равенств (21), (24) и (15) следует, что $\int\limits_0^c\int\limits_0^a u(x,y,z)\,X_n(x)\,z^{2\gamma}Z_m(z)\,dxdz = 0$, $n+1,m\in N$. Отсюда, в силу полноты системы функций (11) в пространстве $L_2(0,c)$ с весом $z^{2\gamma}$ и $u(x,y,z)\in C\left(\bar{\Omega}\right)$ следует, что $\int\limits_0^a u(x,y,z)\,X_n(x)\,dx = 0$, $n\in N$. Если учесть полноту системы функций (10) в пространстве $L_2(0,a)$ и $u(x,y,z)\in C\left(\bar{\Omega}\right)$, из последнего равенства вытекает, что $u(x,y,z)\equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. $\square$

4 Построение и обоснование решения задачи А

Выражение $\Delta_{nm}(b_0, b)$, которое входит в знаменатели формулы (24), имеет счетное множество нулей, то $\Delta_{nm}(b_0, b)$ может стать достаточно малым при больших n и m, т.е. возникает проблема «малых знаменателей» [31]. Для обоснования существования решения задачи А необходимо показать существование числа b_0, b и γ, при котором выражение $\Delta_{nm}(b_0, b)$ для достаточно больших n и m отделено от нуля с соответствующей асимптотикой.

Лемма 1. *Пусть b_0- любое натуральное число или $b_0 = p/q-$ любое дробное число, где $(p, q) = 1$, $(4, q) = 1$, $p, q \in N$, причем*

$$n^2 + (m - \gamma/2)^2/c^2 \neq (d - 1/4)^2 q^2/p^2, \ d \in Z, \ \forall n, m \in N,$$

тогда существуют положительное число C_0 и $\forall n_0, m_0 \in N$, такие, что при всех $n > n_0$ и $m > m_0$ справедлива оценка

$$|\Delta_{nm}(b_0, b)| \geq C_0 e^{\sqrt{\lambda_{nm}} b}. \tag{26}$$

Доказательство. Выражение $\Delta_{nm}(b_0, b)$ представим в следующем виде

$$\Delta_{nm}(b_0, b) = I_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} b\right) \tilde{\Delta}_{nm}(b_0, b), \tag{27}$$

где

$$\tilde{\Delta}_{nm}(b_0, b) = J_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} b_0\right) \frac{K_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} b\right)}{I_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} b\right)} + \bar{Y}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} b_0\right). \tag{28}$$

В силу асимптотических поведений функций $I_v(x)$ и $K_v(x)$ при больших x [32]

$$I_\nu(x) \approx \frac{e^x}{(2\pi x)^{1/2}}, \ \ K_\nu(x) \approx \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}. \tag{29}$$

функция Макдональда $K_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} b\right)$ при достаточно больших n и m строго убывает по формуле $\left[\pi/\left(2\sqrt{\lambda_{nm}} b\right)\right]^{1/2} e^{-\sqrt{\lambda_{nm}} b}$, а функция $I_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} b\right)$ строго возрастает по формуле $\left(2\pi\sqrt{\lambda_{nm}} b\right)^{-1/2} e^{\sqrt{\lambda_{nm}} b}$, поэтому величина $J_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} b_0\right) K_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} b\right)/I_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} b\right)$ при больших n и m, есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\bar{Y}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} b_0\right)$. Рассмотрим только выражение

$$\bar{Y}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} b_0\right) = \frac{\pi}{2\cos\beta\pi}\left[J_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} b_0\right) + J_{\beta-1/2}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} b_0\right)\right],$$

которое имеет счетное множество нулей. Следовательно, выражение $\tilde{\Delta}_{nm}(b_0, b)$ при некоторых b_0 может иметь счетное множество нулей, независимо от $b > 0$. Поскольку b_0- любое положительное число, то оно может принимать значения, сколь угодно близкие нулям $\tilde{\Delta}_{nm}(b_0, b)$.

Согласно работе [29], при достаточно больших m, для m-ного положительного корня уравнения $J_{1/2-\gamma}(x) = 0$, имеет место соотношение

$$\sigma_{\gamma m} \approx \pi(m - \gamma/2). \tag{30}$$

При достаточно больших n, справедливо следующее приблизительное равенство

$$\mu_n \approx (\pi n)^2 . \tag{31}$$

Тогда $\tilde{\Delta}_{nm}(b_0, b) \approx \bar{Y}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} b_0\right)$. Кроме того, в силу асимптотической формулы функции Бесселя при достаточно больших ξ

$$J_\nu(\xi) \approx \left(\frac{2}{\pi\xi}\right)^{1/2} \cos\left(\xi - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \tag{32}$$

и с учетом (30) и (31) справедливо приблизительное равенство

$$\lambda_{nm}^{1/4} \tilde{\Delta}_{nm}(b_0, b) \approx A \sin\left(\sqrt{\lambda_{nm}} b_0 + \pi/4\right), \tag{33}$$

где $A = \sqrt{\pi}\,(2b_0)^{-1/2} \cos^{-1}(\beta\pi/2 + \pi/4)$.

Предположим, что n, $(m - \gamma/2)\pi/c$ и $\pi h-$ числа Пифагора, т.е. $(\pi n)^2 + \left[\frac{\pi}{c}\left(m - \frac{\gamma}{2}\right)\right]^2 = \pi^2 h^2,\ h \in R$. Для примера здесь покажем оценку (33), для случая, когда $h-$ натуральное число. Тогда (33) перепишется в виде $\sqrt{\pi h}\tilde{\Delta}_{nm}(b_0, b) \approx A \sin(\pi h b_0 + \pi/4)$.

Если, например, $b_0 = l \in N$, то из последнего получаем

$$\left|\sqrt{\pi h}\tilde{\Delta}_{nm}(l, b)\right| = A \sin\frac{\pi}{4} = \frac{A}{\sqrt{2}} \geq \tilde{C}_0 > 0, \tilde{C}_0 = const \tag{34}$$

Пусть $b_0 = p/q-$ рациональное число, где $p, q \in N$, $(p, q) = (4, q) = 1$. Тогда $\left|\sqrt{\pi h}\tilde{\Delta}_{nm}\left(\frac{p}{q}, b\right)\right| = A\left|\sin\pi\left(\frac{hp}{q} + \frac{1}{4}\right)\right|$.

Разделим hp на q с остатком: $hp = sq + r,\ s = 1, 2, ..., r = 0, 1, ..., 0 \leq r \leq q - 1$. Если учесть это, то выражение $\sqrt{\pi h}\tilde{\Delta}_{nm}(p/q, b)$ примет вид

$$\sqrt{\pi h}\tilde{\Delta}_{nm}\left(\frac{p}{q}, b\right) = A\left|\sin\pi\left(\frac{r}{q} + \frac{1}{4}\right)\right| \geq \tilde{C}_0 > 0. \tag{35}$$

Потребуем, чтобы число $\tilde{C}_0$ было больше нуля, а это возможно только тогда, когда $hp/q + 1/4 \neq d,\ d \in Z$ или

$$n^2 + (m - \gamma/2)^2/c^2 \neq (d - 1/4)^2 q^2/p^2,\ d \in Z.$$

Теперь вернемся к равенству (27). При больших $n > n_0$ и $m > m_0$, равенство (27), перепишется в виде

$$\Delta_{nm}(b_0, b) \approx (2\pi b)^{-1/2} \lambda_{nm}^{-1/4} e^{\sqrt{\lambda_{nm}} b} \tilde{\Delta}_{nm}(b_0, b).$$

Принимая во внимание оценки (34) и (35), имеем

$$|\Delta_{nm}(b_0, b)| \geq (2\pi b)^{-1/2} \tilde{C}_0 e^{\sqrt{\lambda_{nm}} b}.$$

Из этого неравенства при всех $n > n_0$ и $m > m_0$ следует справедливость оценки (26). □

Лемма 2. *Для функций (10) справедливы следующие оценки*

$$|X_n(x)| \leq b_1,\ \ |X_n'(x)| \leq b_2 n,\ \ |X_n''(x)| \leq b_3 n^2, \tag{36}$$

где $b_j,\ j = \overline{1,3}-$ *положительные постоянные.*

Справедливость оценки (36) легко следует из свойства тригонометрических функций.

Лемма 3. *Если* $\gamma \in (0, 1/2)$, *то относительно функций* $Z_m(z)$, *определенных равенствами* (11), *при* $z \in [0, c]$ *и достаточно больших* m *справедливы следующие оценки:*

$$|Z_m(z)| \leq b_4 z^{1-2\gamma} (\sigma_{\gamma m})^{1/2-\gamma}, \tag{37}$$

$$\left| z^{2\gamma} Z'_m(z) \right| \leq b_5 (\sigma_{\gamma m})^{1/2}, \tag{38}$$

$$\left| B^z_{\gamma-1/2} Z_m(z) \right| \leq b_6 z^{1-2\gamma} (\sigma_{\gamma m})^{5/2-\gamma}, \tag{39}$$

где b_j, $j = \overline{4, 6}-$ *положительные постоянные.*

Доказательство. Функцию $Z_m(z)$ перепишем в виде

$$Z_m(z) = \frac{(2c)^{\gamma-1/2}}{\Gamma(3/2-\gamma)} z^{1-2\gamma} (\sigma_{\gamma m})^{1/2-\gamma} \bar{J}_{1/2-\gamma}(\sigma_{\gamma m} z/c), \tag{40}$$

где $\bar{J}_\nu(z) -$ функция Бесселя-Клиффорда [33]:

$$\bar{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu+1) (z/2)^{-\nu} J_\nu(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^j}{(\nu+1)_j \, j!}.$$

Функция $\bar{J}_\nu(z)$ четная и бесконечно дифференцируема. Кроме того, справедливо равенство $\bar{J}_\nu(0) = 1$ и неравенство $\left|\bar{J}_\nu(z)\right| \leq 1$ при $\nu > -1/2$. Учитывая это и $1/2 - \gamma > 0$, из равенства (40), получим оценку (37).

Теперь, рассмотрим функцию $z^{2\gamma} Z'_m(z) = \frac{\sigma_{\gamma m}}{c} z^{1/2+\gamma} J_{-1/2-\gamma}(\sigma_{\gamma m} z/c)$. Тогда эту функцию перепишем в виде

$$z^{2\gamma} Z'_m(z) = (\sigma_{\gamma m}/c)^{1/2-\gamma} \xi^{1/2+\gamma} J_{-1/2-\gamma}(\xi), \tag{41}$$

где $\xi = \sigma_{\gamma m} z/c$. Функция $\xi^{1/2+\gamma} J_{-1/2-\gamma}(\xi)$ в точке $\xi = 0$ ограничена и при $\xi \in [0, +\infty)$ непрерывна. Кроме того, в силу асимптотической формулы (32) справедлива оценка $\left|\xi^{1/2+\gamma} J_{-1/2-\gamma}(\xi)\right| < \xi^\gamma \tilde{b}_5$, где $\tilde{b}_5 = const > 0$. Если учесть эти свойства функции $\xi^{1/2+\gamma} J_{-1/2-\gamma}(\xi)$, то из (41) следует, что для достаточно больших ξ справедливо неравенство

$$\left| z^{2\gamma} Z'_m(z) \right| \leq \tilde{b}_5 (\sigma_{\gamma m}/c)^{1/2-\gamma} \xi^\gamma = \tilde{b}_5 (\sigma_{\gamma m}/c)^{1/2} z^\gamma \leq b_5 (\sigma_{\gamma m})^{1/2},$$

т.е. справедлива оценка из (38).

Известно, что функция $Z_m(z)$ удовлетворяет уравнению из (8). Отсюда следует, что $B^z_{\gamma-1/2} Z_m(z) = -(\sigma_{\gamma m}/c)^2 Z_m(z)$. Тогда, в силу оценки (37), справедлива оценка (39). □

Лемма 4. *Для достаточно больших* $m \in N$, *справедлива оценка*

$$J^2_{3/2-\gamma}(\sigma_{\gamma m}) \geq b_7 (\sigma_{\gamma m})^{-1}, \tag{42}$$

где b_7- *положительные постоянные.*

Доказательство. Так как $\sigma_{\gamma m},\ m \in N-$ нули функции $J_{1/2-\gamma}(z)$, то справедливо равенство $\int\limits_0^c zJ^2_{1/2-\gamma}(\sigma_{\gamma m}z/c)\,dz = c^2 J^2_{3/2-\gamma}(\sigma_{\gamma m})/2$. Из последнего следует, что

$$J^2_{3/2-\gamma}(\sigma_{\gamma m}) = \frac{2}{c^2}\int\limits_0^c zJ^2_{1/2-\gamma}\left(\frac{\sigma_{\gamma m}z}{c}\right)dz = \frac{2}{\sigma^2_{\gamma m}}\int\limits_0^{\sigma_{\gamma m}} \xi J^2_{1/2-\gamma}(\xi)\,d\xi. \quad (43)$$

В силу асимптотической формулы (32) существует некоторое достаточно большое число $c_0 > 0$, такое, что при $\xi > c_0$ справедливо равенство $\xi J^2_{1/2-\gamma}(\xi) \approx \frac{2}{\pi}\sin^2\left(\xi + \frac{\gamma\pi}{2}\right)$. Тогда, если предположить, что $\sigma_{\gamma m}$ достаточно большое число и $\sigma_{\gamma m} > 2(c_0+1)$, то

$$\int\limits_0^{\sigma_{\gamma m}} \xi J^2_{1/2-\gamma}(\xi)\,d\xi > \int\limits_{c_0}^{\sigma_{\gamma m}} \xi J^2_{1/2-\gamma}(\xi)\,d\xi \approx \frac{2}{\pi}\int\limits_{c_0}^{\sigma_{\gamma m}} \sin^2\left(\xi + \frac{\gamma\pi}{2}\right)d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sigma_{\gamma m} - \frac{1}{\pi}\left[c_0 + \cos(\sigma_{\gamma m} + c_0 + \gamma\pi)\sin(\sigma_{\gamma m} - c_0)\right] \geq \frac{1}{2\pi}\sigma_{\gamma m}.$$

Если учесть это, то из (43), следует оценка (42). □

В силу результата этой леммы, коэффициенты d_m, оцениваются в следующем виде

$$|d_m| \leq b_8\sigma_{\gamma m}, \quad (44)$$

где $b_8 = const > 0$.

Лемма 5. *Пусть $f(x) \in C^3[0,a]$ и $f'(0) = f''(0) = 0$. Тогда*

$$\lim_{x\to 0} x\frac{d}{dx}B^x_{\alpha-1/2}f(x) = 0.$$

Доказательство. Нетрудно проверить справедливость равенства

$$x\frac{d}{dx}B^x_{\alpha-1/2}f(x) = xf'''(x) + 2\alpha f''(x) - \frac{2\alpha}{x}f'(x).$$

В силу условия леммы 5 и правила Лопиталя, из последнего равенства следует, что

$$\lim_{x\to 0} x\frac{d}{dx}B^x_{\alpha-1/2}f(x) = \lim_{x\to 0}\left\{xf'''(x) + 2\alpha\left[f''(x) - \frac{f'(x)}{x}\right]\right\} = 0.$$

□

Лемма 6. *Пусть $f(x) \in C^{2k}[0,a], k = \overline{1,2}$ и все производные функции $f(x)$ до порядка $2k$ включительно, обращаются в нуль при $x = 0$ и $x = a$. Тогда имеют место равенства $\lim\limits_{x\to 0}\left[B^x_{\alpha-1/2}\right]^k f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a}\left[B^x_{\alpha-1/2}\right]^k f(x) = 0$, где $\left[B^x_{\alpha-1/2}\right]^{s+1} = B^x_{\alpha-1/2}\left[B^x_{\alpha-1/2}\right]^s$, $k = \overline{1,2}$.*

Доказательство. При $k=1$ и $k=2$, функция $\left[B_{\alpha-1/2}^{x}\right]^{k} f\left(x\right)$ запишется соответственно в виде $B_{\alpha-1/2}^{x} f\left(x\right)=f''\left(x\right)+\frac{2\alpha}{x}f'\left(x\right)$ и

$$\left[B_{\alpha-1/2}^{x}\right]^{2} f\left(x\right)=f^{(4)}\left(x\right)+\frac{4\alpha}{x}f'''\left(x\right)+\frac{4\alpha^2-4\alpha}{x^2}f''\left(x\right)-\frac{4\alpha^2-4\alpha}{x^3}f'\left(x\right).$$

Отсюда, принимая во внимание условия леммы 6 и применяя правило Лопиталя, имеем $\lim\limits_{x\to 0}\left[B_{\alpha-1/2}^{x}\right]^{2} f\left(x\right)=0.$

При $x\to a$ оператор Бесселя не имеет особенности. Поэтому, в силу условий леммы 6, следует $\lim\limits_{x\to a}\left[B_{\alpha-1/2}^{x}\right]^{2} f\left(x\right)=0.$ □

Лемма 7. *Если $\beta,\gamma\in(0,1/2)$ и функции $\tau_1\left(x,z\right),\ \tau_2\left(x,z\right)$ удовлетворяют условиям*

I. $\tau_l\left(x,z\right)\in C_{x,z}^{4,5}\left(\bar{\Pi}\right),\ l=\overline{1,2},$ где $\Pi=\left\{(x,z):\ x\in(0,a),\ z\in(0,c)\right\};$

II. $\left(\partial^j/\partial x^j\right)\tau_l\left(x,z\right)\big|_{x=0}=\left(\partial^j/\partial x^j\right)\tau_l\left(x,z\right)\big|_{x=a},\ l=\overline{1,2},\ j=\overline{0,3};$

III. $\left(\partial^j/\partial z^j\right)\tau_l\left(x,z\right)\big|_{z=0}=0,\quad \left(\partial^j/\partial z^j\right)\tau_l\left(x,z\right)\big|_{z=c}=0,\ l=\overline{1,2},\ j=\overline{0,4},$ то для коэффициентов $\tau_{jnm},\ j=\overline{1,2},$ определенных равенствами (21), справедлива следующая оценка:

$$|\tau_{jnm}|\leq b_9 n^{-4}(\sigma_{\gamma m})^{-4,5},\ \ b_9=const>0. \tag{45}$$

Доказательство. Коэффициенты $\tau_{lnm},\ l=\overline{1,2},$ определенные равенствами (21), можно переписать в виде

$$\tau_{lnm}=\int\limits_0^c z^{1/2+\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\sigma_{\gamma m}z/c\right)T_{ln}\left(z\right)dz,\ \ l=\overline{1,2},\ \ n+1,m\in N, \tag{46}$$

где $T_{l0}\left(z\right)=\int\limits_0^a\tau_l\left(x,z\right)X_0\left(x\right)dx$, $T_{l,2n-1}\left(z\right)=\int\limits_0^a\tau_l\left(x,z\right)X_{2n-1}\left(x\right)dx$,

$T_{l,2n}\left(z\right)=\int\limits_0^a\tau_l\left(x,z\right)X_{2n}\left(x\right)dx,\ \ n\in N,$ а функции $X_0\left(x\right),\ X_{2n-1}\left(x\right)$ и $X_{2n}\left(x\right)$ определяются формулой (10).

Сначала рассмотрим функцию $T_{ln}\left(z\right).$ Применяя правило интегрирования по частям четыре раза к интегралам $T_{l,2n-1}\left(z\right)$ и $T_{l,2n}\left(z\right)$, имеем

$$T_{l,2n-1}\left(z\right)=\sqrt{\frac{2}{a}}\left\{-\left(\frac{a}{2\pi n}\right)\tau_l\left(x,z\right)\cos\frac{2\pi nx}{a}\Big|_{x=0}^{x=a}+\right.$$

$$+\left(\frac{a}{2\pi n}\right)^2\tau_{lx}\left(x,z\right)\sin\frac{2\pi nx}{a}\Big|_{x=0}^{x=a}+\left(\frac{a}{2\pi n}\right)^3\tau_{lxx}\left(x,z\right)\cos\frac{2\pi nx}{a}\Big|_{x=0}^{x=a}-$$

$$\left.-\left(\frac{a}{2\pi n}\right)^4\tau_{lxxx}\left(x,z\right)\sin\frac{2\pi nx}{a}\Big|_{x=0}^{x=a}\right\}+\left(\frac{a}{2\pi n}\right)^4\int\limits_0^a\tau_{lxxxx}\left(x,z\right)X_{2n-1}\left(x\right)dx,$$

Из этих равенств, принимая во внимание часть II условий леммы 7, получим

$$T_{ln}\left(z\right)=\frac{a^{4}}{(2\pi n)^{4}}\int\limits_{0}^{a}\tau_{lxxxx}\left(x,z\right)X_{n}\left(x\right)dx,\ n\in N. \tag{47}$$

Отсюда, на основании условий леммы 7, $\tau_{lxxxx}\in C\left(\bar{\Pi}\right)$. Принимая во внимание это и $X_{n}\left(x\right)\in C\left[0,a\right]$, заключаем, что интеграл в (47) существует и $T_{ln}\left(z\right)\in C\left[0,c\right]$.

Теперь рассмотрим коэффициент τ_{lnm}, определяемый равенством (46). Аналогично предыдущему, применяя правило интегрирования по частям пять раз к интегралу в (46), получим

$$\begin{gathered}\tau_{lnm}=d_{nm}\left[-\left(c/\sigma_{\gamma m}\right)z^{1/2+\gamma}J_{-1/2-\gamma}\left(\sigma_{\gamma m}z/c\right)T_{ln}\left(z\right)\Big|_{z=0}^{z=c}+\right.\\ +\left(c/\sigma_{\gamma m}\right)^{2}z^{1/2+\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\sigma_{\gamma m}z/c\right)T_{lnz}\left(z\right)\Big|_{z=0}^{z=c}+\\ +\left(c/\sigma_{\gamma m}\right)^{3}z^{1/2+\gamma}J_{-1/2-\gamma}\left(\sigma_{\gamma m}z/c\right)B_{\gamma-1/2}^{z}T_{ln}\left(z\right)\Big|_{z=0}^{z=c}-\\ -\left(c/\sigma_{\gamma m}\right)^{4}z^{1/2+\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\sigma_{\gamma m}z/c\right)\frac{\partial}{\partial z}B_{\gamma-1/2}^{z}T_{ln}\left(z\right)\Big|_{z=0}^{z=c}-\\ -\left(c/\sigma_{\gamma m}\right)^{5}z^{1/2+\gamma}J_{-1/2-\gamma}\left(\sigma_{\gamma m}z/c\right)\left[B_{\gamma-1/2}^{z}\right]^{2}T_{ln}\left(z\right)\Big|_{z=0}^{z=c}+\\ \left.+\left(c/\sigma_{\gamma m}\right)^{6}\int\limits_{0}^{c}z^{2\gamma}Z_{m}'\left(z\right)\frac{\partial}{\partial z}\left[B_{\gamma-1/2}^{z}\right]^{2}T_{ln}\left(z\right)dz\right].\end{gathered} \tag{48}$$

Так как интеграл в (47) сходится равномерно по z, то все производные и операторы, действующие по z к функциям $T_{ln}\left(z\right)$, переходят к функциям $\tau_{l}\left(x,z\right)$. Тогда в силу $z^{1/2+\gamma}J_{-1/2-\gamma}\left(\sigma_{\gamma m}z/c\right)\in C\left[0,c\right]$, $J_{1/2-\gamma}\left(\sigma_{\gamma m}\right)=0$ и часть II условий леммы 7, а также утверждения лемм 5, 6 внеинтегральные слагаемые в (48) равны нулю, следовательно,

$$\tau_{lnm}=d_{m}\left(c/\sigma_{\gamma m}\right)^{6}\int\limits_{0}^{c}z^{2\gamma}Z_{m}'\left(z\right)\frac{\partial}{\partial z}\left[B_{\gamma-1/2}^{z}\right]^{2}T_{ln}\left(z\right)dz.$$

Отсюда, учитывая (47), имеем

$$\tau_{lnm}=\frac{d_{m}a^{4}c^{6}}{(2\pi n)^{4}\sigma_{\gamma m}^{6}}\int\limits_{0}^{c}\int\limits_{0}^{a}X_{n}\left(x\right)z^{2\gamma}Z_{m}'\left(z\right)\frac{\partial^{5}}{\partial z\partial x^{4}}\left[B_{\gamma-1/2}^{z}\right]^{2}\tau_{l}\left(x,z\right)dxdz. \tag{49}$$

В силу условия леммы 7, справедливо $\tau_{lxxxx}\left(x,z\right)\in C\left(\bar{\Pi}\right)$, $\frac{\partial}{\partial z}\left[B_{\gamma-1/2}^{z}\right]^{2}\tau_{l}\left(x,z\right)\in C\left(\bar{\Pi}\right)$. Тогда $\frac{\partial^{5}}{\partial z\partial x^{4}}\left[B_{\gamma-1/2}^{z}\right]^{2}\tau_{l}\left(x,z\right)\in C\left(\bar{\Pi}\right)$.

Учитывая это и $X_n(x)\, z^{2\gamma} Z'_m(z) \in C\left(\bar{\Pi}\right)$, заключаем, что подынтегральная функция непрерывна в $\bar{\Pi}$, а повторный интеграл в (49) существует.

Принимая во внимание оценку (44) и оценки (36) и (38), из (49), получим оценки (45). □

Теперь найдем оценки для функции $\omega_{nm}(y)$, определяемые равенствами (24). Для удобства перепишем её в виде

$$\omega_{nm}(y) = \begin{cases} P^1_{nm}(y)\,\tau_{2nm} + P^2_{nm}(y)\,\tau_{1nm}, & y \in [0, b]\,; \\ P^3_{nm}(y)\,\tau_{1nm} + P^4_{nm}(y)\,\tau_{2nm}, & y \in [-b_0, 0]\,, \end{cases} \tag{50}$$

где τ_{1nm} и τ_{2nm} определяются равенствами (21),

$$P^1_{nm}(y) = \frac{y^{1/2-\beta}\Delta_{nm}(b_0, y)}{b^{1/2-\beta}\Delta_{nm}(b_0, b)},\ \ P^2_{nm}(y) = \frac{y^{1/2-\beta}A_{nm}(y, b)}{b_0^{1/2-\beta}\Delta_{nm}(b_0, b)},$$

$$P^3_{nm}(y) = \frac{(-y)^{1/2-\beta}\,\Delta_{nm}(-y, b)}{b_0^{1/2-\beta}\Delta_{nm}(b_0, b)},\ P^4_{nm}(y) = \frac{(-y)^{1/2-\beta}\,B_{nm}(b_0, -y)}{b^{1/2-\beta}\Delta_{nm}(b_0, b)}.$$

Лемма 8. *Если выполнена оценка (26) при $n > n_0$ и $m > m_0$, тогда для таких n и m справедливы следующие оценки:*

$$\left|P^j_{nm}(y)\right| \le b_{10},\ y \in [0, b]\,,\ \left|B^y_{\beta-1/2}P^j_{nm}(y)\right| \le b_{10}\lambda_{nm},\ y \in (0, b)\,, \tag{51}$$

$$\left|P^k_{nm}(y)\right| \le b_{11}, y \in [-b_0, 0]\,, \left|B^y_{\beta-1/2}P^k_{nm}(y)\right| \le b_{11}\lambda_{nm}, y \in (-b_0, 0)\,, \tag{52}$$

где $j = \overline{1, 2}$, $k = \overline{3, 4}$, а $b_{10}, b_{11} = const > 0$.

Доказательство. Сначала рассмотрим функцию $P^1_{nm}(y)$ и ее перепишем в другом виде

$$P^1_{nm}(y) = \frac{y^{1-2\beta}b_0^{\beta-1/2}\bar{I}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)\bar{J}_{\beta-1/2}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b_0\right)}{(1-2\beta)\,b^{1/2-\beta}\Delta_{nm}(b_0, b)} +$$

$$+\frac{b_0^{1/2-\beta}\bar{I}_{\beta-1/2}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)\bar{J}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b_0\right)}{(1-2\beta)\,b^{1/2-\beta}\Delta_{nm}(b_0, b)},$$

где $\bar{J}_\nu(z)$, $\bar{I}_\nu(z)$ – функции Бесселя-Клиффорда [33] и для них справедливы неравенства $\left|\bar{J}_\nu(z)\right| \le 1$ и $\left|\bar{I}_\nu(z)\right| \le e^z$, $z > 0$ при $\nu > -1/2$. В силу этих неравенств и оценок (26), вытекает первая оценка из (51) при $j = 1$.

Непосредственные вычисления показывают, что функция $P^1_{nm}(y)$ при $y \in (0, b)$ удовлетворяет уравнению (7). Тогда, справедливо равенство $B^y_{\beta-1/2}P^1_{nm}(y) = \lambda_{nm}P^1_{nm}(y)$. Отсюда, в силу первой оценки (51) при $j = 1$, следует справедливость второй оценки из (51) при $j = 1$.

Аналогично, доказываются оценки для функции $P^j_{nm}(y)$, $j = \overline{2, 4}$. □

В силу результатов леммы 7 и 8, функция (50) оценивается в виде

$$|\omega_{nm}(y)| \leq b_{12} n^{-4} (\sigma_{\gamma m})^{-4,5}, \quad \left| B^y_{\beta-1/2} \omega_{nm}(y) \right| \leq b_{13} n^{-2} (\sigma_{\gamma m})^{-2,5}. \quad (53)$$

Если выполнены условия $\Delta_{nm}(b_0, b) \neq 0$ и оценка (26), то на основании частных решений (10), (11) и (50) решение задачи A можно представить в виде

$$u(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{nm}(y) X_n(x) Z_m(z). \quad (54)$$

Согласно оценкам (36), (37)-(39), (53) и приблизительному равенству (30), ряды (54), u_x, $z^{2\gamma}u_z$ по абсолютной величине оцениваются соответственно следующими произведениями числовых рядов

$$b_{14} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-4-\gamma}, \; b_{15} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-4-\gamma}, \; b_{16} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-4}, \quad (55)$$

а ряды u_{xx}, $B^y_{\beta-1/2}u$ и $B^z_{\gamma-1/2}u-$ соответственно следующими произведениями числовых рядов

$$b_{17} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-4-\gamma}, \, b_{18} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2-\gamma}, \, b_{19} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2-\gamma}, \quad (56)$$

где $b_j, \; j = \overline{14, 19}-$ положительные постоянные.

Так как каждые множители в произведениях в (55) и (56) сходятся, то ряд (54) и ряды u_x, $z^{2\gamma}u_z$ сходятся абсолютно и равномерно в $\bar{\Omega}$, а ряды $B^x_{\alpha-1/2}u$, $B^y_{\beta-1/2}u$ и $B^z_{\gamma-1/2}u$ сходятся на каждом компакте $K \subset \Omega_+ \cup \Omega_-$. Поэтому функция $u(x,y,z)$, определенная рядом (54), удовлетворяет всем условиям задачи A.

Пусть $\Delta_{lk}(b_0, b) = 0$ для некоторых b_0 и $l = s_1, s_2, ..., s_n$, $k = t_1, t_2, ...t_m$, s_i, t_j, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $n, m-$ заданные натуральные числа. Тогда для разрешимости системы (22) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{1lk} b^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{lk}} b\right) + \tau_{2lk} b_0^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{lk}} b_0\right) = 0, \\ \tau_{1lk} b^{1/2-\beta} I_{\beta-1/2}\left(\sqrt{\lambda_{lk}} b\right) - \tau_{2lk} b_0^{1/2-\beta} J_{\beta-1/2}\left(\sqrt{\lambda_{lk}} b_0\right) = 0, \end{array} \right. \quad (57)$$

$$l = s_1, s_2, ..., s_n, \; k = t_1, t_2, ..., t_m.$$

В этом случае, решение задачи A определяется в виде суммы ряда

$$u(x,y,z) = \left[\sum_{n=1}^{s_1-1} \left(\sum_{m=1}^{t_1-1} + \sum_{m=t_1+1}^{t_2-1} + ... + \sum_{m=t_i+1}^{\infty} \right) + \right.$$

$$\sum_{n=s_1+1}^{s_2-1} \left(\sum_{m=1}^{t_1-1} + \sum_{m=t_1+1}^{t_2-1} + ... + \sum_{m=t_i+1}^{\infty} \right) + ...$$

$$+\sum_{n=s_j+1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{t_1-1}+\sum_{m=t_1+1}^{t_2-1}+...+\sum_{m=t_i+1}^{\infty}\right)\Bigg] X_n\left(x\right)\omega_{nm}\left(y\right)Z_m\left(z\right)+$$

$$+\sum_{l}\sum_{k}C_{lk}u_{lk}\left(x,y,z\right) \qquad (58)$$

Здесь в последней сумме l принимает значения s_1, s_2, ..., s_j, а k принимает значения t_1, t_2, ... , t_i, $C_{lk}-$ произвольные постоянные, $u_{lk}\left(x,y,z\right)$ – определяются по формуле (25).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть функции $\tau_j\left(x,z\right)$, $j=\overline{1,2}$ удовлетворяют условиям леммы 7 и выполнена оценка (26) при $n>n_0,\ m>m_0$. Тогда*

1) если $\Delta_{nm}\left(b_0,b\right)\neq 0$ при всех $n=1,2,...,n_0,\ m=1,2,...,m_0$, то существует единственное решение задачи A и это решение определяется рядом (54);

2) если $\Delta_{nm}\left(b_0,b\right)=0$ при некоторых $n=s_1,\ s_2,\ ...,\ s_j\leq n_0$, $m=t_1,\ t_2,\ ...\ ,\ t_i\leq m_0$ и выполняются условия (57), то задача A определяется рядом (58).

Этим завершено исследование задачи A.

References

[1] A.A.Dezin, *Operators involving a first derivative with respect to time and nonlocal boundary conditions*, Mathematics of the USSR-Izvestiya, **1** (1967), 57–79.

[2] J.I. Diaz, J.M. Rakotoson, *On a nonlocal stationary free-boundary problem arising in the confinement of a plasma in a Stellarator geometry*, Arch. Rational Mech. Anal, **134**, (1996), 53–95.

[3] E. Obolashvili, *Nonlocal problems for some partial differential equations*, Applicable Analysis, **45**, (1992), 269–280.

[4] C.V. Pao, *Dynamics of reaction-diffusion equations with nonlocal boundary conditions*, Quarterly of Applied Mathematics, **53**, (1995), 173–186.

[5] C.V. Pao, *Reaction Diffusion Equations with Nonlocal Boundary and Nonlocal Initial Conditions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **195**, (1995), 702–718.

[6] A.M. Nakhushev, *Equations of Mathematical Biology*, Visshaya shkola, Moscow, 1995.

[7] F.I. Frankl, *Flow around profiles by a subsonic flow with a supersonic zone ending in a normal shock wave*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, **2**, (1956), 196–202.

[8] N.I. Ionkin, *The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition*, Differtial equations, **13**, (1977), 294–304.

[9] N.I. Ionkin, *The stability of a problem in the theory of heat conduction with nonclassical boundary conditions*, Differtial equations, **15**, (1979), 1279–1283.

[10] N.I. Ionkin, E.I. Moiseev, *A problem for a heat equation with two-point boundary conditions*, Differential equations, **15**, (1979), 1284–1295.

[11] M.E. Lerner, O.A. Repin, *On Frankl'-type problems for some elliptic equations with degeneration of various types*, Differential equations, **35**, (1999), 1087–1093.

[12] M.E. Lerner, O.A. Repin, *Nonlocal Boundary Value Problems in a Vertical Half-Strip for a Generalized Axisymmetric Helmholtz Equation*, Differential equations, **37**, (2001), 1640–1642.

[13] E.I. Moiseev, *On the solution of a nonlocal boundary value problem by the spectral method*, Differential equations, **35**, (1999), 1094–1100.

[14] E.I. Moiseev, *Solvability of a Nonlocal Boundary Value Problem*, Differential Equations **37**, (2001), 1643–1646.

[15] Y.K. Sabitova, *Nonlocal initial-boundary-value problems for a degenerate hyperbolic equation*, Russian Mathematics, **53**, (2009), 41–49.

[16] A.A. Abashkin, *On a weighted boundary-value problem in an infinite half-strip for a biaxisymmetric Helmholtz equation*, Russian Mathematics, **57**, (2013), 1–9.

[17] A.M. Nakhushev, *Problems with displacement for partial differential equations*, Nauka, Moscow, 2006.

[18] Z.A. Nakhusheva, *Nonlocal boundary value problems for basic and mixed types of differential equations*, Publ. KBNC RAS, Nalchik, 2011.

[19] Z.A. Nakhusheva, *On a nonlocal problem of A. A. Dezin for the Lavrent'ev-Bitsadze equation*, Differential equations, **45**, (2009), 1223–1228.

[20] A.V. Pskhu, , Differential equations, **36**, (2000), 474–476.

[21] K.B. Sabitov, *Dezin Problem for an Equation of the Mixed Type with a Power-Law Degeneracy*, Differential equations, **55**, (2019), 1384–1389.

[22] K.B. Sabitov, V.A. Novikova, *Nonlocal Dezin's problem for Lavrent'ev–Bitsadze equation*, Russian Mathematics **60**, (2016), 52–62.

[23] K.T. Karimov, *A nonlocal problem with integral condition for a three-dimensional elliptic equation with singular coefficients*, Bulletin of the Institute of Mathematics, **6**, (2018), 10–24.

[24] K.T. Karimov, *Nonlocal Problem for an Elliptic Equation with Singular Coefficients in a Semi-infinite Parallelepiped*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **41**, (2020), 46–57.

[25] K.T. Karimov, *Nonlocal Problem for a Three-dimensional Elliptic Equation with Singular Coefficients in a Rectangular Parallelepiped*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, **13**, (2020), 533–546.

[26] A.K. Urinov, K.T. Karimov, *Nonlocal boundary value problems for a three-dimensional elliptic equation with singular coefficients in a semi-infinite parallelepiped*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **17**, (2020), 161–178.

[27] G.P. Tolstov, *Fourier Series*, Mir Publishers, Moscow, 1962.

[28] K.T. Karimov, *Boundary Value Problems in a Semi-infinite Parallelepiped for an Elliptic Equation with Three Singular Coefficients*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **42**, (2021), 560–571.

[29] G. N.Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1944.

[30] I.A. Kipriyanov, *Singular elliptic boundary value problems*, Nauka, Moscow, 1997.

[31] V.I. Arnol'd, *Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics*, Russian Mathematical Surveys, **6**, (1963), 85–191.

[32] N.N. Lebedev, *Special functions and their applications*, Dover Publications, New York, 1972.

[33] M.B. Kapilevich, *On an equation of mixed elliptic-hyperbolic type*, Matematicheskii Sbornik, **30**, (1952), 11–38.

Kamoliddin Tuychiboevich Karimov
Fergana State University,
Murabbiylar 19,
150100, Fergana, Uzbekistan,
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
E-mail address: karimovk80@mail.ru

Dilfuza Sobirjonovna Olimova
Fergana Military Academic Lyceum,
Guliston street 7,
150100, Fergana, Uzbekistan
E-mail address: olimova.76@bk.ru