

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИРКУЛЯЦИИ ЧАСТИЦ НА ГРАФЕ НА ОСНОВЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ И ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ МОДЕЛЕЙ

В.А. Топчий , Н.В. Перцев , К.К. Логинов 

Представлено М.А. Шишлениным

Abstract: A non-Markov stochastic model describing particle circulation on a two-vertex graph with two unidirectional edges is considered. Based on the analytical results and computational experiments, it is shown that the mathematical expectations of the number of particles at the vertices of the graph are described by a system of two linear differential equations with a constant delay.

Keywords: particle circulation on a graph, non-Markov random process, mathematical expectations, delay differential equations, Monte Carlo method.

1 Введение

Настоящая статья продолжает изучение стохастической модели динамики популяции частиц, распределенной на графе [1]. В [1] установлено,

ТОПЧИЙ, V.A., PERTSEV, N.V., LOGINOV, K.K., NUMERICAL SIMULATION OF PARTICLE CIRCULATION ON A GRAPH BASED ON STOCHASTIC AND DETERMINISTIC MODELS.

© 2026 Топчий В.А., Перцев Н.В., Логинов К.К..

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2026-0033.

Поступила 25 марта 2025 г., опубликована 19 марта 2026 г.

что численность популяции частиц на элементах графа имеет пуассоновское распределение с математическими ожиданиями, сходящимися при $t \rightarrow +\infty$ к стационарным значениям, явно вычисляемым через параметры модели (вещественная переменная t означает время). Для получения типичных реализаций переменных модели в [1] разработан вычислительный алгоритм, опирающийся на метод Монте-Карло. Результаты вычислительных экспериментов из [1] демонстрируют переходной процесс в численности популяции частиц на конечных промежутках времени и переход к указанному стационарному распределению численности на длительных промежутках моделирования.

При детерминированном описании циркуляции частиц на графе в [2] используется система линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, содержащая те же самые параметры, что и стохастическая модель. Установлено [2], что решение этой системы дифференциальных уравнений с произвольным неотрицательным начальным условием сходится при $t \rightarrow +\infty$ к стационарным значениям, совпадающим с аналогичными значениями из стохастической модели.

Возникает предположение о том, что при выборе определенных начальных данных система линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием описывает динамику математических ожиданий переменных в стохастической модели. Исследованию этого предположения на основе ряда вычислительных экспериментов посвящена настоящая работа.

2 Описание стохастической модели

2.1. Предположения и схема модели. Рассмотрим некоторую популяцию частиц, эволюционирующую на графе с двумя вершинами V_1 , V_2 и двумя однонаправленными ребрами R_{12} , R_{21} . Частицы изучаемой популяции проводят основное время своей жизнедеятельности в вершинах V_1 , V_2 . Ребра R_{12} , R_{21} интерпретируются как различные пути, по которым частицы перемещаются соответственно из V_1 в V_2 и из V_2 в V_1 (однонаправленные перемещения). Длительности перемещения частиц по ребрам R_{12} , R_{21} задаются константами. Новые частицы изучаемой популяции поступают из внешних источников S_1 , S_2 . Частицы изучаемой популяции могут погибать или превращаться в частицы других популяций, не рассматриваемых в модели.

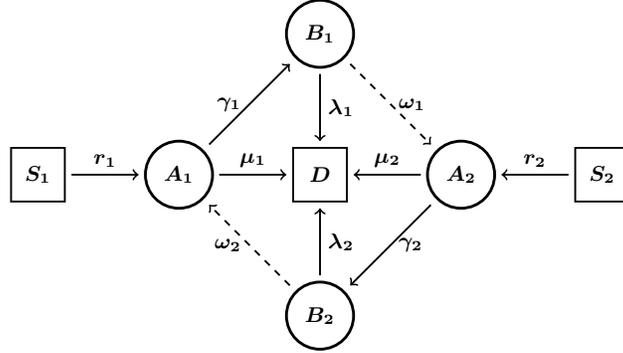
Эволюция изучаемой популяции начинается в момент времени $t = 0$, причем при $t = 0$ частицы в популяции отсутствуют. С момента появления каждой из частиц ее поведение не зависит от поведения других частиц, присутствующих в популяции одновременно с ней. Обозначим:

A_1 , A_2 – частица, находящаяся в вершине V_1 , V_2 ;

B_1 , B_2 – частица, находящаяся на ребре R_{12} , R_{21} ;

D – все погибшие частицы или частицы других популяций, в которые превратились частицы A_1 , A_2 , B_1 , B_2 .

Схема поступления, переходов, гибели и превращений частиц в графической форме и символической записи имеет следующий вид:



$$S_1 \xrightarrow{r_1} S_1 + A_1, \quad (1)$$

$$A_1 \xrightarrow{\mu_1} D, \quad A_1 \xrightarrow{\gamma_1} B_1, \quad (2)$$

$$B_1 \xrightarrow{\lambda_1} D, \quad B_1|_{t_{B_1}} \longrightarrow A_2|_{t_{B_1} + \omega_1}, \quad (3)$$

$$S_2 \xrightarrow{r_2} S_2 + A_2, \quad (4)$$

$$A_2 \xrightarrow{\mu_2} D, \quad A_2 \xrightarrow{\gamma_2} B_2, \quad (5)$$

$$B_2 \xrightarrow{\lambda_2} D, \quad B_2|_{t_{B_2}} \longrightarrow A_1|_{t_{B_2} + \omega_2}. \quad (6)$$

В соотношениях (1) и (4) используются фиктивные частицы, находящиеся в S_1, S_2 . Для фиксированного $j = 1, 2$ и $r_j > 0$ время до поступления из S_j очередной частицы A_j имеет экспоненциальное распределение с параметром r_j . Если $r_j = 0$, то частицы A_j из источника S_j не поступают. Полагаем, что $r_1 + r_2 > 0$.

В соотношениях (2) и (5) для фиксированного $i = 1, 2$ принято, что время пребывания частицы A_i в вершине V_i определяется минимумом из двух независимых случайных величин. Первая величина означает время до превращения частицы A_i в частицу D и имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu_i > 0$. Вторая величина означает время до превращения частицы A_i в частицу B_i , то есть – время до перехода частицы A_i из вершины V_i на ребро R_{ij} , $j = 1, 2$, $j \neq i$, и имеет экспоненциальное распределение с параметром $\gamma_i > 0$.

В соотношениях (3) и (6) для фиксированных $i, j = 1, 2$, $j \neq i$, величина $t_{B_i} > 0$ означает момент появления частицы B_i на ребре R_{ij} (момент осуществления перехода частицы A_i из вершины V_i на ребро R_{ij}). Возникшая частица B_i имеет экспоненциально распределенное время жизни с параметром $\lambda_i > 0$, не зависящее от t_{B_i} , и срезаемое на уровне $\omega_i > 0$. Константа ω_i означает длительность перемещения частицы B_i по ребру R_{ij} . Если частица B_i не превратится в частицу D за промежуток времени $(t_{B_i}, t_{B_i} + \omega_i)$, то в момент времени $t_{B_i} + \omega_i$ она превратится в частицу A_j (поступит в вершину V_j , вероятность этого события равна

$\exp(-\lambda_i \omega_i)$). В противном случае (с вероятностью $1 - \exp(-\lambda_i \omega_i)$) частица B_i превратится в частицу D и не поступит в вершину V_j .

Принимаем, что случайные величины, указанные в (1)–(6), взаимно независимы, случайные величины, используемые в (1), (4), (2), (5), не зависят от величин t_{B_1} , t_{B_2} , приведенных в (3), (6).

2.2. Эволюция одной частицы. Для более детального описания схемы (1)–(6) рассмотрим процесс появления и перемещения по графу одной, отдельно взятой частицы изучаемой популяции.

Положим $t = 0$. Примем, что в момент времени $t := t + \varphi_1$ в одной из вершин графа появилась первая частица популяции, где $\varphi_1 \sim \text{Exp}(r_1 + r_2)$, частица появляется в вершине V_1 с вероятностью $r_1/(r_1 + r_2)$ – частица A_1 , в вершине V_2 с вероятностью $r_2/(r_1 + r_2)$ – частица A_2 .

Без ограничения общности примем, что $r_1 > 0$, и в указанный момент времени t в вершине V_1 появилась частица A_1 . Частица A_1 находится в вершине V_1 время $\xi_1 \sim \text{Exp}(\mu_1 + \gamma_1)$. В момент времени $t := t + \xi_1$ частица A_1 покидает V_1 , и с вероятностью $\mu_1/(\mu_1 + \gamma_1)$ превращается в частицу D , с вероятностью $\gamma_1/(\mu_1 + \gamma_1)$ превращается в частицу B_1 , причем t_{B_1} , указанный в (3), таков, что $t_{B_1} = t$. Если частица A_1 превратилась в частицу D , то процесс завершается.

Пусть в момент времени $t = t_{B_1}$ частица A_1 превратилась в частицу B_1 (поступила на ребро R_{12}). Положим $\psi_1 = \min\{\omega_1, \eta_1\}$, $\eta_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$, $t := t + \psi_1$. Если $\psi_1 = \eta_1$, то в момент времени t частица B_1 покидает R_{12} и превращается в частицу D , процесс завершается. Если $\psi_1 = \omega_1$, то в момент времени t частица B_1 превращается в частицу A_2 (поступает в вершину V_2).

Появившаяся в момент времени t частица A_2 находится в вершине V_2 время $\xi_2 \sim \text{Exp}(\mu_2 + \gamma_2)$. В момент времени $t := t + \xi_2$ частица A_2 покидает V_2 , и с вероятностью $\mu_2/(\mu_2 + \gamma_2)$ превращается в частицу D , с вероятностью $\gamma_2/(\mu_2 + \gamma_2)$ превращается в частицу B_2 , причем t_{B_2} , указанный в (6), таков, что $t_{B_2} = t$. Если частица A_2 превратилась в частицу D , то процесс завершается.

Пусть в момент времени $t = t_{B_2}$ частица A_2 превратилась в частицу B_2 (поступила на ребро R_{21}). Положим $\psi_2 = \min\{\omega_2, \eta_2\}$, $\eta_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$, $t := t + \psi_2$. Если $\psi_2 = \eta_2$, то в момент времени t частица B_2 покидает R_{21} и превращается в частицу D , процесс завершается. Если $\psi_2 = \omega_2$, то в момент времени t частица B_2 превращается в частицу A_1 (поступает в вершину V_1).

Процесс, описывающий эволюцию отдельно взятой частицы, далее повторяется.

Для всей популяции в целом следует учитывать поступление новых (очередных) частиц из источников S_1 , S_2 и рассматривать последовательно эволюцию каждой из частиц с учетом моментов времени их поступления в вершины V_1 и V_2 .

3 Рекуррентные соотношения для переменных модели и алгоритм моделирования

Динамику популяции опишем с помощью случайного процесса

$$H(t) = (X(t), Y(t), \Omega(t)), \quad t \in [0, T_{mod}], \quad (7)$$

$$X(t) = (X_{A_1}(t), X_{B_1}(t), X_{A_2}(t), X_{B_2}(t), X_D(t)), \quad (8)$$

$$Y(t) = (Y_{B_1}(t), Y_{B_2}(t)), \quad \Omega(t) = (\Omega_{B_1}(t), \Omega_{B_2}(t)), \quad (9)$$

где $[0, T_{mod}]$ – промежуток моделирования. Пусть $t \in [0, T_{mod}]$ – фиксированный момент времени. При $t > 0$ компоненты $X(t)$ в (8) означают соответственно количество частиц, находящихся в момент времени t в вершине V_1 , на ребре R_{12} , в вершине V_2 и на ребре R_{21} . Здесь и далее под B_1, B_2 будем понимать частицы, которые поступили из вершин V_1, V_2 на ребра R_{12}, R_{21} и не превратились в частицы D за время своего пребывания на соответствующем ребре. Как отмечено в разделе 2.1, вероятности превращения в частицы D частиц, поступивших на ребра R_{12}, R_{21} , равны $1 - \exp(-\lambda_1\omega_1)$, $1 - \exp(-\lambda_2\omega_2)$, а вероятности их дожития до конца перехода по ребрам R_{12}, R_{21} равны $\exp(-\lambda_1\omega_1)$, $\exp(-\lambda_2\omega_2)$. Компонента $X_D(t)$ является вспомогательной и задает количество всех частиц, превратившихся в частицы D за промежуток времени $[0, t]$. Полагаем, что $X(0) = (0, 0, 0, 0, 0)$.

Заметим, что общее количество частиц, поступивших из внешних источников S_1, S_2 в вершины V_1, V_2 за промежуток времени $t \in [0, T_{mod}]$, имеет распределение Пуассона с параметром $(r_1 + r_2)T_{mod}$.

Зафиксируем $j, i = 1, 2, i \neq j$. Обратимся к компонентам $Y(t)$, указанным в (9). Полагаем, что при $t > 0$ целочисленная случайная переменная $Y_{B_j}(t)$ означает количество частиц A_j , поступивших из вершины V_j на ребро R_{ji} и превратившихся в частицы B_j за промежуток времени $[0, t]$. Принимаем, что $Y_{B_j}(0) = 0$ и $Y(0) = (0, 0)$.

При $t \geq 0$ под $\Omega_{B_j}(t)$ из (9) будем понимать семейство уникальных типов частиц B_j , которое содержит информацию о частицах, поступивших из вершины V_j на ребро R_{ji} (с учетом дожития поступивших частиц до конца их перехода по ребру R_{ji} и превращения в частицы A_i). Поскольку $Y_{B_1}(0) = 0, Y_{B_2}(0) = 0$, то полагаем $\Omega_{B_1}(0) = \emptyset, \Omega_{B_2}(0) = \emptyset$. Далее полагаем, что

$$\Omega_{B_j}(t) = \emptyset, \quad \text{если } Y_{B_j}(t) = 0, \quad (10)$$

$$\Omega_{B_j}(t) = \left\{ (t_{B_j}(k), \omega_j), 1 \leq k \leq Y_{B_j}(t) \right\}, \quad \text{если } Y_{B_j}(t) \geq 1. \quad (11)$$

В (11) индекс k означает порядковый номер очередной поступившей на ребро R_{ji} частицы $B_j = B_j(k)$, $t_{B_j}(k) \leq t$ – момент появления частицы $B_j(k)$ на ребре R_{ji} , ω_j – длительность пребывания частицы $B_j(k)$ на ребре R_{ji} до превращения в частицу A_i . Элемент $(t_{B_j}(k), \omega_j)$ из (11) определяет уникальный тип частицы $B_j(k)$, $1 \leq k \leq Y_{B_j}(t)$, и отражает момент времени $t_{B_j}(k) + \omega_j$, когда частица завершает свое пребывание на

ребре R_{ji} и превращается в частицу A_i . Каждая частица, возникающая из частицы A_j , переходящей из вершины V_j на ребро R_{ji} , представлена в (11) с вероятностью $\exp(-\lambda_j \omega_j)$, т.е. при условии, что поступившая на ребро R_{ji} частица не превратится в частицу D за промежуток времени $(t_{B_j}(k), t_{B_j}(k) + \omega_j)$.

Отметим, что для фиксированного $t \in (0, T_{mod}]$ элементы $\Omega_{B_j}(t) \neq \emptyset$ таковы, что

$$t_{B_j}(1) + \omega_j < t_{B_j}(2) + \omega_j < \dots < t_{B_j}(k) + \omega_j < \dots < t_{B_j}(Y_{B_j}(t)) + \omega_j. \quad (12)$$

Кроме того, переменная $X_{B_j}(t)$ отлична от нуля, если в (12) существуют элементы $(t_{B_j}(k), \omega_j)$, для которых $t_{B_j}(k) + \omega_j > t$.

Выборочные функции процесса $H(t)$ на промежутке времени $[0, T_{mod}]$ зададим с помощью последовательности пар

$$(t_m, H(t_m)), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad t_m \leq T_{mod}, \quad (13)$$

где $t_0 = 0$ – начальный момент времени, компоненты $H(t_0)$ таковы, что

$$\begin{aligned} X(t_0) &= (0, 0, 0, 0, 0), & Y(t_0) &= (0, 0), \\ \Omega(t_0) &= (\Omega_{B_1}(t_0), \Omega_{B_2}(t_0)) = (\emptyset, \emptyset). \end{aligned} \quad (14)$$

Рекуррентные соотношения для пар (13) с учетом (14) имеют вид

$$t_{m+1} = \min \{T_{mod}, \psi_{B_1}^{(m)}, \psi_{B_2}^{(m)}, t_m + \tau_m\}, \quad (15)$$

$$H(t_{m+1}) = H(t_m) + \Delta(H(t_m)). \quad (16)$$

В (15) используются величины $\psi_{B_1}^{(m)}, \psi_{B_2}^{(m)}, t_m + \tau_m$, задающие ближайшие к t_m справа моменты скачкообразного изменения компонент $H(t_m)$. В (16) символ $\Delta(H(t_m))$ отражает приращения компонент $H(t_m)$, а именно: приращения текущей численности частиц $X(t_m), Y(t_m)$ и пополнение семейств $\Omega_{B_1}(t_m), \Omega_{B_2}(t_m)$. Конкретные выражения для (15), (16) детально описаны в [1] и учитывают структуру используемых семейств (10), (11) (более подробно см. [1], стр. 224, соотношения (3.1), (3.2)).

Для проведения вычислительных экспериментов применяется алгоритм, описанный в [1] (стр. 224), а именно – первый (упрощенный) вариант алгоритма, используемый для модели, в которой основное внимание уделяется динамике переменных $X_{A_1}(t), X_{A_2}(t)$.

Генерация возникающих случайных величин осуществляется с использованием формул и датчиков псевдослучайных чисел из работ [3]–[5].

4 Аналитические результаты для стохастической модели

Обозначим

$$\Delta = (\mu_1 + \gamma_1)(\mu_2 + \gamma_2) - \gamma_1 \gamma_2 e^{-\lambda_1 \omega_1} e^{-\lambda_2 \omega_2} > 0.$$

В работе [1] установлен следующий результат: численность частиц в вершинах графа имеет пуассоновское распределение со средними, сходящимися при $t \rightarrow +\infty$ к

$$\mathbf{E}X_{A_1}(\infty) = (r_1(\mu_2 + \gamma_2) + r_2\gamma_2e^{-\lambda_2\omega_2})\Delta^{-1}, \quad (17)$$

$$\mathbf{E}X_{A_2}(\infty) = (r_2(\mu_1 + \gamma_1) + r_1\gamma_1e^{-\lambda_1\omega_1})\Delta^{-1}. \quad (18)$$

5 Аналитические результаты для детерминированной модели

Следуя [2], рассмотрим детерминированный аналог построенной выше стохастической модели в форме системы линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = r_1 - (\mu_1 + \gamma_1)x_1(t) + e^{-\lambda_2\omega_2}\gamma_2x_2(t - \omega_2), \quad (19)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = r_2 - (\mu_2 + \gamma_2)x_2(t) + e^{-\lambda_1\omega_1}\gamma_1x_1(t - \omega_1), \quad (20)$$

при $t \geq 0$, дополненной нулевыми начальными данными

$$x_1(t) = 0, \quad t \in [-\omega_1, 0], \quad x_2(t) = 0, \quad t \in [-\omega_2, 0]. \quad (21)$$

При $t = 0$ производные переменных $x_1(t)$, $x_2(t)$ понимаются как их правосторонние производные. Параметры r_1 , r_2 задают скорости притоков частиц из внешних источников S_1 , S_2 в вершины V_1 , V_2 . Параметры μ_1 , μ_2 , λ_1 , λ_2 – интенсивности превращения частиц, находящихся в вершинах V_1 , V_2 и на ребрах R_{12} , R_{21} , в частицы D . Параметры γ_1 , γ_2 – интенсивности перехода частиц из вершин V_1 , V_2 на ребра R_{12} , R_{21} . Запаздывания ω_1 , ω_2 отражают длительности перемещения частиц по ребрам R_{12} , R_{21} . Множители $\exp(-\lambda_1\omega_1)$, $\exp(-\lambda_2\omega_2)$ означают доли частиц, не превратившихся в частицы D за время перемещения между вершинами по ребрам R_{12} , R_{21} . Константы $1/r_i$, $1/\mu_i$, $1/\lambda_i$, $1/\gamma_i$, $i = 1, 2$, соответствуют математическим ожиданиям случайных величин, использованных при описании схемы модели (1)–(6).

Система (19), (20) имеет единственное положение равновесия (стационарное решение) $x_1(t) = x_1^{(*)}$, $x_2(t) = x_2^{(*)}$, где $x_1^{(*)}$, $x_2^{(*)}$ задаются соответственно выражениями (17), (18). Кроме того, для любых неотрицательных (не только нулевых в (21)) начальных данных существуют

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = x_1^{(*)}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = x_2^{(*)}. \quad (22)$$

Соотношения (17), (18), (22) приводят к предположению о том, что система (19), (20) с начальными данными (21) описывает динамику математических ожиданий $\mathbf{E}X_{A_1}(t)$, $\mathbf{E}X_{A_2}(t)$ для всех $t \geq 0$.

6 Вычислительные эксперименты

Для проверки предположения относительно поведения решений системы (19), (20) с начальными данными (21) и динамики математических ожиданий $\mathbf{E}X_{A_1}(t)$, $\mathbf{E}X_{A_2}(t)$ используется серия вычислительных экспериментов. Вычисления проводятся для трех наборов параметров, которые отражают близкие или различные значения: а) скоростей поступления частиц из внешнего источника, б) интенсивностей переходов частиц между вершинами и ребрами, в) длительностей пребывания частиц на ребрах графа, г) стационарных уровней (17), (18). Другими словами, вычисления предполагают относительно широкую вариацию параметров, влияющих на динамику переменных изучаемых моделей, включая различные темпы переходных процессов и выхода в окрестности стационарных уровней (17), (18), (22).

Сопоставим результаты численного решения задачи (19), (20), (21) с интервальными оценками $\mathbf{E}X_{A_1}(t)$, $\mathbf{E}X_{A_2}(t)$ на промежутке $t \in [0, T_{mod}]$. Интервальные оценки для математических ожиданий $\mathbf{E}X_{A_1}(t)$, $\mathbf{E}X_{A_2}(t)$ находятся по выборке из $n = 1000$ реализаций случайного процесса $H(t)$ на уровне доверия $P = 0.99$ по стандартным формулам для выборок большого объема [6].

Для численного решения задачи (19), (20), (21) применим следующий подход. Систему (19), (20) заменим разностными уравнениями, построенными с помощью неявной и явной схемы Эйлера, полагая, что шаг интегрирования h кратен запаздываниям ω_1 , ω_2 . Обозначим $t_j = jh$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$, где $nh = T_{mod}$. Для каждого из (19), (20) используем по два разностных уравнения, а именно

$$\begin{aligned} \frac{x_1^{(1)}(t_{j+1}) - x_1^{(1)}(t_j)}{h} &= r_1 - (\mu_1 + \gamma_1)x_1^{(1)}(t_{j+1}) + e^{-\lambda_2\omega_2}\gamma_2x_2^{(1)}(t_j - \omega_2), \\ \frac{x_1^{(2)}(t_{j+1}) - x_1^{(2)}(t_j)}{h} &= r_1 - (\mu_1 + \gamma_1)x_1^{(2)}(t_j) + e^{-\lambda_2\omega_2}\gamma_2x_2^{(2)}(t_j - \omega_2), \\ \frac{x_2^{(1)}(t_{j+1}) - x_2^{(1)}(t_j)}{h} &= r_2 - (\mu_2 + \gamma_2)x_2^{(1)}(t_{j+1}) + e^{-\lambda_1\omega_1}\gamma_1x_1^{(1)}(t_j - \omega_1), \\ \frac{x_2^{(2)}(t_{j+1}) - x_2^{(2)}(t_j)}{h} &= r_2 - (\mu_2 + \gamma_2)x_2^{(2)}(t_j) + e^{-\lambda_1\omega_1}\gamma_1x_1^{(2)}(t_j - \omega_1), \end{aligned}$$

дополненных в соответствии с (21) нулевыми начальными значениями. В качестве искомого численного решения задачи (19), (20), (21) возьмем сеточные функции

$$x_1^{(h)}(t_j) = \frac{x_1^{(1)}(t_j) + x_1^{(2)}(t_j)}{2}, \quad x_2^{(h)}(t_j) = \frac{x_2^{(1)}(t_j) + x_2^{(2)}(t_j)}{2}.$$

В каждом из экспериментов предварительно были проведены вычисления, в которых использованы шаги интегрирования $2h$, $1.5h$, h , $h/2$, $h/4$, где $h = 0.00025$ (сутки). В процессе предварительных вычислений оценивался модуль разницы численных решений между собой, а также

модуль разницы численных решений и стационарных решений $x_1^{(*)}, x_2^{(*)}$, указанных в (22). В итоге был выбран шаг $h = 0.000125$ (сутки), при котором: 1) отклонения $x_1^{(h)}(T_{mod})$ от $x_1^{(*)}, x_2^{(h)}(T_{mod})$ от $x_2^{(*)}$ проявлялись не более, чем в третьем десятичном знаке, 2) отклонения численных решений при выбранном h и шаге интегрирования $h/2$ проявлялись не более, чем в третьем десятичном знаке на всем промежутке моделирования.

Ниже представлены результаты трех вычислительных экспериментов. Размерность каждого из параметров модели отмечена в скобках соответствующей строки. Стационарные значения (17), (18), (22), равно как и числовые значения всех переменных указаны с округлением до трех десятичных знаков. Результаты вычислений для каждой из моделей приведены в табличной форме (использовано несколько точек по времени).

Первый эксперимент: $T_{mod} = 300$ суток,

$$\begin{aligned} r_1 = 9, r_2 = 8, \mu_1 = 0.1, \mu_2 = 0.05 \quad (\text{сутки}^{-1}), \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0.01, \gamma_1 = 5, \gamma_2 = 7 \quad (\text{сутки}^{-1}), \\ \omega_1 = 0.249, \omega_2 = 0.332 \quad (\text{сутки}), \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}X_{A_1}(\infty) = x_1^{(*)} = 103.013, \mathbf{E}X_{A_2}(\infty) = x_2^{(*)} = 74.012.$$

Таблица 1. Интервальные оценки математических ожиданий $\mathbf{E}X_{A_1}(t), \mathbf{E}X_{A_2}(t)$ ($P = 0.99$) и численное решение задачи (19)–(21) для эксперимента 1

t , сутки	$\mathbf{E}X_{A_1}(t)$	$x_1^{(h)}(t)$	$\mathbf{E}X_{A_2}(t)$	$x_2^{(h)}(t)$
0	0	0	0	0
0.5	2.048 ± 0.117	2.038	1.683 ± 0.107	1.651
1	3.939 ± 0.160	3.878	2.907 ± 0.135	2.862
2	7.243 ± 0.216	7.318	5.377 ± 0.189	5.362
10	31.116 ± 0.442	31.015	22.358 ± 0.369	22.362
50	85.965 ± 0.771	85.657	61.506 ± 0.646	61.561
100	99.493 ± 0.818	100.081	71.971 ± 0.662	71.910
150	102.771 ± 0.821	102.518	73.746 ± 0.692	73.657
200	102.326 ± 0.836	102.929	73.538 ± 0.690	73.952
250	102.667 ± 0.862	102.998	73.784 ± 0.709	74.002
300	102.870 ± 0.818	103.011	73.411 ± 0.704	74.010

Второй эксперимент: $T_{mod} = 150$ суток,

$$\begin{aligned} r_1 = 120, r_2 = 50, \mu_1 = 0.25, \mu_2 = 0.15 \quad (\text{сутки}^{-1}), \\ \lambda_1 = 0.01, \lambda_2 = 0.2, \gamma_1 = 10, \gamma_2 = 2 \quad (\text{сутки}^{-1}), \\ \omega_1 = 0.5, \omega_2 = 1.8 \quad (\text{сутки}), \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}X_{A_1}(\infty) = x_1^{(*)} = 40.199, \mathbf{E}X_{A_2}(\infty) = x_2^{(*)} = 209.297.$$

Таблица 2. Интервальные оценки математических ожиданий $\mathbf{E}X_{A_1}(t), \mathbf{E}X_{A_2}(t)$ ($P = 0.99$) и численное решение задачи (19)–(21) для эксперимента 2

t , сутки	$\mathbf{E}X_{A_1}(t)$	$x_1^{(h)}(t)$	$\mathbf{E}X_{A_2}(t)$	$x_2^{(h)}(t)$
0	0	0	0	0
0.5	11.668 ± 0.285	11.638	15.233 ± 0.328	15.319
1	11.701 ± 0.273	11.707	51.266 ± 0.602	51.407
2	12.415 ± 0.279	12.375	74.592 ± 0.706	74.395
10	32.902 ± 0.468	32.959	171.615 ± 1.063	171.226
30	39.743 ± 0.516	39.909	207.839 ± 1.139	207.727
50	39.760 ± 0.524	40.188	209.131 ± 1.171	209.233
70	40.499 ± 0.516	40.199	210.364 ± 1.230	209.294
100	39.925 ± 0.512	40.199	209.575 ± 1.257	209.297
120	40.093 ± 0.503	40.199	209.692 ± 1.193	209.297
150	40.136 ± 0.508	40.199	208.989 ± 1.187	209.297

Третий эксперимент: $T_{mod} = 250$ суток,

$$r_1 = 25, r_2 = 75, \mu_1 = 0.075, \mu_2 = 0.045 \quad (\text{сутки}^{-1}),$$

$$\lambda_1 = 0.082, \lambda_2 = 0.075, \gamma_1 = 2.5, \gamma_2 = 0.2 \quad (\text{сутки}^{-1}),$$

$$\omega_1 = 4.8, \omega_2 = 0.5 \quad (\text{сутки}),$$

$$\mathbf{E}X_{A_1}(\infty) = x_1^{(*)} = 67.237, \mathbf{E}X_{A_2}(\infty) = x_2^{(*)} = 768.973.$$

Таблица 3. Интервальные оценки математических ожиданий $\mathbf{E}X_{A_1}(t)$, $\mathbf{E}X_{A_2}(t)$ ($P = 0.99$) и численное решение задачи (19)–(21) для эксперимента 3

t , сутки	$\mathbf{E}X_{A_1}(t)$	$x_1^{(h)}(t)$	$\mathbf{E}X_{A_2}(t)$	$x_2^{(h)}(t)$
0	0	0	0	0
0.5	7.067 ± 0.215	7.029	35.392 ± 0.489	35.294
1	10.227 ± 0.259	10.144	66.595 ± 0.675	66.519
2	14.912 ± 0.318	15.078	118.711 ± 0.901	118.584
10	35.737 ± 0.491	35.642	371.489 ± 1.537	370.806
30	58.466 ± 0.621	58.384	658.168 ± 2.046	657.191
50	64.734 ± 0.654	64.760	737.354 ± 2.162	737.697
100	67.221 ± 0.668	67.134	767.778 ± 2.179	767.678
150	67.280 ± 0.654	67.232	770.102 ± 2.278	768.920
200	67.411 ± 0.675	67.236	768.601 ± 2.267	768.971
250	66.887 ± 0.682	67.237	768.690 ± 2.271	768.973

Результаты вычислительных экспериментов подтверждают предположение о том, что динамика математических ожиданий $\mathbf{E}X_{A_1}(t)$, $\mathbf{E}X_{A_2}(t)$ рассмотренной стохастической модели описывается с помощью системы линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Можно предположить, что приведенный результат распространяется и на модель циркуляции частиц по графу, содержащему более двух вершин и однонаправленные ребра.

References

- [1] N.V. Pertsev, V.A. Topchii, K.K. Loginov, *Numerical stochastic modeling of a spatially heterogeneous population*, Sib. Zh. Vychisl. Mat., **27**:2 (2024), 217–232. Zbl 1545.92087

- [2] N.V. Pertsev, *Application of differential equations with variable delay in the compartmental models of living systems*, J. Appl. Ind. Math., **15**:3 (2021), 466–482. Zbl 1511.92085
- [3] M.A. Marchenko, G.A. Mikhailov, *Parallel realization of statistical simulation and random number generators*, Russ. J. Numer. Anal. Math. Model., **17**:1 (2002), 113–124. Zbl 0999.65001
- [4] M. Marchenko, *PARMONC – a software library for massively parallel stochastic simulation*, In Malyshkin, V. (eds), *Parallel Computing Technologies. PaCT 2011*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2011, 302–316.
- [5] G.A. Mikhailov, A.V. Voitishchek, *Numerical statistical simulation. Monte-Carlo methods*, Akademia, Moscow, 2006.
- [6] H. Cramer, *Mathematical methods Of statistics*, Mir, Moscow, 1975. (1946, Zbl 0063.01014)

VALENTIN ALEKSEEVICH TOPCHII
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
PR. KOPTYUGA, 4,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: topchij@gmail.com

NIKOLAI VIKTIROVICH PERTSEV
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
PR. KOPTYUGA, 4,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: homlab@ya.ru

KONSTANTIN KONSTANTINOVICH LOGINOV
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
PR. KOPTYUGA, 4,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: kloginov85@mail.ru