

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИРКУЛЯЦИИ  
ЧАСТИЦ НА ГРАФЕ НА ОСНОВЕ  
СТОХАСТИЧЕСКОЙ И ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ  
МОДЕЛЕЙ

В.А. Топчий  Н.В. ПЕРЦЕВ  К.К. ЛОГИНОВ 

*Представлено П.П. ПЕТРОВЫМ*

**Abstract:** A non-Markov stochastic model describing particle circulation on a two-vertex graph with two unidirectional edges is considered. Based on the analytical results and computational experiments, it is shown that the mathematical expectations of the number of particles at the vertices of the graph are described by a system of two linear differential equations with a constant delay.

Рассмотрена немарковская стохастическая модель, описывающая циркуляцию частиц на двухвершинном графе с двумя однонаправленными ребрами. На основе аналитических результатов и вычислительных экспериментов показано, что математические ожидания количества частиц в вершинах графа описываются системой двух линейных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием.

**Keywords:** particle circulation on a graph, non-Markov random process, mathematical expectations, delay differential equations, Monte Carlo method.

---

ТОПЧИЙ, В.А., ПЕРЦЕВ, Н.В., ЛОГИНОВ, К.К., NUMERICAL SIMULATION OF PARTICLE CIRCULATION ON A GRAPH BASED ON STOCHASTIC AND DETERMINISTIC MODELS.

© 2023 Топчий В.А., Перцев Н.В., Логинов К.К..

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект FWNF-2022-0003.

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

циркуляция частиц на графе, немарковский случайный процесс, математические ожидания, дифференциальные уравнения с запаздыванием, метод Монте-Карло.

## 1 Введение

Настоящая статья продолжает изучение стохастической модели динамики популяции частиц, распределенной на графе [1]. В [1] установлено, что численность популяции частиц на элементах графа имеет пуассоновское распределение с математическими ожиданиями, сходящимися при  $t \rightarrow +\infty$  к стационарным значениям, явно вычисляемым через параметры модели (вещественная переменная  $t$  означает время). Для получения типичных реализаций переменных модели в [1] разработан вычислительный алгоритм, опирающийся на метод Монте-Карло. Результаты вычислительных экспериментов из [1] демонстрируют переходной процесс в численности популяции частиц на конечных промежутках времени и переход к указанному стационарному распределению численности на длительных промежутках моделирования.

При детерминированном описании циркуляции частиц на графе в [2] используется система линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, содержащая те же самые параметры, что и стохастическая модель. Установлено [2], что решение этой системы дифференциальных уравнений с произвольным неотрицательным начальным условием сходится при  $t \rightarrow +\infty$  к стационарным значениям, совпадающим с аналогичными значениями из стохастической модели.

Возникает предположение о том, что при выборе определенных начальных данных система линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием описывает динамику математических ожиданий переменных в стохастической модели. Исследованию этого предположения на основе ряда вычислительных экспериментов посвящена настоящая работа.

## 2 Описание стохастической модели

**2.1. Предположения и схема модели.** Рассмотрим некоторую популяцию частиц, эволюционирующую на графе с двумя вершинами  $V_1$ ,  $V_2$  и двумя однонаправленными ребрами  $R_{12}$ ,  $R_{21}$ . Частицы изучаемой популяции проводят основное время своей жизнедеятельности в вершинах  $V_1$ ,  $V_2$ . Ребра  $R_{12}$ ,  $R_{21}$  интерпретируются как различные пути, по которым частицы перемещаются соответственно из  $V_1$  в  $V_2$  и из  $V_2$  в  $V_1$  (однаправленные перемещения). Длительности перемещения частиц по ребрам  $R_{12}$ ,  $R_{21}$  задаются константами. Новые частицы изучаемой популяции поступают из внешнего источника  $G$ . Частицы изучаемой популяции могут погибать или превращаться в частицы других популяций, не рассматриваемых в модели.

Эволюция изучаемой популяции начинается в момент времени  $t = 0$ , причем при  $t = 0$  частицы в популяции отсутствуют. С момента появления каждой из частиц ее поведение не зависит от поведения других частиц, присутствующих в популяции одновременно с ней. Обозначим:  $A_1, A_2$  – частица, находящаяся в вершине  $V_1, V_2$ ;  $B_1, B_2$  – частица, находящаяся на ребре  $R_{12}, R_{21}$ ;  $D$  – все погибшие частицы или частицы других популяций, в которые превратились частицы  $A_1, A_2, B_1, B_2$ .

Схема поступления, переходов, гибели и превращений частиц в символической записи имеет следующий вид:

$$G \xrightarrow{r_1} G + A_1, \quad (1)$$

$$A_1 \xrightarrow{\mu_1} D, \quad A_1 \xrightarrow{\gamma_1} B_1, \quad (2)$$

$$B_1 \xrightarrow{\lambda_1} D, \quad B_1|_{t_{B_1}} \longrightarrow A_2|_{t_{B_1} + \omega_1}, \quad (3)$$

$$G \xrightarrow{r_2} G + A_2, \quad (4)$$

$$A_2 \xrightarrow{\mu_2} D, \quad A_2 \xrightarrow{\gamma_2} B_2, \quad (5)$$

$$B_2 \xrightarrow{\lambda_2} D, \quad B_2|_{t_{B_2}} \longrightarrow A_1|_{t_{B_2} + \omega_2}. \quad (6)$$

В соотношениях (1) и (4) используются фиктивные частицы, находящиеся в  $G$ . Для фиксированного  $j = 1, 2$  и  $r_j > 0$  время до поступления из  $G$  очередной частицы  $A_j$  имеет экспоненциальное распределение с параметром  $r_j$ . Если  $r_j = 0$ , то частицы  $A_j$  из источника  $G$  не поступают. Полагаем, что  $r_1 + r_2 > 0$ .

В соотношениях (2) и (5) для фиксированного  $i = 1, 2$  принято, что время пребывания частицы  $A_i$  в вершине  $V_i$  определяется минимумом из двух независимых случайных величин. Первая величина означает время до превращения частицы  $A_i$  в частицу  $D$  и имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\mu_i > 0$ . Вторая величина означает время до превращения частицы  $A_i$  в частицу  $B_i$ , то есть – время до перехода частицы  $A_i$  из вершины  $V_i$  на ребро  $R_{ij}$ ,  $j = 1, 2, j \neq i$ , и имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\gamma_i > 0$ .

В соотношениях (3) и (6) для фиксированных  $i, j = 1, 2, j \neq i$ , величина  $t_{B_i} > 0$  означает момент появления частицы  $B_i$  на ребре  $R_{ij}$  (момент осуществления перехода частицы  $A_i$  из вершины  $V_i$  на ребро  $R_{ij}$ ). Возникшая частица  $B_i$  имеет экспоненциально распределенное время жизни с параметром  $\lambda_i > 0$ , не зависящее от  $t_{B_i}$ , и срезаемое на уровне  $\omega_i > 0$ . Константа  $\omega_i$  означает длительность перемещения частицы  $B_i$  по ребру  $R_{ij}$ . Если частица  $B_i$  не превратится в частицу  $D$  за промежуток времени  $(t_{B_i}, t_{B_i} + \omega_i)$ , то в момент времени  $t_{B_i} + \omega_i$  она превратится в частицу  $A_j$  (поступит в вершину  $V_j$ , вероятность этого события равна  $\exp(-\lambda_i \omega_i)$ ).

Принимаем, что случайные величины, указанные в (1)–(6), взаимно независимы, случайные величины, используемые в (1), (4), (2), (5), не зависят от величин  $t_{B_1}$ ,  $t_{B_2}$ , приведенных в (3), (6).

**2.2. Эволюция одной частицы.** Для более детального описания схемы (1)–(6) рассмотрим процесс появления и перемещения по графу одной, отдельно взятой частицы изучаемой популяции.

Положим  $T = 0$ . Примем, что в момент времени  $T := T + \varphi_1$  в одной из вершин графа появилась первая частица популяции, где  $\varphi_1 \sim \text{Exp}(r_1 + r_2)$ , частица появляется в вершине  $V_1$  с вероятностью  $r_1/(r_1 + r_2)$  – частица  $A_1$ , в вершине  $V_2$  с вероятностью  $r_2/(r_1 + r_2)$  – частица  $A_2$ .

Без ограничения общности примем, что  $r_1 > 0$ , и в указанный момент времени  $T$  в вершине  $V_1$  появилась частица  $A_1$ . Частица  $A_1$  находится в вершине  $V_1$  время  $\xi_1 \sim \text{Exp}(\mu_1 + \gamma_1)$ . В момент времени  $T := T + \xi_1$  частица  $A_1$  покидает  $V_1$ , и с вероятностью  $\gamma_1/(\mu_1 + \gamma_1)$  превращается в частицу  $B_1$ , с вероятностью  $\mu_1/(\mu_1 + \gamma_1)$  превращается в частицу  $D$ . Если частица  $A_1$  превратилась в частицу  $D$ , то процесс завершается.

Пусть в момент времени  $T$  частица  $A_1$  превратилась в частицу  $B_1$  (поступила на ребро  $R_{12}$ ). Положим  $\psi_1 = \min\{\omega_1, \eta_1\}$ ,  $\eta_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ ,  $T := T + \psi_1$ . Если  $\psi_1 = \eta_1$ , то в момент времени  $T$  частица  $B_1$  покидает  $R_{12}$  и превращается в частицу  $D$ , процесс завершается. Если  $\psi_1 = \omega_1$ , то в момент времени  $T$  частица  $B_1$  превращается в частицу  $A_2$  (поступает в вершину  $V_2$ ).

Появившаяся в момент времени  $T$  частица  $A_2$  находится в вершине  $V_2$  время  $\xi_2 \sim \text{Exp}(\mu_2 + \gamma_2)$ . В момент времени  $T := T + \xi_2$  частица  $A_2$  покидает  $V_2$ , и с вероятностью  $\gamma_2/(\mu_2 + \gamma_2)$  превращается в частицу  $B_2$ , с вероятностью  $\mu_2/(\mu_2 + \gamma_2)$  превращается в частицу  $D$ . Если частица  $A_2$  превратилась в частицу  $D$ , то процесс завершается.

Пусть в момент времени  $T$  частица  $A_2$  превратилась в частицу  $B_2$  (поступила на ребро  $R_{21}$ ). Положим  $\psi_2 = \min\{\omega_2, \eta_2\}$ ,  $\eta_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ ,  $T := T + \psi_2$ . Если  $\psi_2 = \eta_2$ , то в момент времени  $T$  частица  $B_2$  покидает  $R_{21}$  и превращается в частицу  $D$ , процесс завершается. Если  $\psi_2 = \omega_2$ , то в момент времени  $T$  частица  $B_2$  превращается в частицу  $A_1$  (поступает в вершину  $V_1$ ).

Процесс, описывающий эволюцию отдельно взятой частицы, далее повторяется.

Для всей популяции в целом следует учитывать поступление новых (очередных) частиц из  $G$  и рассматривать последовательно эволюцию каждой из частиц с учетом моментов времени их поступления в вершины  $V_1$  и  $V_2$

### 3 Рекуррентные соотношения для переменных модели и алгоритм моделирования

Динамику популяции опишем с помощью случайного процесса

$$H(t) = (X(t), Y(t), \Omega(t)), \quad t \in [0, T_{mod}], \quad (7)$$

$$X(t) = (X_{A_1}(t), X_{B_1}(t), X_{A_2}(t), X_{B_2}(t), X_D(t)), \quad (8)$$

$$Y(t) = (Y_{B_1}(t), Y_{B_2}(t)), \quad \Omega(t) = (\Omega_{B_1}(t), \Omega_{B_2}(t)), \quad (9)$$

где  $[0, T_{mod}]$  – промежуток моделирования. Пусть  $t \in [0, T_{mod}]$  – фиксированный момент времени. При  $t > 0$  компоненты  $X(t)$  в (8) означают соответственно количество частиц, находящихся в момент времени  $t$  в вершине  $V_1$ , на ребре  $R_{12}$ , в вершине  $V_2$  и на ребре  $R_{21}$ . Компонента  $X_D(t)$  является вспомогательной и задает количество всех частиц, превратившихся в частицы  $D$  за промежуток времени  $[0, t]$ . Полагаем, что  $X(0) = (0, 0, 0, 0, 0)$ . Отметим, что общее количество частиц, поступивших из внешнего источника  $G$  в вершины  $V_1, V_2$  за промежуток времени  $t \in [0, T_{mod}]$ , имеет распределение Пуассона с параметром  $(r_1 + r_2)T_{mod}$ .

Зафиксируем  $j, i = 1, 2, i \neq j$ . Обратимся к компонентам  $Y(t)$ , указанным в (9). Полагаем, что при  $t > 0$  целочисленная случайная переменная  $Y_{B_j}(t)$  означает количество частиц  $A_j$ , поступивших из вершины  $V_j$  на ребро  $R_{ji}$  и превратившихся в частицы  $B_j$  за промежуток времени  $[0, t]$ . Принимаем, что  $Y_{B_j}(0) = 0$  и  $Y(0) = (0, 0)$ .

При  $t \geq 0$  под  $\Omega_{B_j}(t)$  из (2.3) понимается семейство уникальных типов частиц  $B_j$ , которое содержит информацию о частицах, поступивших из вершины  $V_j$  на ребро  $R_{ji}$  и доживающих до их превращения в частицы  $A_i$ . Учитывая, что  $Y_{B_1}(0) = 0, Y_{B_2}(0) = 0$ , полагаем  $\Omega_{B_1}(0) = \emptyset, \Omega_{B_2}(0) = \emptyset$ . Далее полагаем, что

$$\Omega_{B_j}(t) = \emptyset, \quad \text{если } Y_{B_j}(t) = 0, \quad (10)$$

$$\Omega_{B_j}(t) = \left\{ t_{B_j}(k) + \omega_j : t_{B_j}(k) \leq t, 1 \leq k \leq Y_{B_j}(t) \right\}, \quad \text{если } Y_{B_j}(t) \geq 1. \quad (11)$$

Индекс  $k$  в (11) означает порядковый номер очередной, поступившей на ребро  $R_{ji}$  частицы  $B_j = B_j(k)$  с учетом того, частица не превратится в частицу  $D$  за время пребывания на ребре  $R_{ji}$ . Элемент  $t_{B_j}(k) + \omega_j$  из (11) задает уникальный тип частицы  $B_j(k)$ ,  $1 \leq k \leq Y_{B_j}(t)$ . Здесь  $t_{B_j}(k) \leq t$  – момент появления частицы  $B_j(k)$  на ребре  $R_{ji}$ ,  $\omega_j$  – длительность пребывания частицы  $B_j(k)$  на ребре  $R_{ji}$  до превращения в частицу  $A_i$ . Каждая частица  $B_j(k)$  отражается в (11) с вероятностью  $\exp(-\lambda_j \omega_j)$ , т.е. при условии, что частица  $B_j(k)$  не превратится в частицу  $D$  за промежуток времени  $t_{B_j}(k), t_{B_j}(k) + \omega_j$ .

Отметим, что для каждого фиксированного  $t \in (0, T_{mod}]$  элементы  $\Omega_{B_j}(t) \neq \emptyset$  удовлетворяют соотношениям

$$t_{B_j}(1) + \omega_j < t_{B_j}(2) + \omega_j < \dots < t_{B_j}(k) + \omega_j < \dots < t_{B_j}(Y_{B_j}(t)) + \omega_j. \quad (12)$$

Кроме того, переменная  $X_{B_j}(t)$  отлична от нуля, если в (12) существуют элементы  $t_{B_j}(k) + \omega_j$ , такие, что  $t_{B_j}(k) + \omega_j > t$ .

Выборочные функции процесса  $H(t)$  на промежутке времени  $[0, T_{mod}]$  зададим с помощью последовательности пар

$$(t_m, H(t_m)), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad t_m \leq T_{mod}, \quad (13)$$

где  $t_0 = 0$  – начальный момент времени, компоненты  $H(t_0)$  таковы, что

$$\begin{aligned} X(t_0) &= (0, 0, 0, 0, 0), & Y(t_0) &= (0, 0), \\ \Omega(t_0) &= (\Omega_{B_1}(t_0), \Omega_{B_2}(t_0)) = (\emptyset, \emptyset). \end{aligned} \quad (14)$$

Рекуррентные соотношения для пар (13) с учетом (14) имеют вид

$$t_{m+1} = \min \{T_{mod}, \psi_{B_1}^{(m)}, \psi_{B_2}^{(m)}, t_m + \tau_m\}, \quad (15)$$

$$H(t_{m+1}) = H(t_m) + \Delta(H(t_m)). \quad (16)$$

В (15) используются величины  $\psi_{B_1}^{(m)}, \psi_{B_2}^{(m)}, t_m + \tau_m$ , задающие ближайšie к  $t_m$  справа моменты скачкообразного изменения компонент  $H(t_m)$ . В (16) символ  $\Delta(H(t_m))$  отражает приращения компонент  $H(t_m)$ , а именно: приращения текущей численности частиц  $X(t_m), Y(t_m)$  и пополнение семейств  $\Omega_{B_1}(t_m), \Omega_{B_2}(t_m)$ . Конкретные выражения для (15), (16) детально описаны в [1].

Для проведения вычислительных экспериментов с моделью используется первый (упрощенный) вариант алгоритма, представленный в [1]. Для генерации возникающих случайных величин применяются формулы и датчики псевдослучайных чисел, приведенные в [3]–[5].

#### 4 Аналитические результаты для стохастической модели

Обозначим

$$\Delta = (\mu_1 + \gamma_1)(\mu_2 + \gamma_2) - \gamma_1\gamma_2 e^{-\lambda_1\omega_1} e^{-\lambda_2\omega_2} > 0.$$

В работе [1] установлен следующий результат: численность частиц в вершинах графа имеет пуассоновское распределение со средними, сходящимися при  $t \rightarrow +\infty$  к

$$\mathbf{E}X_{A_1}(\infty) = (r_1(\mu_2 + \gamma_2) + r_2\gamma_2 e^{-\lambda_2\omega_2})\Delta^{-1}, \quad (17)$$

$$\mathbf{E}X_{A_2}(\infty) = (r_2(\mu_1 + \gamma_1) + r_1\gamma_1 e^{-\lambda_1\omega_1})\Delta^{-1}. \quad (18)$$

#### 5 Аналитические результаты для детерминированной модели

Следуя [2], рассмотрим детерминированный аналог построенной выше стохастической модели в форме системы линейных дифференциальных

уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = r_1 - (\mu_1 + \gamma_1)x_1(t) + e^{-\lambda_2\omega_2}\gamma_2x_2(t - \omega_2), \quad (19)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = r_2 - (\mu_2 + \gamma_2)x_2(t) + e^{-\lambda_1\omega_1}\gamma_1x_1(t - \omega_1), \quad (20)$$

при  $t \geq 0$ , дополненной нулевыми начальными данными

$$x_1(t) = 0, \quad t \in [-\omega_1, 0], \quad x_2(t) = 0, \quad t \in [-\omega_2, 0]. \quad (21)$$

При  $t = 0$  производные переменных  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  понимаются как их правосторонние производные. Параметры  $r_1$ ,  $r_2$  задают интенсивности притоков частиц из внешнего источника  $G$  в вершины  $V_1$ ,  $V_2$ . Параметры  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  – интенсивности превращения частиц, находящихся в вершинах  $V_1$ ,  $V_2$  и на ребрах  $R_{12}$ ,  $R_{21}$ , в частицы  $D$ . Параметры  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  – интенсивности перехода частиц из вершин  $V_1$ ,  $V_2$  на ребра  $R_{12}$ ,  $R_{21}$ . Запаздывания  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  отражают длительности перемещения частиц по ребрам  $R_{12}$ ,  $R_{21}$ . Множители  $\exp(-\lambda_1\omega_1)$ ,  $\exp(-\lambda_2\omega_2)$  означают доли частиц, не превратившихся в частицы  $D$  за время перемещения между вершинами по ребрам  $R_{12}$ ,  $R_{21}$ . Константы  $1/r_i$ ,  $1/\mu_i$ ,  $1/\lambda_i$ ,  $1/\gamma_i$ ,  $i = 1, 2$ , соответствуют математическим ожиданиям случайных величин, использованных при описании схемы модели (1)–(6).

Система (19), (20) имеет единственное положение равновесия (стационарное решение)  $x_1(t) = x_1^{(*)}$ ,  $x_2(t) = x_2^{(*)}$ , где  $x_1^{(*)}$ ,  $x_2^{(*)}$  задаются соответственно выражениями (17), (18). Кроме того, для любых неотрицательных (не только нулевых в (21)) начальных данных существуют

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = x_1^{(*)}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = x_2^{(*)}. \quad (22)$$

Соотношения (17), (18), (22) приводят к предположению о том, что система (19), (20) с начальными данными (21) описывает динамику математических ожиданий  $\mathbf{E}X_{A_1}(t)$ ,  $\mathbf{E}X_{A_2}(t)$  для всех  $t \geq 0$ .

## 6 Вычислительные эксперименты

Для проверки предположения относительно поведения решений системы (19), (20) с начальными данными (21) и динамики математических ожиданий  $\mathbf{E}X_{A_1}(t)$ ,  $\mathbf{E}X_{A_2}(t)$  используем серию вычислительных экспериментов.

Сопоставим результаты численного решения задачи (19), (20), (21) с интервальными оценками  $\mathbf{E}X_{A_1}(t)$ ,

$\mathbf{E}X_{A_2}(t)$  на промежутке времени  $t \in [0, T_{mod}]$ . Интервальные оценки  $\mathbf{E}X_{A_1}(t)$ ,  $\mathbf{E}X_{A_2}(t)$  построим по выборке из  $n = 1000$  реализаций случайного процесса  $H(t)$  на уровне доверия  $P = 0.99$  по стандартным формулам для выборок большого объема [6].

Для численного решения задачи (19), (20), (21) применим следующий подход. Систему (19), (20) заменим разностными уравнениями, построенными с помощью неявной и явной схемы Эйлера, полагая, что шаг

интегрирования  $h$  кратен запаздываниям  $\omega_1, \omega_2$ . Обозначим  $t_j = jh$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ , где  $nh = T_{mod}$ . Для каждого из (19), (20) используем по два разностных уравнения,

$$\begin{aligned} \frac{x_1^{(1)}(t_{j+1}) - x_1^{(1)}(t_j)}{h} &= r_1 - (\mu_1 + \gamma_1)x_1^{(1)}(t_{j+1}) + e^{-\lambda_2\omega_2}\gamma_2x_2^{(1)}(t_j - \omega_2), \\ \frac{x_1^{(2)}(t_{j+1}) - x_1^{(2)}(t_j)}{h} &= r_1 - (\mu_1 + \gamma_1)x_1^{(2)}(t_j) + e^{-\lambda_2\omega_2}\gamma_2x_2^{(2)}(t_j - \omega_2), \\ \frac{x_2^{(1)}(t_{j+1}) - x_2^{(1)}(t_j)}{h} &= r_2 - (\mu_2 + \gamma_2)x_2^{(1)}(t_{j+1}) + e^{-\lambda_1\omega_1}\gamma_1x_1^{(1)}(t_j - \omega_1), \\ \frac{x_2^{(2)}(t_{j+1}) - x_2^{(2)}(t_j)}{h} &= r_2 - (\mu_2 + \gamma_2)x_2^{(2)}(t_j) + e^{-\lambda_1\omega_1}\gamma_1x_1^{(2)}(t_j - \omega_1), \end{aligned}$$

дополненных нулевыми начальными данными в соответствии с (21). В качестве искомого численного решения задачи (19), (20), (21) возьмем сеточные функции

$$x_1^{(h)}(t_j) = (x_1^{(1)}(t_j) + x_1^{(2)}(t_j))/2, \quad x_2^{(h)}(t_j) = (x_2^{(1)}(t_j) + x_2^{(2)}(t_j))/2.$$

В каждом из вычислительных экспериментов 1–3 шаг интегрирования для системы (19), (20)  $h = 0.00025$  (сутки).

Размерность каждого из параметров модели указана в скобках соответствующей строки. Стационарные значения (17), (18), (22) для вычислительных экспериментов 1–3 приведены с точностью до трех знаков. Результаты вычислений для каждой из моделей представлены в табличной форме (использовано несколько точек по времени).

**Первый эксперимент:**  $T_{mod} = 300$  суток,

$$\begin{aligned} r_1 &= 9, \quad r_2 = 8, \quad \mu_1 = 0.1, \quad \mu_2 = 0.05 \quad (\text{сутки}^{-1}), \\ \lambda_1 &= \lambda_2 = 0.01, \quad \gamma_1 = 5, \quad \gamma_2 = 7 \quad (\text{сутки}^{-1}), \\ \omega_1 &= 0.249, \quad \omega_2 = 0.332 \quad (\text{сутки}), \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}X_{A_1}(\infty) = x_1^{(*)} = 103.013, \quad \mathbf{E}X_{A_2}(\infty) = x_2^{(*)} = 74.012.$$

**Таблица 1.** Интервальные оценки математических ожиданий  $\mathbf{E}X_{A_1}(t)$ ,  $\mathbf{E}X_{A_2}(t)$  ( $P = 0.99$ ) и численное решение задачи (19)–(21) для эксперимента 1

$t$ , сутки	$\mathbf{E}X_{A_1}(t)$	$x_1^{(h)}(t)$	$\mathbf{E}X_{A_2}(t)$	$x_2^{(h)}(t)$
0	0	0	0	0
10	$31.116 \pm 0.442$	31.008	$22.358 \pm 0.369$	22.357
50	$85.965 \pm 0.771$	85.649	$61.506 \pm 0.646$	61.555
100	$99.493 \pm 0.818$	100.078	$71.971 \pm 0.662$	71.907
150	$102.771 \pm 0.821$	102.517	$73.746 \pm 0.692$	73.656
200	$102.326 \pm 0.836$	102.929	$73.538 \pm 0.690$	73.952
250	$102.667 \pm 0.862$	103.001	$73.784 \pm 0.709$	74.002
300	$102.870 \pm 0.818$	103.011	$73.411 \pm 0.704$	74.012

**Второй эксперимент:**  $T_{mod} = 150$  суток,

$$r_1 = 120, r_2 = 50, \mu_1 = 0.25, \mu_2 = 0.15 \quad (\text{сутки}^{-1}),$$

$$\lambda_1 = 0.01, \lambda_2 = 0.2, \gamma_1 = 10, \gamma_2 = 2 \quad (\text{сутки}^{-1}),$$

$$\omega_1 = 0.5, \omega_2 = 1.8 \quad (\text{сутки}),$$

$$\mathbf{E}X_{A_1}(\infty) = x_1^{(*)} = 40.199, \mathbf{E}X_{A_2}(\infty) = x_2^{(*)} = 209.297.$$

**Таблица 2.** Интервальные оценки математических ожиданий  $\mathbf{E}X_{A_1}(t)$ ,  $\mathbf{E}X_{A_2}(t)$  ( $P = 0.99$ ) и численное решение задачи (19)–(21) для эксперимента 2

$t$ , сутки	$\mathbf{E}X_{A_1}(t)$	$x_1^{(h)}(t)$	$\mathbf{E}X_{A_2}(t)$	$x_2^{(h)}(t)$
0	0	0	0	0
10	$32.902 \pm 0.468$	32.959	$171.615 \pm 1.063$	171.220
30	$39.743 \pm 0.516$	39.909	$207.839 \pm 1.139$	207.727
50	$39.760 \pm 0.524$	40.188	$209.131 \pm 1.171$	209.233
70	$40.499 \pm 0.516$	40.199	$210.364 \pm 1.230$	209.294
100	$39.925 \pm 0.512$	40.199	$209.575 \pm 1.257$	209.297
120	$40.093 \pm 0.503$	40.199	$209.692 \pm 1.193$	209.297
150	$40.136 \pm 0.508$	40.199	$208.989 \pm 1.187$	209.297

**Третий эксперимент:**  $T_{mod} = 250$  суток,

$$r_1 = 25, r_2 = 75, \mu_1 = 0.075, \mu_2 = 0.045 \quad (\text{сутки}^{-1}),$$

$$\lambda_1 = 0.082, \lambda_2 = 0.075, \gamma_1 = 2.5, \gamma_2 = 0.2 \quad (\text{сутки}^{-1}),$$

$$\omega_1 = 4.8, \omega_2 = 0.5 \quad (\text{сутки}),$$

$$\mathbf{E}X_{A_1}(\infty) = x_1^{(*)} = 67.237, \mathbf{E}X_{A_2}(\infty) = x_2^{(*)} = 768.973.$$

**Таблица 3.** Интервальные оценки математических ожиданий  $\mathbf{E}X_{A_1}(t)$ ,  $\mathbf{E}X_{A_2}(t)$  ( $P = 0.99$ ) и численное решение задачи (19)–(21) для эксперимента 3

$t$ , сутки	$\mathbf{E}X_{A_1}(t)$	$x_1^{(h)}(t)$	$\mathbf{E}X_{A_2}(t)$	$x_2^{(h)}(t)$
0	0	0	0	0
10	$35.737 \pm 0.491$	35.641	$371.489 \pm 1.537$	370.802
30	$58.466 \pm 0.621$	58.384	$658.168 \pm 2.046$	657.187
50	$64.734 \pm 0.654$	64.760	$737.354 \pm 2.162$	737.695
100	$67.221 \pm 0.668$	67.134	$767.778 \pm 2.179$	767.678
150	$67.280 \pm 0.654$	67.232	$770.102 \pm 2.278$	768.920
200	$67.411 \pm 0.675$	67.236	$768.601 \pm 2.267$	768.971
250	$66.887 \pm 0.682$	67.237	$768.690 \pm 2.271$	768.973

Результаты вычислительных экспериментов подтверждают предположение о том, что динамика математических ожиданий  $\mathbf{E}X_{A_1}(t)$ ,  $\mathbf{E}X_{A_2}(t)$  рассмотренной стохастической модели описывается с помощью системы линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Можно предположить, что приведенный результат распространяется и на модель циркуляции частиц по графу, содержащему более двух вершин и однонаправленные ребра.

## References

- [1] N.V. Pertsev, V.A. Topchii, K.K. Loginov, *Numerical stochastic modeling of a spatially heterogeneous population*, Sibirskii Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki, **27**:2 (2024), 217–232
- [2] N.V. Pertsev, *Application of differential equations with variable delay in the compartmental models of living systems*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **15**:3 (2021), 55–73.
- [3] M.A. Marchenko, G.A. Mikhailov, *Parallel realization of statistical simulation and random number generators*, Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, **17**:1 (2002), 113–124.
- [4] Marchenko M. *PARMONC – a software library for massively parallel stochastic simulation*, Parallel Computing Technologies. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl, **6873**, 302–316, 2011. (Lecture Notes in Computer Science).
- [5] Mikhailov G.A., Voitishchek A.V. Numerical Statistical Simulation. Monte-Carlo Methods. Akademia, Moscow, 2006 (in Russian).
- [6] H. Cramer *Mathematical Methods Of Statistics*, Mir, Moscow, 1975. (in Russian).

VALENTIN ALEKSEEVICH TOPCHII  
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,  
 PR. КОПТЫУГА, 4,  
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*Email address: topchij@gmail.com*

NIKOLAI VIKTIROVICH PERTSEV  
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,  
 PR. КОПТЫУГА, 4,  
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*Email address: homlab@ya.ru*

KONSTANTIN KONSTANTINOVICH LOGINOV  
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,  
 PR. КОПТЫУГА, 4,  
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*Email address: kloginov85@mail.ru*