УДК 517.518+517.518.23

Теоремы вложения Соболева и некоторые их обобщения для отображений топологического пространства с мерой в Банахово пространство.

Работа выполнена поддержке гранта РФФИ 20-01-00661

Н. Н. Романовский

Инст. математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Коптюга 4.

nnrom@math.nsc.ru

Аннотация

For mappings from measure space (X, μ) to Banach space $(Y, |\cdot|_Y)$ we defined an analogous of Sobolev classes $W_p^r(X; Y)$, $r = 1, 2, \dots$, and also Sobolev-Slobodetsky classes W_p^r, $r \in [1, \infty)$ and some of their generalizations. We studied the properties of embedding operators of the defined Sobolev classes into L_q and into Orlizc classes.

Введение. Известно, что теория пространств Соболева имеет многочисленные эффективные применения в различных областях математики и других наук, во многих прикладных задачах. В последнее время успешно развивается теория, обобщающая результаты классической теории пространств Соболева на случай функций, заданных на метрическом пространстве с мерой. Это позволяет разработать новые методы, подходы, получить новые применения, в том числе к изучению некоторых классов уравнений в частных производных, к изучению различных физических моделей, использующих фрактальные множества, к изучению некоторых моделей математической экономики и финансовой математики. По поводу классической теории пространств Соболева и их обобщений на случай функций с нецелой гладкостью см., например, [1-4]. По поводу, некоторых обобщений теории пространств Соболева на метрический случай см., например, [5-12]. По поводу некоторых применений теории пространств Соболева в метрическом случае см. [13-26].

В настоящей работе мы рассматриваем случай отображений, заданных на топологическом пространстве с мерой (X, μ) со значениями в банаховом пространстве $(Y, |.|_Y)$. Он является более общим по сравнению со случаями, рассмотренными в упомянутых работах.

Действительно, во-первых, мы не предполагаем, что на X задана метрика, вместо этого мы предполагаем, что задана последовательность разбиений $\Xi = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j, \dots\}$ множества X на непересекающиеся μ-измеримые множества E_i^j, $i = 1, \dots, 2^j$, которая удовлетворяет следующим условиям: каждое последующее разбиение является измельчением предыдущего, при этом чтобы построить последующее разбиение каждое множество предыдущего разбиения разбивается на два множества одинаковой меры. Разбиение σ_0 состоит из единственного множества, т. е. $\sigma_0 = \{X\}$, $\mu(X) < \infty$. Такую последовательность можно построить при условии, что любое множество положительной меры можно разделить на два подмножества положительной меры, а мера X меньше бесконечности.

Во-вторых, мы рассматриваем отображения со значениями в произвольном банаховом пространстве $(Y, |.|_Y)$, а не в $\mathbb{R}$.

В-третьих, мы рассматриваем произвольный порядок обобщенного дифференцирования r, включая случай $r > 1$, а также случай нецелых r. Поскольку нельзя говорить о полиномах на произвольном топологическом пространстве с мерой, мы заменяем в соответствующем месте определения классов Соболева, в случае $r > 1$, семейство многочленов порядка $[r]$, для нецелых r, либо порядка $r-1$, для целых r, на некоторое фиксированное семейство функций (или отображений), удовлетворяющих подходящим неравенствам, которые связанны с семейством разбиений Ξ.

Ранее нами, в работах [27–29], было сформулировано новое определение функциональных классов Соболева на метрических пространствах с мерой, которое оказалось удобным для доказательства различных теорем вложения. В работах [27, 28] был рассмотрен случай аналогичный случаю классов Соболева (Соболева-Слободецкого) W_p^r, $0 < r \leq 1$. В работе [29] был рассмотрен случай, аналогичный классам Соболева (Соболева-Слободецкого) W_p^r, $r > 1$, а также некоторым их обобщениям, которые получаются при приближении рассматриваемых функций не полиномами, а функциями из подходящего выделенного семейства.

Предложенный в работах [27–29] подход оказался продуктивным даже в евклидовом случае. Иначе говоря, теоремы вложения можно доказывать по следующей схеме: сначала доказать эквивалентность классического определения определению из работ [27–29] после чего доказать теоремы вложения, не используя интегральных представлений и оценок норм интегральных операторов, а вместо этого используя некоторые оценки непосредственно вытекающие из определения, изложенного в работах [27–29]. Для случая некоторых областей с особенностями этот подход оказался технически проще классического подхода. См., также [30-33].

В настоящей работе мы рассматриваем более общий случай по сравнению с работами [27–29]. Кроме того, мы доказываем аналог в рассматриваемом общем случае результата С. И. Похожаева о вложении пространств Соболева $W_p^k(U)$, где U — достаточно регулярная область $\mathbb{R}^n$, $pk = n$, в пространство Орлича, порожденное экспоненциально растущей функцией, см. [34–37]. В работе [26] доказаны полные аналоги классических теорем вложенния пространств Соболева в L_q для функций, заданных на метрическом пространстве, со значениями в $\mathbb{R}$. В настоящей работе мы используем некоторые идеи этого доказательства, но меняем основные рассуждения, чтобы единнообразным образом доказать теоремы вложения в L_q, в пространство Орлича, порожденные экспоненциально растущей функцией и в L_∞. Приведенное доказательство позволяет оценить норму операторов вложения.

В завершении настоящей работы мы переформулируем определение из [27-29] так, чтобы дать его не через верхний градиент функции u, а через другую функцию, определение которой зависить только от локального поведения функции u. Такая переформулировка может быть полезной для доказательства ряда важных оценок с помощью результатов настоящей работы.

Пусть (X, T, μ) (или для краткости (X, μ)) — топологическое пространство с мерой μ. $V \subset X$ — множество конечной меры. Обозначим $\mu(V) = C_1$.

Определение 1. *Рассмотрим последовательность разбиений* $\Xi = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_j, \ldots\}$ *множества* V *на непересекающиеся* μ*-измеримые множества* E_i^j, $i = 1, \ldots, 2^j$, *такую, что каждое последующее разбиение является измельчением предыдущего, при этом чтобы получить последующее разбиение каждое множество предыдущего разбиения разбивается на два множества одинаковой меры. Будем предполагать, что разбиение* σ_0 *состоит из единственного множества, т. е.* $\sigma_0 = \{V\}$. *Будем называть* Ξ *двоичной последовательностью разбиений.*

Замечание 1. *Существует много различных двоичных последовательностей разбиений. Определяемые в дальнейшем функциональные пространства зависят от выбора двоичной последовательности разбиений.*

Замечание 2. *В работах [27–29] были приведены примеры множеств метрических пространств для которых можно построить аналогичные последовательности разбие-*

ний, удовлетворяющие дополнительному соотношению $\operatorname{diam}(E_i^j) \le C2^{-\frac{j}{d}}$*, где* d *— аналог размерности в метрическом пространстве с мерой, включая достаточно регулярные области* $\mathbb{R}^n$*, групп Гейзенберга, общих групп Карно, фрактальные множества.*

Определение 2. *Фиксируем семейство отображений* $\mathfrak{A}$*, заданных на множестве* V*, таких, что для некоторой постоянной* C_2 *для любой функции* $A \in \mathfrak{A}$*, а также для любых функций* $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ *и множества* $E_i^k \in \sigma_k$ *выполняются неравенства*

$$\sup_{x \in E_i^k} |A(x)|_Y \le \frac{C_2}{\mu(E_i^k)} \int_{E_i^k} |A(x)|_Y \, d\mu(x),$$

$$\sup_{x \in E_i^k} |A_1(x) - A_2(x)|_Y \le \frac{C_2}{\mu(E_i^k)} \int_{E_i^k} |A_1(x) - A_2(x)|_Y \, d\mu(x),$$

где C_2 *не зависит от* i*,* k*.*

Перечислим некоторые подходящие для определения 2 семейства функций $\mathfrak{A}$.

Замечание 3. *Семейство констант удовлетворяет условиям определения 2, при этом в качестве* C_2 *можно взять* 1.

Предложение 1. *Предположим, что* $V \subset \mathbb{R}^n$*,* V *— ограничено,* μ *— мера Лебега. Пусть найдется константа* C *такая, что для всех* k *для каждого множества* E_i^k *из разбиения* σ_k *можно указать шар* $B_i^k \subset E_i^k$ *такой, что диаметр множества* E_i^k *не превосходит константу* C *умноженную на радиус шара* B_i^k*. Фиксируем* $m \in \mathbb{N}$*. Тогда множество полиномов степени не выше* m *будет удовлетворять условиям определения 2 для последовательности разбиений* σ_k *множества* V*. Т. е. в этом случае в качестве семейства функций* $\mathfrak{A}$ *из определения 2 можно взять множество полиномов степени не выше* m*.*

Доказательство. Нам необходимо доказать, что для любых двух полиномов степени не выше m выполняется неравенство

$$\sup_{x \in E_i^k} |P_1(x) - P_2(x)| \le \frac{C_2}{|E_i^k|} \int_{E_i^k} |P_1(x) - P_2(x)| \, dx,$$

где C_2 зависит только от m, n и постоянной C из условия предложения. Последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\sup_{x \in E_i^k} |P(x)| \le \frac{C_2}{|E_i^k|} \int_{E_i^k} |P(x)| \, dx,$$

где P — произвольный полином степени не выше m. Левая и правая части последнего неравенства инвариантны относительно сдвигов и растяжений. Поэтому достаточно доказать неравенство

$$\sup_{x \in E} |P(x)| \le \frac{C_2}{|E|} \int_{E} |P(x)| \, dx,$$

где C_2 зависит только от m, n и постоянной C, E — произвольное множество диаметра C, содержащее единичный шар с центром в нуле $B(0,1)$, P — произвольный полином степени не выше m. Доказательство последнего неравенства вытекает из формулы

$$P(x) = \int\limits_{B(0,1)} P_{B,\phi}(x,y) P(y) \; dy,$$

где функция $P_{B,\phi}(x,y)$ для фиксированного y является полиномом по x, для фиксированного x принадлежит $C_0^\infty(B(0,1))$ по y. Эту формулу можно вывести разложив в ряд Тейлора порядка m функцию $P(x)$ относитльно точки y домножив полученное равенство на функцию $\phi(y) \in C_0^\infty(B(0,1))$, удовлетворяющую $\int\limits_{B(0,1)} \phi(y)\, dy = 1$, и проинтегрировав домноженное равенство по y по шару $B(0,1)$. Эту формулу можно взять из интегрального представления Соболева, см. например [3].

Предложение 2. *Предположим, что выполнены условия предложения 1. Тогда любое подмножество семейства полиномов степени не выше m будет удовлетворять условиям определения 2 для последовательности разбиений σ_k множества V.*

Предложение 3. *Предположим, что выполнены условия предложения 1. Тогда любое семейство вектор-функций, компоненты которых являются полиномами степени не выше m, будет удовлетворять условиям определения 2 для последовательности разбиений σ_k множества V. В частности, семейство изометрий удовлетворяет условиям определения 2.*

Утверждения предложений 2 и 3 являются непосредствеными следствиями предложения 1.

Предложение 4. *Предположим, что выполнены условия предложения 1. Пусть $V \Subset U$, U — открыто. Тогда множество функций гармонических на множестве U удовлетворяет условиям определения 2. Также, в двумерном случае, множество конформных отображений $U \subset \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ удовлетворяет условиям определения 2. Иначе говоря, эти множества, либо их подмножества, можно взять в качестве семейства $\mathfrak{A}$ из определения 2.*

Доказательство предложения 4 вытекает из неравенства Гарнака.

Определение 3. *Пусть открытое множество $V \subset X$, (X,μ) — пространство с мерой, $(Y, |.|_Y)$ — Банахово пространство, $p \in [1,\infty)$, последовательность разбиений $\Xi = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_j, \dots)$ удовлетворяет определению 1, $u \in L_p(V;Y)$. Обозначим множества из которых состоит разбиение σ_j через E_i^j, $i = 1, \dots, 2^j$. Предположим, что существует функция $h^r \in L_p(V)$ такая, что для каждого $j = 0,1,2,\dots$ для каждого $i = 1,\dots,2^j$ найдется отображение A_i^j из семейства $\mathfrak{A}$ такое, что для п. в. $x \in E_i^j$ выполняется неравенство*

$$2^{jr}|u(x) - A_i^j(x)|_Y \le h^r(x). \tag{1}$$

Тогда будем писать, что $u \in S^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)$. Любую функцию $h^r(x)$, удовлетворяющую неравенству (1), будем называть верхним градиентом порядка r отображения u. Инфимум $\|h^r\|_{L_p(U)}$ среди всех функций $h^r(x)$, удовлетворяющих неравенству (1), т. е. среди всех верхних градиентов порядка r отображения u, будем обозначать $[u]_{S^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)}$ или для краткости $[u]^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}$. Норма в пространстве $S^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)$ определяется формулой

$$\|u\|_{S^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)} = \|u\|_{L_p(V;Y)} + [u]_{S^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)}.$$

Рассмотрим более сильное условие. Предположим, что существует функция $\tilde{h}^r \in L_p(V)$ такая, что для каждого $j = 0,1,2,\dots$ для каждого $i = 1,\dots,2^j$ найдется отображение A_i^j из семейства $\mathfrak{A}$ такое, что для п. в. $x \in E_i^j$, а также для п. в. $x \in E_k^j$ граничащих с E_i^j, т. е. $E_k^j \in \sigma_j$ и $\overline{E_i^j} \cap \overline{E_k^j} \ne \emptyset$, выполняется неравенство

$$2^{jr}|u(x) - A_i^j(x)|_Y \le \tilde{h}^r(x). \tag{$1'$}$$

Тогда будем писать, что $u \in \tilde{S}^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)$. Любую функцию $\tilde{h}^r(x)$, удовлетворяющую неравенству ($1'$), будем называть сильным верхним градиентом порядка r отображения u.

Инфимум $\|\tilde{h}^r\|_{L_p(U)}$ *среди всех функций* $\tilde{h}^r(x)$, *удовлетворяющих неравенству* $(1')$, *т. е. среди всех сильных верхних градиентов порядка* r *отображения* u, *будем обозначать* $[u]_{\tilde{S}^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)}$. *Норма в пространстве* $\tilde{S}^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)$ *определяется формулой*

$$\|u\|_{\tilde{S}^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)} = \|u\|_{L_p(V;Y)} + [u]_{\tilde{S}^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)}.$$

Замечание 4. *В дальнейшем будем обозначать множество отображений, совпадающих на* E_i^j *с* A_i^j *для которого выполняется (1), через* G_j. *Определение* $S^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)$ *означает, что для* $u \in S^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)$ *найдется отображение* $g_j \in G_j$ *такое, что для п. в.* $x \in V$ *выполняется неравенство*

$$|u(x) - g_j(x)|_Y \le 2^{-jr} h^r(x). \tag{2}$$

Замечание 5. *Если* X *- метрическое пространство с внутренней метрикой* ρ_X, *мера всех шаров по этой метрике радиуса* $R \le 1$ *не меньше чем* CR^d, *множество* $\mathfrak{A}$ *есть множество констант,* $Y = \mathbb{R}$, *разбиения из семейства* Ξ *удовлетворяют условию* $\operatorname{diam}(E_i^j) \le C2^{-\frac{j}{d}}$ *(см. замечание 1), то определенное выше пространство* $S^{\frac{1}{d},p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)$ *содержит определенное общепринятым способом (П. Хайлаш, Дж. Чигер и др., см. [6–10, 12]) через поточечные оценки пространство Соболева* $H^{1,p}(V,\rho_X,\mu)$, *а* $\tilde{S}^{\frac{1}{d},p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)$ *совпадает с этим пространством.*

Аналогично, если $X = \mathbb{R}^n$ *и выполняются остальные перечисленные выше условия, то* $S^{\frac{k}{n},p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)$ *содержит классическое пространство Соболева* $W^{k,p}(U)$, *а* $\tilde{S}^{\frac{k}{n},p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)$ *совпадает с этим пространством.*

Для $rp > 1$ можно получить равномерную по j оценку $\|g_j(x) - g_0(x)\|_{L_\infty(V;Y)}$ из которой легко следует вложение $S^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)$ в $L_\infty(V;Y)$, см. также [1]. Для $rp \le 1$ также можно получить оценку L_∞-нормы функций $g_j(x) - g_0(x)$, которая не будет равномерной по j, но будет более точной. Используя эту оценку и идеи работы [3], можно доказать теоремы вложения $S^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)$ в $L_{\frac{p}{1-rp}}(V;Y)$ для $rp < 1$ и в пространство Орлича, порожденное экспоненциально растущей функцией, для $rp = 1$.

Лемма 1. *Справедливы следующие оценки: если* $1 < rp$, *то*

$$\|g_k - g_0\|_{L_\infty(V;)} \lesssim \|h^r\|_{L_p(V)},$$

если $1 = rp$, *то*

$$\|g_k - g_0\|_{L_\infty(V;Y)} \lesssim \|h^r\|_{L_p(V)} \cdot k,$$

если $1 > rp$, *то*

$$\|g_k - g_0\|_{L_\infty(V;Y)} \lesssim \|h^r\|_{L_p(V)} \cdot 2^{k(\frac{1}{p} - r)}.$$

Доказательство.

$$\|g_k - g_0\|_{L_\infty(V;Y)} \le \sum_{j=1}^{k} \|g_j - g_{j-1}\|_{L_\infty(V;Y)}.$$

$$\|g_j - g_{j-1}\|_{L_\infty(V;Y)} = \max_{i=1}^{2^j} \|g_j - g_{j-1}\|_{L_\infty(E_i^j;Y)} \le \max_{i=1}^{2^j} \frac{C_2}{\mu(E_i^j)} \int_{E_i^j} |g_j(x) - g_{j-1}(x)|_Y \, d\mu(x),$$

поскольку $g_j|_{E_i^j} \in \mathfrak{A}$, $g_{j-1}|_{E_i^j} \in \mathfrak{A}$. Используя неравенство Гельдера, получаем

$$\|g_j - g_{j-1}\|_{L_\infty(V;Y)} \leq \max_{i=1}^{2^j} \frac{C_2}{\mu(E_i^j)^{\frac{1}{p}}} \left(\int_{E_i^j} |g_j(x) - g_{j-1}(x)|_Y^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Далее, в силу (2),

$$|g_j(x) - g_{j-1}(x)|_Y \leq |u(x) - g_j(x)|_Y + |u(x) - g_{j-1}(x)|_Y \leq (1+2)2^{-jr} h^r(x) = 3 \cdot 2^{-jr} h^r(x).$$

Поскольку Ξ является двоичной последовательностью разбиений, получаем

$$\mu(E_i^j)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(2^j)^{\frac{1}{p}}} = (C_1)^{\frac{1}{p}} 2^{-\frac{j}{p}}.$$

Следовательно,

$$\|g_j - g_{j-1}\|_{L_\infty(V;Y)} \leq C_3 2^{j(\frac{1}{p}-r)} \max_{i=1}^{2^j} \|h^r\|_{L_p(E_i^j)} \leq C_3 \|h^r\|_{L_p(V)} 2^{j(\frac{1}{p}-r)},$$

где $C_3 = 3 \cdot \frac{C_2}{(C_1)^{\frac{1}{p}}}$. В итоге,

$$\|g_k - g_0\|_{L_\infty(V;Y)} \leq C_3 \|h^r\|_{L_p(V)} \sum_{j=1}^{k} 2^{j(\frac{1}{p}-r)}.$$

Если $1 < rp$, имеем равномерную по k оценку $\|g_k - g_0\|_{L_\infty(V;Y)}$, соответственно в этом случае будем иметь

$$\|u - g_0\|_{L_\infty(V;Y)} \leq C_4 \|h^r\|_{L_p(V)}, \quad C_4 = C_3 \frac{3^{\frac{1}{p}-r}}{1 - 2^{\frac{1}{p}-r}}. \tag{3}$$

Если $1 = rp$, имеем зависящую от k оценку

$$\|g_k - g_0\|_{L_\infty(V;Y)} \leq C_3 \|h^r\|_{L_p(V)} \cdot k. \tag{4}$$

Если $1 > rp$, получаем зависящую от k оценку

$$\|g_k - g_0\|_{L_\infty(V;Y)} \leq C_5 \|h^r\|_{L_p(V)} \cdot 2^{k(\frac{1}{p}-r)}.$$

Теорема 1. *Пусть $1 > rp$. Тогда справедлива оценка*

$$\left(\int\limits_V |u(x) - g_0(x)|_Y^{\frac{p}{1-rp}} \, d\mu(x) \right)^{\frac{1-rp}{p}} \lesssim [u]^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y).$$

Для $q < \frac{p}{1-rp}$ выполняются оценки

$$\left(\int\limits_V |u(x) - g_k(x)|_Y^q \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \leq C(r,p,d,q,k) [u]^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y),$$

где $C(r,p,q,k)\to 0$ *при* $k\to\infty$.

Доказательство.

Фиксируем целое число $i\geq 1$. Пусть $h_r(x)$ — произвольный верхний градиент порядка r отображения u.

Обозначим через V_i множество точек $x\in V$ таких, что $|u(x)-g_0(x)|_Y\in[2^i,2^{i+1})$. Из леммы 2 мы имеем оценку $\|g_k-g_0\|_{L_\infty}(V;Y)\leq C_5\|h^r\|_{L_p(V)}\cdot 2^{k(\frac{1}{p}-r)}$. Выберем максимальное целое k такое, что

$$\|g_k-g_0\|_{L_\infty}(V;Y)\leq 2^{i-1}. \tag{6}$$

Обозначим это число через $k(i)$.

Тогда для п.в. $x\in V_i$ имеем

$$|u(x)-g_{k(i)}(x)|_Y\geq |u(x)-g_0(x)|_Y-|g_{k_i}(x)-g_0(x)|_Y\geq 2^i-2^{i-1}=2^{i-1}.$$

Следовательно, для п.в. $x\in V_i$

$$|u(x)-g_0(x)|_Y\leq 4|u(x)-g_{k(i)}(x)|_Y\leq 4\cdot 2^{-k(i)r}h^r(x).$$

По определению $k(i)$, если взять $k=k(i)+1$, то оценка (6) не будет выполняться, учитывая (5), получаем

$$(k(i)+1)(\frac{1}{p}-r)+\log_2(C_5)+\log_2(\|h^r\|_{L_p(V)})>i-1.$$

Отсюда

$$2^{-k(i)}<C_6\left(\|h^r\|_{L_p(V)}\right)^{\frac{p}{1-rp}}2^{-\left(\frac{i}{\frac{1}{p}-r}\right)}=C_6\left(\|h^r\|_{L_p(V)}\right)^{\frac{p}{1-rp}}10^{-\left(\frac{ip}{1-rp}\right)}.$$

Далее,

$$|u(x)-g_0(x)|_Y\leq C_7\left(\|h^r\|_{L_p(V)}\right)^{\frac{rp}{1-rp}}2^{-\left(\frac{irp}{1-rp}\right)}h^r(x). \tag{7}$$

Фиксируем $q\geq p$. Имеем

$$\int\limits_{V_i}|u(x)-g_0(x)|_Y^q\,d\mu(x)=\int\limits_{V_i}|u(x)-g_0(x)|_Y^{q-p}|u(x)-g_0(x)|_Y^p\,d\mu(x).$$

В правой части последнего неравенства оценим множитель $|u(x)-g_0(x)|_Y^{q-p}$ исходя из $|u(x)-g_0(x)|_Y\leq 2^{i+1}$, а множитель $|u(x)-g_0(x)|_Y^p$ исходя из неравенства (7), получим

$$\int\limits_{V_i}|u(x)-g_0(x)|_Y^q\,d\mu(x)\leq C_8\left(\|h^r\|_{L_p(V)}\right)^{\frac{rp^2}{1-rp}}2^{i(q-p)-\left(\frac{irp^2}{1-rp}\right)}\int\limits_{V_i}(h_r(x))^p\,d\mu(x).$$

Далее, $q-p-\left(\frac{rp^2}{1-rp}\right)=q-\frac{p}{1-rp}$. Следовательно,

$$\int\limits_{V_i}|u(x)-g_0(x)|_Y^q\,d\mu(x)\leq C_8\left(\|h^r\|_{L_p(V)}\right)^{\frac{rp^2}{1-rp}}2^{i(q-\frac{p}{1-rp})}\int\limits_{V_i}(h_r(x))^p\,d\mu(x). \tag{8}$$

Рассмотрим случай $q=\frac{p}{1-rp}$, получим

$$\int\limits_{V_i}|u(x)-g_0(x)|_Y^{\frac{p}{1-rp}}\,d\mu(x)\leq C_8\left(\|h^r\|_{L_p(V)}\right)^{\frac{rp^2}{1-rp}}\int\limits_{V_i}(h_r(x))^p\,d\mu(x). \tag{9}$$

Просуммировав неравенства (9) по i, получим

$$\int\limits_V |u(x)-g_0(x)|_Y^{\frac{p}{1-rp}}\,d\mu(x) \le C_8 \left(\|h^r\|_{L_p(V)}\right)^{\frac{rp^2}{1-rp}} \int\limits_V (h_r(x))^p\,d\mu(x) = C_8 \left(\int\limits_V (h_r(x))^p\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{1-rp}}.$$

Окончательно, имеем

$$\left(\int\limits_V |u(x)-g_0(x)|_Y^{\frac{p}{1-rp}}\,d\mu(x)\right)^{\frac{1-rp}{p}} \le C_9 \left(\int\limits_V (h_r(x))^p\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{10}$$

В силу произвольности выбора верхнего градиента h_r первое неравенство теоремы доказано.

Рассмотрим случай $q < \frac{p}{1-rp}$. Оценим $\int\limits_V |u(x)-g_0(x)|_Y^q\,d\mu(x)$. Для этого можно использовать (8), но суммирование вести не по всем i, а только по тем i для которых $k(i) \ge k$. Обозначим наименьшее из таких целых чисел i через $i(k)$. Получим

$$\int\limits_V |u(x)-g_0(x)|_Y^q\,d\mu(x) \le C_8 2^{i(k)\left(q-\frac{p}{1-rp}\right)} \left(\int\limits_V (h_r(x))^p\,d\mu(x)\right)^{\frac{q}{p}}. \tag{11}$$

Поскольку $i(k) \to \infty$ при $k \to \infty$, учитывая произвольность выбора верхнего градиента h_r, получаем второе утверждение теоремы.

Следствие 1. *Пусть $1 > rp$. Тогда нормированное пространство $S^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)$ непрерывно вкладывается в нормированное пространство $L_{\frac{p}{1-rp}}(V;Y)$.*

Доказательство. Из неравенства треугольника и неравенства (10) имеем

$$\|u\|_{L_{\frac{p}{1-rp}}(V;Y)} \le \|u-g_0\|_{L_{\frac{p}{1-rp}}(V;Y)} + \|g_0\|_{L_{\frac{p}{1-rp}}(V;Y)}$$

$$\le C_9 \left(\int\limits_V (h_r(x))^p\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} + C_2\|g_0\|_{L_p(V;Y)}$$

$$\le C_{10}\left(\|h\|_{L_p(V)} + \|u-g_0\|_{L_p(V;Y)} + \|u\|_{L_p(V;Y)}\right) \le C_{11} u_{S^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)}.$$

Следствие 2. *Предположим, что на X задана внутренняя метрика и для множеств последовательности разбиений Ξ выполняются неравенства $diam(E_i^j) \le C2^{-\frac{j}{d}}$. Пусть $\mathfrak{A}$ представляет из себя множество констант. Предположим, что $d > p$. Тогда нормированое пространство $W^{1,p}(V;Y)$, т. е. пространство Соболева на метрическом пространстве с мерой, определенное через поточечные оценки, непрерывно вкладывается в нормированое пространство $L_{\frac{p}{d-p}}(V;Y)$.*

Аналогично, если $X = \mathbb{R}^n$, для множество E_i^j последовательности разбиений Ξ выполняются неравенства $diam(E_i^j) \le C2^{-\frac{j}{n}}$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A}$ представляет из себя множество полиномов степени не выше чем $k-1$, $d > kp$. Тогда нормированое пространство $W^{k,p}(V;Y)$, т. е. классическое пространство Соболева, непрерывно вкладывается в нормированое пространство $L_{\frac{kp}{d-kp}}(V;Y)$.

Доказательство. Ранее было отмечено, что $W^{1,p}(V;Y)$ непрерывно вкладывается в $S^{\frac{1}{d},p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)$ в первом случае и $W^{k,p}(V;Y)$ непрерывно вкладывается в $S^{\frac{k}{d},p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)$ во втором.

Таким образом, воспользовавшись результатом теоремы, получаем, что $W^{1,p}(V;Y)$ непрерывно вкладывается в $L_{\frac{p}{1-\frac{1}{d}p}}(V;Y) = L_{\frac{dp}{d-p}}(V;Y)$ в первом случае и $W^{k,p}(V;Y)$ непрерывно вкладывается в $L_{\frac{p}{1-\frac{k}{d}p}}(V;Y) = L_{\frac{dp}{d-kp}}(V;Y)$ во втором.

Замечание 6. *Для областей евклидового пространства, размерности n, с особенностями может не существовать последовательности двоичных разбиений, удовлетворяющих условию $\operatorname{diam}(E_i^j) \leq C2^{-\frac{j}{n}}$. В этом случае можно, учитывая характер особенности, взять число r меньшим, чем $\frac{k}{n}$ и получить теоремы вложения с худшим чем классический показателем суммируемости. Также можно рассмотреть разбиения, содержащие множества диаметр которых растет при приближении к особенностям на границе рассматриваемой области и тем самым нарушить условие $\operatorname{diam}(E_i^j) \leq C2^{-\frac{j}{n}}$. В этом случае мы получим вложение весовых пространств Соболева с весом, стремящимся к бесконечности при приближении к особенностям на границе, в пространство Лебега с классическим показателям суммируемости. Наконец, можно вместо меры Лебега в качестве меры μ взять весовую меру с подходящим весом, стремящимся к бесконечности при приближении к особенностям на границе. В последнем случае мы получим вложение весовых пространств Соболева в весовые пространства Лебега с тем же весом и с классическим показателем суммируемости.*

Следствие 3. *Пусть $1 > rp$, $q < \frac{p}{1-rp}$. Предположим, что щар по метрике $L_p(V;Y)$ пересеченный с $\mathfrak{A}$ вполне ограничен по метрике $L_p(V;Y)$. Тогда оператор вложения $S^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)$ в $L_q(V;Y)$ вполне ограничен.*

Доказательство. Построим ϵ-сеть для шара по метрике $S^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)$ с центром в 0 и радиуса R. Воспользуемся вторым неравенством в формулироваке теоремы 1 и выберем k достаточно большим, чтобы выполнялось неравенство $C(r,p,q,k) \leq \frac{\epsilon}{2R}$.

Тогда для любого отображения $u \in B$ найдется отображение $g_k \in G_k$ такое, что

$$\|u - g_k\|_{L_q(V;Y)} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Отметим, что в силу неравенства Гельдера и неравенств $\mu(V) \leq C_1$, $\|u\|_{L_p(V;Y)} \leq R$, выполняется

$$\|g_k\|_{L_q(V;Y)} \leq C\|g_k\|_{L_\infty(V;Y)}.$$

Далее,

$$\|g_k\|_{L_p(V;Y)} \leq \|u - g_k\|_{L_p(V;Y)} + \|u\|_{L_p(V;Y)} \leq \frac{\epsilon}{2} + R.$$

Таким образом, для доказательства существования ϵ-сети для шара B по метрике $L_q(V;Y)$ достаточно доказать существование ϵ-сети по метрике $L_q(V;Y)$ для множества $\{g_k \in G_k \mid \|g_k\|_{L_p(V;Y)} \leq C\}$, где C — некоторая константа.

Для $i = 1, 2, ..., 2^k$ обозначим $g_k|_{E_i^k} = A_i^k$. Имеем $A_i^k \in \mathfrak{A}$, $\|A_i^k\|_{L_p(V;Y)} \leq \frac{\epsilon}{2} + R$. По условию, множество таких отображений A_i^k вполне ограничено, следовательно для него можно построить конечную ϵ-сеть по метрике $L_p(V;Y)(E_i^k)$. Обозначим ее, т. е. соответствующий конечный набор отображений через $\mathfrak{G}_i^k$, $\mathfrak{G}_i^k \subset \mathfrak{A}$. Из свойств отображений из $\mathfrak{A}$, см. опр. 1 и опр 2, вытекает, что $\mathfrak{G}_i^k$ будет $(C_2\epsilon)$-сетью по норме $L_\infty(V;Y)$.

В итоге, получаем, что набор отображений V в Y, совпадащих на E_i^k с одним из отображений из $\mathfrak{G}_i^k$, является $(C_2\epsilon)$-сетью по норме $L_\infty(V;Y)$ для множества $\{g_k \in G_k \mid$

$\|g_k\|_{L_p(V;Y)} \le \frac{\epsilon}{2}+R\}$. Из неравенства Гельдера вытекает, что это множество также является $(C\epsilon)$-сетью по норме $L_q(V;Y)$, где C не зависит от k. Следствие доказано.

Воспользуемся вторым неравенством в формулировке теоремы 1 и выберем k достаточно большим, чтобы выполнялось неравенство $C(r,p,d,q,k) < \frac{\epsilon}{2\Lambda_1}$. Тогда для любого отображения $u \in M$ найдется отображение $g_k \in G_k$ такое, что

$$\|d_Y(u(\cdot), g_k(\cdot))\|_{L_q(V)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Отметим, что в силу неравенства Гельдера и неравенств $\mu(V) \le 1$, $\|d_Y(u(\cdot), A(\cdot))\|_{L_p(V)} \le \Lambda_2$, выполняется

$$\|d_Y(g_k(\cdot), A(\cdot))\|_{L_p(V)} \le \|d_Y(u(\cdot), g_k(\cdot))\|_{L_p(V)} + \|d_Y(u(\cdot), A(\cdot))\|_{L_p(V)} \le \frac{\epsilon}{2} + \Lambda_2.$$

Таким образом, для доказательства существования ϵ-сети для множества M достаточно доказать существование ϵ-сети по метрике $L_q(V)$ для множества $\{g_k \in G_k \mid \rho_{L_p(V)}(g_k, A) \le C\}$, где C — некоторая константа. Для $i = 1, \ldots, n(k)$ обозначим $g_k|_{E_i^k} = A_i^k$. Имеем, $A_i^k \in \mathfrak{A}$, $\rho_{L_p(E_i^k)}(A_i^k, A) \le C$. По условию множество таких отображений A_i^k вполне ограничено, следовательно для него можно построить конечную ϵ-сеть по метрике $L_p(E_i^k)$. Обозначим ее, т. е. соответствующий конечный набор отображений через $\mathfrak{S}_i^k$, $\mathfrak{S}_i^k \subset \mathfrak{A}$. Из свойств отображений из $\mathfrak{A}$, см. опр. 1 и опр. 2, вытекает, что $\mathfrak{S}_i^k$ будет $(c(k)\epsilon)$-сетью по метрике $L_q(E_i^k)$. В итоге, получаем, что набор отображений V в Y, совпадающих на $E_1^k, E_2^k, \ldots, E_{n(k)}^k$ с одним из отображений из $\mathfrak{S}_i^k$ является $(n(k)c(k)\epsilon)$-сетью по метрике $L_q(V)$ для множества $\{g_k \in G_k \mid \rho_{L_p(V)}(g_k, A) \le C\}$. Следствие доказано.

Следствие 4. *Предположим, что выполняются условия следствий 2 и 3. Пусть $d > p$, $q < \frac{dp}{d-p}$, $n > kp$, $q < \frac{np}{d-kp}$.*

Тогда любой шар по норме пространства $W^{1,p}(V;Y)$, $V \subset (X,\rho)$, т. е. по норме пространства Соболева на метрическом пространстве, определеном через поточечные оценки, является вполне ограниченным множеством по норме пространства $L_q(V;Y)$.

Аналогично, любой шар по норме пространства $W^{k,p}(V;Y)$, $V \subset \mathbb{R}^n$, т. е. по норме классического пространства Соболева является вполне ограниченным множеством по норме пространства $L_q(V;Y)$.

Теорема 2. *Пусть $1 = rp$. Тогда выполняется оценка.*

$$\int\limits_V 2^{\Lambda|u(x)-g_0(x)|_Y} |u(x) - g_0(x)|_Y^p \, d\mu(x) \le \int\limits_V (h_r(x))^p \, d\mu(x),$$

где $\Lambda = C(r,p)\|h_r\|_{L_p(V)}$.

Доказательство. Фиксируем целое число $i \ge 1$. Обозначим через V_i множество точек $x \in V$ таких, что $|u(x) - g_0(x)|_Y \in [2^i, 2^{i+1})$. Из леммы 2 мы имеем оценку $\|g_k - g_0\|_{L_\infty(V;Y)} \le C_3\|h^r\|_{L_p(V)} \cdot k$. Обозначим через $k(i)$ максимальное целое k такое, что

$$\|g_k - g_0\|_{L_\infty}(V;Y) \le 2^{i-1}.$$

Как и ранее для п.в. $x \in V_i$ имеем

$$|u(x) - g_0(x)|_Y \le 4 \cdot 2^{-k(i)r} h^r(x).$$

По определению $k(i)$, если взять $k = k(i)+1$, то $\|g_k - g_0\|_{L_\infty}(V;Y)$ будет больше чем 2^{i-1}, учитывая (4), получаем

$$C_3\|h^r\|_{L_p(V)} \cdot k(i) > 2^{i-1}.$$

Отсюда

$$2^{-ki} < 2^{-C_9\|h^r\|_{L_p(V)}\cdot 2^i}.$$

$$|u(x) - g_0(x)|_Y \le 2^{-C_9 r\|h^r\|_{L_p(V)}\cdot 2^i} h_r(x).$$

Обозначим $\Lambda(r, p, \|h^r\|_{L_p(V)}) = 2C_9 rp\|h^r\|_{L_p(V)}$. Имеем

$$|u(x) - g_0(x)|_Y^p \le 2^{-\Lambda\cdot 2^{i+1}}(h_r(x))^p.$$

Далее получаем, для п. в. точек $x \in V_i$

$$2^{\Lambda|u(x)-g_0(x)|_Y}|u(x) - g_0(x)|_Y^p \le (h_r(x))^p.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{V_i} 2^{|u(x)-g_0(x)|_Y}|u(x) - g_0(x)|_Y^p\, d\mu(x) \le \int\limits_{V_i} (h_r(x))^p\, d\mu(x).$$

Просуммировав последнее неравенство по i, получим

$$\int\limits_{V} 2^{|u(x)-g_0(x)|_Y}|u(x) - g_0(x)|_Y^p\, d\mu(x) \le \int\limits_{V} (h_r(x))^p\, d\mu(x).$$

Теорема доказана.

Определение 4. *Определим оператор M, заданныq на $L_1(V)$. Пусть $h \in L_1(V)$, $h \ge 0$ п.в. Для точки $x \in V$ обозначим через $E_{i^k_{k,x}}$ множество разбиения σ_k, содержащее x. Отметим, что $\mu(E_{i^k_{k,x}}) = \frac{\mu(V)}{2^k}$. Положим*

$$[Mh](x) = \max\left\{h(x), \left(\max_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{\mu(V)}\cdot\int\limits_{E^k_{i_{k,x}}} h(y)d\mu(y)\right)\right\}.$$

Также определим

$$M_k h](x) = \max_{j=1}^{k}\frac{2^j \int\limits_{E^j_{i_{j,x}}} h(y)d\mu(y)}{\mu(V)}.$$

Замечание 7. *Если на V задана метрика, причем для каждого множества E^j_i последовательности разбиений Σ найдется пара шаров B_{ij} и $\tilde{B}_{ij}$ таких, что $B_{ij} \subset E^j_i \subset \tilde{B}_{ij}$ и отношение радиусов этих шаров не превосходит константы, не зависящей от i, j, то для почти всех x выполняется неравенство*

$$[M_2 h](x) \le C[\tilde{M}h](x),$$

где $\tilde{M}$ — классический максимальный оператор.

Лемма 2. *Оператор M ограничен по норме пространства L_p для $p \in (1, \infty)$.*

Доказательство.

Пусть $p > 1$. Определим функцию H_k следущим образом для

$$H_k(x) = [M_k h](x).$$

Нетрудно видеть, что наибольшим отношение $\frac{\|H_k\|_{L_p(V)}}{\|h\|_{L_p(V)}}$ будет при условии, что носитель функции h содержится в одном из множеств E_i^k. В этом случае, для любого $x \in E_i^k$ для $j \le k$ функция H_k постоянна на множествах $E^j_{i_{x,j}} \setminus E^{j+1}_{i_{x,j+1}}$. Если значение функции H_k на множестве E_i^k равно a_k, то на множестве $E^j_{i_{x,j}}$ оно равно $\frac{1}{2^{k-j}}a_k$, а мера множества $E^j_{i_{x,j}}$ равна $2^{k-j-1}\mu(E_i^k)$.

Представим функцию H_k как сумму

$$H_k(x) = H_k(x)\cdot\chi_{E_i^k}(x) + \sum_{j=1}^{k} H_k(x)\cdot\chi_{E^j_{i_{x,j}}\setminus E^{j+1}_{i_{x,j+1}}}(x).$$

По предположению

$$\|H_k\chi_{E_i^k}\|_{L_p(V)} = \|h\|_{L_p(V)}.$$

Легко видеть, что

$$\left\|H_k\cdot\chi(E^j_{i_{x,j}}\setminus E^{j+1}_{i_{x,j+1}})\right\|_{L_p(V)} = \left(\frac{1}{2^{k-j}}a_k\right)\cdot\left[\mu(E^j_{i_{x,j}}\setminus E^{j+1}_{i_{x,j+1}})\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\le 2^{(k-j)\left(\frac{1}{p}-1\right)}\cdot a_k\cdot\left[\mu(E_i^k)\right]^{\frac{1}{p}} = 2^{(k-j)\left(\frac{1}{p}-1\right)}\cdot\|h\|_{L_p(V)}.$$

Используя неравенство треугольника, получаем

$$\|H_k\|_{L_p(V)} \le \|h\|_{L_p(V)} + \left(\frac{1}{2^{\left(1-\frac{1}{p}\right)}}\right)\|h\|_{L_p(V)} + \frac{1}{2^{2\left(1-\frac{1}{p}\right)}}\|h\|_{L_p(V)} + \ldots + \frac{1}{2^{k\left(1-\frac{1}{p}\right)}}\|h\|_{L_p(V)} \le C(p)\|H\|_{L_p(V)}.$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, выводим требуемое неравенство.

Отметим, что если условие, что носитель функции h содержится в одном из множеств E_i^k, не выполняется, например, оно содержится в двух множествах. То мы получаем не одну, а несколько цепочек множеств. Например, если носитель функции h содержится в объединении множеств $E^k_{i_1}$ и $E^k_{i_2}$, причем $x \in E^k_{i_1}$, $y \in E^k_{i_2}$, то мы получаем две цепочки множеств $E^k_{i_1}$, $E^j_{i_{x,j}}\setminus E^{j+1}_{i_{x,j+1}}$ и $E^k_{i_2}$, $E^j_{i_{y,j}}\setminus E^{j+1}_{i_{y,j+1}}$. Далее, проделав для этих цепочек вычисления, аналогичные вычислениям приведенным выше, получим точно такой же результат. Однако, эта оценка будет неточной, поскольку некоторые из множеств $E^j_{i_{x,j}}$ и $E^j_{i_{y,j}}$ могут совпадать. Поэтому, действительно, отношение $\frac{\|H_k\|_{L_p(V)}}{\|h\|_{L_p(V)}}$ будет наибольшим только если выполняется условие, что носитель функции h содержится в одном из множеств E_i^k.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть множество $\mathcal{A}$ выпукло. Предположим, что для любого m найдется сколь угодно большое n такое, что для любых множеств $E^n_{i_1}$ и $E^n_{i_2}$ разбиения σ_n, содержащихся в одном и том же множестве E^m_l разбиения σ_m ($E^n_{i_1}\subset E^m_l$, $E^n_{i_2}\subset E^m_l$) найдется цепочка множеств E^n_i длины не большей чем $C2^{r(n-m)}$, таких, что два последовательных множества в этой цепочке граничат друг с другом, первое множество в этой цепочке граничит с $E^n_{i_1}$, последнее множество в этой цепочке граничит с $E^n_{i_2}$.*

Пусть $u \in \tilde{S}^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)$. Предположим, что функция h_k такова, что для всех $j \ge k$ выполняется неравенство аналогичное неравенству (1') из определения 3, а именно для п. в. точек x, принадлежащих множествам разбиения σ_j, которые граничат с множеством E_i^j выполняется

$$2^{jr}|u(x) - A_i^j(x)|_Y \le h_k(x).$$

Определим функцию

$$H_k(x) = [M_k h_k](x).$$

Тогда для любого k функция $H_k(x)$ является верхним градиентом для отображения u, иначе говоря, для всех $j = 0, 2, ...,$ для всех $i = 1, 2, ..., 2^j$, для п. в. $x \in E_i^j$ выполняется неравенство аналогичное неравенству (1) из определения 3:

$$2^{jr}|u(x) - A_i^j(x)|_Y \le H_k(x).$$

Доказательство.

Фиксируем k. Рассмотрим $m \in \mathbb{N}$. Покажем, что найдется $A_i^m \in \mathfrak{A}$ такая, что для п. в. $x \in E_i^m$ выполняется неравенство

$$2^{mr}|u(x) - A_i^m(x)|_Y \le H_k(x).$$

Поскольку по определению $H_k \ge h_k$ мы можем рассмотреть только случай $m < k$. По условию леммы для этого m найдется $n > k$ такое, что для любых множеств $E_{i_1}^n$ и $E_{i_2}^n$ разбиения σ_n, содержащихся в одном и том же множестве E_l^m разбиения σ_m ($E_{i_1}^n \subset E_l^m$, $E_{i_2}^n \subset E_l^m$) найдется цепочка множеств E_i^n длины не большей чем $C2^{r(n-m)}$, таких, что два последовательных множества в этой цепочке граничат друг с другом, первое множество в этой цепочке граничит с $E_{i_1}^n$, последнее множество в этой цепочке граничит с $E_{i_2}^n$. По условию мы имеем оценки

$$2^{nr}|u(x) - A_i^n(x)|_Y \le H_k(x).$$

Определение сильного верхнего градиента, а также условие существования упомянутой цепочки множеств разбиения позволяют получить оценку $|A_{i_2}^n(x) - A_{i_1}^n(x)|_Y$, а именно показать, что для любых множеств $E_{i_1}^n$ и $E_{i_2}^n$ разбиения σ_n, содержащихся в одном и том же множестве E_l^m разбиения σ_m для соответствующих функций $E_{i_1}^n$ и $E_{i_2}^n$ выполняется оценка

$$2^{mr}|A_{i_2}^n(x) - A_{i_1}^n(x)|_Y \le H_k(x).$$

Эта оценка вместе с условием выпуклости множества позволяет определить искомое $A_i^m \in \mathfrak{A}$. Например, в качестве $A_i^m(x)$ можно взять среднее арифмитическое A_i^n, соответствующих множествам разбиения σ_n, содержащихся в одном т том же множесте разбиения σ_m.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы 3. Рассмотрим последовательность функций $h_k(x)$. Мы можем предположить, что для п. в. x последовательность $h_k(x)$ убывает. Обозначим предельную функцию через $h_{min}(x)$. Тогда*

$$[u]_{S^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V;Y)} \le 2\|h_{min}\|_{L_p(V)}.$$

Замечание 8. *Обозначим через $\tilde{E}_i^j$ объединение всех множеств из разбиения σ_j граничащих с множеством E_i^j, включая само это множество. Тогда перечисленные в лемме 3 условия на функцию h_k эквиваленты тому, что ограничения h_k на $\tilde{E}_i^j$ является сильным верхним градиентом ограничения отображения u на $\tilde{E}_i^j$. Соответственно, для того чтобы определить $h_k(x)$ достаточно знать поведение u на $\tilde{E}_i^j$, где $x \in E_i^j$. Таким образом, значение $h_{min}(x)$ определяется поведением функции на $\tilde{E}_i^j$, где $x \in E_i^j$, j сколь угодно большое натуральное число. Это позволяет говорить, что определение функции h_{min} локально.*

Литература.

1. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.-М.: Наука, 1988.

2. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева.-Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.

3. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.-М.: Наука, 1977.

4. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.

5. Triebel H. Limits of Besov norms // Arch. Math. 2011. V. 96. P. 169–175.

6. Bojarski B., Hajlasz P. Pointwise inequalities for Sobolev functions and some applications // Studia Math. 1993. V. 106. P. 77–92.

7. Hajlasz P. Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces // Potential Analysis. 1996. V. 5, N. 4. P. 403-415.

8. Franchi B., Hajlasz P., Koskela P. Definitions of Sobolev classes on metric spaces // Ann. Inst. Fourier. 1999. V. 49, N. 6. P. 1903-1924.

9. Hajlasz P., Koskela P. Sobolev Met Poincare // Memoirs AMS. 2000. V. 145, N. 688. P. 1-101.

10. Heinonen J. Lectures on analysis on metric spaces. Berlin: Springer-Verlag, 2001.

11. Gol'dshtein V. M., Troyanov M. Axiomatic Theory of Sobolev Spaces // Expo. Math. 2001. V. 19, N. 4. P. 289–336.

12. Bojarski B. Pointwise characterization of Sobolev classes // Тр. Мат. Инст. Стеклова. 2006. Т. 255. С. 71–87.

13. Johnsson A. Brownian motion on fractals and function spaces // Math. Z. 1996. V. 222, N. 3, P. 495–504.

14. Barlow M. T. Diffusions on fractals. Lectures on probability theory and statistics. Lecture notes in math. V. 1690. Berlin: Springer, 1998.

15. J. Lott and C. Villani. Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport. // Ann. of Math. 2009. V. 169, N. 3, P. 903-991.

16. L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savare, Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures, Lectures in Mathematics ETH Zurich, Birkhauser Verlag, Basel, second ed., 2008.

17. K. Kuwada, Duality on gradient estimates and Wasserstein controls // Journal of Functional Analysis 2010 // V. 258, P. 3758–3774.

18. Водопьянов С.К., Романовский Н.Н. Классы отображений Соболева на пространствах Карно — Каратеодори. Различные нормировки и вариационные задачи // Сиб. Мат. Журн. (2008) Т. 49, N. 5. С. 1028–1045.

19. Решетняк Ю. Г. Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве. I // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, N 3. С. 657–675.

20. Решетняк Ю. Г. Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве. II // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, N 4. С. 843–857.

21. Решетняк Ю. Г. К теории соболевских классов функций // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, N 1, С. 146–168.

22. Bonfiglioli A., Lanconelli E. Stratified Lie Groups and Potential Theory for Their Sub-Laplacians. Springer, 2007.

23. Jerison D. The Poincare inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition // Duke Math. J. 1986. V. 53, N. 2. P. 503–523.

24. C. Villani, Optimal transport. Old and new, vol. 338 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

25. K.-T. Sturm and M.-K. von Renesse, Transport inequalities, gradient estimates, entropy, and Ricci curvature // Comm. Pure Appl. Math. 2005. V. 58, P. 923–940.

26. L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savar? e, Calculus and heat flows in metric measure spaces with Ricci curvature bounded from below, Submitted paper, arXiv:1106.2090.

27. Романовский Н. Н. Классы Соболева на произвольном метрическом пространстве с мерой. Компактность операторов вложения // Сиб. Мат. Журн. (2013) Т. 54, N. 2. С. 450–467.

28. Романовский Н. Н. Теоремы вложения и вариационная задача для функций, заданных на произвольном метрическом пространстве с мерой // Сиб. Мат. Журн. (2014) Т. 55, N. 3. С. 627–649.

29. Романовский Н. Н. Теоремы вложения и некоторые их обобщения для функций, заданных на метрическом пространстве с мерой // Сиб. Мат. Журн. (2018) Т. 59, N. 1. С. 158–170.

30. Дезин А. А. К теоремам вложения и задаче о продолжении функций // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88, N. 5. С. 741–743.

31. Брудный Ю. А. Критерии существования производных в L_p // Мат. сб. 1967. Т. 73, N. 1. С. 42–65.

32. Иванишко И. А., Кротов В. Г. Компактность вложений соболевского типа // Матем. заметки. 2009. Т. 86, Вып. 6. С. 829–844.

33. Кротов В. Г. Критерии компактности в пространствах L_p, $p > 0$ // Матем. сб. 2012. Т. 203, N. 7. С. 129–148.

34. Похожаев С. И. О теореме вложения С. Л. Соболева в случае $pl = n$ // Докл. науч.-техн. конф., секция матем. М., МЭИ, 1965, С. 158–170.

35. Trudinger N. S. On imbeddings into Orlicz spaces and some applications // J. Math. Mech. 1967. V. 17, N 5. P. 473–483.

36. Cianchi A. A. Sharp embedding theorem for Orlicz-Sobolev spaces // Indiana Univ. Math. J. 1996. V. 45. P. 39–65.

37. Трушин Б. В. Вложение пространства Соболева в пространства Орлича для области с нерегулярной границей // Мат. заметки. 2006. Т. 79, N. 5. С. 767–778.