S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 517.55
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 32A25,
32A26, 32A40

ОБ ИТЕРАЦИЯХ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА КОШИ-ФАНТАППЬЕ

А.М. Кытманов, С.Г.Мысливец

Abstract: Let D be a bounded domain in $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ with a connected infinitely smooth boundary Γ, and the function f is harmonic in D and of class $\mathcal{C}^1(\bar{D})$. For a vector field w (not lying in the complex tangent plane to Γ) the differential condition $\bar{w}(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} \bar{w}_k \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0$ by Γ is considered. Will f be holomorphic in D? This problem is an analogue of the problem with an oblique derivative for real-valued harmonic functions. The paper shows that this problem is connected with a certain Cauchy-Fantappié integral representation Q, the kernel of which consists of derivatives of the fundamental solution of the Laplace equation. Under some additional conditions on the vector field w, it is shown that the iterations of Q^m of this Cauchy-Fantappié integral representation converge to a holomorphic function. By doing so the problem under consideration has a positive reply.

Kytmanov A.M., Myslivets S.G. On iterations of one Cauchy-Fantappié integral operator.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2025-1606) и фундаментальным проектом IL-5421101746 Национального университета Узбекистана.

.

Keywords: integral representations of Cauchy-Fantappié and Bochner-Martinelli, fundamental solution of the Laplace equation, eigenfunctions and eigenvalues, holomorphic continuation.

1 Введение

Метод интегральных представлений является одним из основных конструктивных методов при изучении голоморфных функций многих комплексных переменных. Особенно большую роль в многомерном комплексном анализе играет интегральное представление Бохнера-Мартинелли (см., например, монографии [1] – [4]). Его ядро является универсальным (не зависящим от вида области) и достаточно простым. Оно обладает многими свойствами ядра Коши на комплексной плоскости, за исключением голоморфности. Интеграл Бохнера-Мартинелли подробно рассмотрен в монографии [5]. Этот интеграл также тесно связано с классической теорией потенциала (см., например, [6]). В [5, Ch. 1] показано, что он является аналогом потенциала двойного слоя. Особенно большую роль интеграл Бохнера-Мартинелли играет в вопросах аналитического продолжения функций различных классов гладкости (см. [5, 7]).

Близко к представлению Бохнера-Мартинелли находится интегральное представление Коши-Фантаппье, рассмотренное в работе. Целью работы является исследование свойств этого интегрального представления, ядро которого состоит из производных фундаментального решения уравнения Лапласа. А именно, в работе рассматривается интеграл (интегральный оператор) с этим ядром для функций f (различных классов гладкости), заданных на границе ограниченной области D с гладкой связной границей Γ. Рассмотрены итерации данного интегрального оператора. Доказано, что они сходятся к голоморфной функции в D при $k \to \infty$.

2 Предварительные сведения

Рассмотрим n-мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, переменных $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $z_j = x_j + ix_{n+j}$, $j = 1, \ldots, n$, x_j — вещественные числа. Введем модуль вектора $|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2}$ и дифференциальные формы $dz = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$, $d\bar{z} = d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_n$, а также $dz[k] = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_{k-1} \wedge dz_{k+1} \wedge \ldots \wedge dz_n$. Топология в $\mathbb{C}^n$ определяется метрикой $|z - w|$.

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ с гладкой связной границей $\partial D = \Gamma$ класса $\mathbb{C}^\infty$. Ориентация Γ согласована с областью D. Область задается следующим образом $D = \{z \in \mathbb{C}^n : \ \rho(z) < 0\}$, где ρ — вещественнозначная функция в некоторой окрестности замыкания области D класса $\mathcal{C}^\infty$ и градиент $\operatorname{grad} \rho \neq 0$ на Γ. Во многих случаях достаточна только конечная гладкость границы. Тогда мы это будем отмечать.

Связность границы нужна в дальнейшем для возможности решения задачи Дирихле для гармонических функций (см., например, [8, Ch. 2]) и выполнимости теоремы Гартогса-Бохнера (см., например, [9]) для CR-функций на Γ.

Обозначим "комплексные" направляющие косинусы

$$\rho_k = \frac{1}{|\operatorname{grad} \rho|} \frac{\partial \rho}{\partial z_k}, \qquad \rho_{\bar{k}} = \frac{1}{|\operatorname{grad} \rho|} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_k}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Отметим, что здесь имеется в виду "комплексный градиент"

$$\operatorname{grad}\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial\rho}{\partial z_n}\right).$$

Тогда

$$|\operatorname{grad}\rho| = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{j=1}^{2n}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\right)^2}. \tag{1}$$

Оператор Лапласа Δ мы будем записывать в виде

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar z_k} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{n+k}^2}\right).$$

Рассмотрим ядро Бохнера–Мартинелли — внешнюю дифференциальную форму $U(\zeta, z)$ типа $(n, n-1)$ вида (см., например, [1] – [4], [5, Ch. 1], [7, Ch. 1])

$$U(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\bar\zeta_k - \bar z_k}{|\zeta - z|^{2n}}\, d\bar\zeta[k] \wedge d\zeta.$$

Это ядро играет важную роль в многомерном комплексном анализе (см., например, [1] – [5]). Оно является замкнутой дифференциальной формой с гармоническими коэффициентами. На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ оно совпадает с ядром Коши.

Напомним вид интегрального представления Бохнера-Мартинелли (см., например, [1] –[5]).

Теорема 1. *Если функция $f \in \mathcal{C}(\bar D)$ и голоморфна в D, то*

$$f(z) = \int\limits_{\Gamma} f(\zeta)U(\zeta, z), \quad z \in D.$$

Пусть $g(\zeta, z)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа (см., например, [8]), т. е.

$$g(\zeta, z) = -\frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n}\frac{1}{|\zeta - z|^{2n-2}}, \quad n > 1,$$

тогда

$$U(\zeta, z) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\partial g}{\partial \zeta_k}\, d\bar\zeta[k] \wedge d\zeta.$$

Для функции $f \in \mathcal{L}^1(\Gamma)$ введем интеграл (интегральный оператор) Бохнера-Мартинелли

$$M[f](z) = \int\limits_{\Gamma} f(\zeta)U(\zeta, z), \quad z \notin \Gamma,$$

а также потенциал (интегральный оператор) простого слоя

$$\Phi[f](z) = -i^n 2^{n-1}\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)g(\zeta, z)\, d\sigma(\zeta) = \frac{(n-2)!}{2\pi^n}\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\frac{d\sigma}{|\zeta - z|^{2n-2}},\ z \notin \Gamma,$$

где $d\sigma$ – поверхностная мера Лебега на Γ. Ясно, что $M[f]$, $\Phi[f]$ являются гармоническими функциями вне Γ.

Будем обозначать через $M^+(f)$ интеграл Бохнера-Мартинелли внутри области D, а через $M^-(f)$ интеграл Бохнера-Мартинелли вне $\bar{D}$. Точно также будем обозначать функции Φ^+ и Φ^-.

Для интеграла Бохнера-Мартинелли хорошо известны (см., например, [5, Ch. 1], [7, Ch.1]) теоремы о скачке. Приведем одну из них.

Теорема 2. *Пусть функция $f \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$, тогда функция $M^+(f)$ непрерывно продолжается на замыкание области D, а функция $M^-(f)$ непрерывно продолжается на $\mathbb{C}^n \setminus D$ и выполнено равенство*

$$M^+[f] - M^-[f] = f \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Интеграл $\Phi[f](z)$ для непрерывных на Γ функций скачка не имеет и является непрерывной функцией в $\mathbb{C}^n$.

Рассмотрим пространство Соболева $\mathcal{W}_2^s(D)$, где $s \in \mathbb{N}$. Это пространство состоит из функций $F \in \mathcal{L}^2(D)$ таких, что все (слабые) производные $\partial^\alpha F$ до порядка $\|\alpha\| \leqslant s$ лежат в $\mathcal{L}^2(D)$ (см., например, [8, Ch. 2]). Здесь ∂^α означает производную

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{\|\alpha\|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots x_{2n}^{\alpha_{2n}}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}), \quad \|\alpha\| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{2n}.$$

Топология в $\mathcal{W}_2^s(D)$ вводится с помощью скалярного произведения

$$(F, G)_s = \sum_{\|\alpha\| \leqslant s} (\partial^\alpha F, \partial^\alpha G)_{\mathcal{L}^2(D)} = \sum_{\|\alpha\| \leqslant s} \int_D \partial^\alpha F \cdot \overline{\partial^\alpha G}\, dv,$$

где

$$dv = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{2n} = (i/2)^n dz \wedge d\bar{z} = (-i/2)^n d\bar{z} \wedge dz \qquad (2)$$

— элемент объема в $\mathbb{C}^n$ (черта над выражением означает комплексное сопряжение).

Положим $\mathcal{W}_2^0(D) = \mathcal{L}^2(D)$.

Введем также пространство $\mathcal{W}_2^s(\Gamma)$ по аналогии с пространством $\mathcal{W}_2^s(D)$, используя разбиение единицы и локальную распрямляемость Γ (см., например, [8, Ch. 2]).

Далее, рассмотрим пространство $\mathcal{W}_2^{s+\lambda}(\Gamma)$ для $0 < \lambda \leqslant 1$. Оно состоит из функций $f \in \mathcal{W}_2^s(\Gamma)$, для которых

$$\int_\Gamma \int_\Gamma \sum_{\|\alpha\| = s} \frac{|\partial^\alpha f(z) - \partial^\alpha f(\zeta)|^2}{|\zeta - z|^{2n+2\lambda-1}} d\sigma(\zeta)\, d\sigma(z) < \infty.$$

Мы будем использовать следующие свойства этих пространств (см. [8, Ch. 2]):

1. Сужение функции $f \in \mathcal{W}_2^s(D)$ на Γ принадлежит пространству $\mathcal{W}_2^{s-1/2}(\Gamma)$ и оператор сужения непрерывен.

2. Если мы обозначим через $\mathcal{G}_2^s(D)$ подпространство гармонических функций из $\mathcal{W}_2^s(D)$, то оператор сужения из $\mathcal{G}_2^s(D)$ на $\mathcal{W}_2^{s-1/2}(\Gamma)$ есть линейный топологический изоморфизм (формула (3.24) из [8]). А также справедливо следующее разложение

$$\mathcal{W}_2^s(D) = \mathcal{G}_2^s(D) \oplus \mathcal{N}_2^s(D),$$

где пространство $\mathcal{N}_2^s(D)$ состоит из функций $\mathcal{W}_2^s(D)$ равных 0 на Γ.

3. Существует компактное непрерывное вложение $\mathcal{W}_2^s(D)$ в $\mathcal{C}_b^k(D)$ при $s > n+k$, где $\mathcal{C}_b^k(D)$ — пространство функций из $\mathcal{C}^k(D)$, имеющих ограниченные производные порядков не превосходящих k (см., например, [8, Theorem 3.1]).

4. Существует компактное непрерывное вложение $\mathcal{W}_2^s(D)$ в $\mathcal{W}_2^k(D)$ при $s > k$, $s < n$ (см., например, [8, Theorem 3.1]).

Гладкие функции плотны в пространствах Соболева (см., например, [10, Ch. 7]. Так подпространство $\mathcal{C}^\infty(D) \cap \mathcal{W}_2^s(D)$ плотно в пространстве $\mathcal{W}_2^s(D)$ ([10, Theorem 7.9]). Аналогичное свойство справедливо и в пространствах $\mathcal{W}_2^s(\Gamma)$.

Пусть $\mathcal{O}_2^s(D)$ — пространство функций из $\mathcal{W}_2^s(D)$ голоморфных в D. В работе [11] А.В.Романова доказано утверждение

Теорема 3. *Справедливо равенство*

$$\lim_{k\to\infty} M^k = P_{\mathcal{O}}, \tag{3}$$

в сильной операторной топологии пространства $\mathcal{W}_2^1(D)$, где $P_{\mathcal{O}}$ — оператор ортогонального проектирования $\mathcal{W}_2^1(D)$ на подпространство голоморфных функций $\mathcal{O}_2^1(D)$.

Это утверждение не может быть прямо перенесено на пространство $\mathcal{W}_2^s(D)$ для $s > 1$. Пример 16.6 из [5] показывает, что равенство (3) невозможно для любых областей D и любых s. Тем не менее оно справедливо для любых s для шара (см. [12]).

Основными пространствами, в которых мы будем работать, будут пространство $\mathcal{G}_2^s(D)$ и топологически изоморфное ему пространство $\mathcal{W}^{s-1/2}(\Gamma)$, $s \geqslant 1$.

3 Постановка задачи

В дальнейшем мы будем рассматривать некоторое интегральное представление Коши-Фантаппье, возникающее при рассмотрении следующего дифференнциального условия (см. [5, §23]). Пусть даны функция $f \in \mathcal{C}^1(\bar{D})$ и векторное поле $w(\cdot) = \sum\limits_{k=1}^n w_k \dfrac{\partial \cdot}{\partial z_k}$, $w_k \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$, $k = 1, \ldots, n$, кроме того $w(\rho) \neq 0$ на Γ, т.е. w не лежит в комплексном касательном пространстве $T_z^c(\Gamma)$ для любой точки $z \in \Gamma$.

Сформулируем следующую задачу (см. [5, §23]).

Задача 1. *Пусть $f \in \mathcal{C}^1(\bar{D})$ и гармоническая в D. Если*

$$\bar{w}(f) = \sum_{k=1}^n \bar{w}_k \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{4}$$

то будет ли f голоморфной в D?

В отличии от касательных условией Коши-Римана в задаче 1 требуется обращение в нуль действия некасательного векторного поля $\bar{w}$. Данная задача является аналогом задачи с наклонной производной для вещественнозначных гармонических функций.

Если условие $w(\rho) \neq 0$ на Γ не выполнено, то легко привести пример, когда при выполнении условия (4) функция f не будет голоморфной в D (см. [5, §23]).

Для некоторых весьма частных случаев задача 1 решена положительно в [5, §23].

Данную задачу можно переформулировать в следующем виде (см. [5, §23]). Пусть $f \in \mathcal{C}^1(\bar{D})$ и гармоническая в D, а дифференциальная форма

$$\mu_f = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k-1} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_k} \, d\zeta[k] \wedge d\bar{\zeta}. \tag{5}$$

Дифференциальная форма μ_f является замкнутой дифференциальной формой типа $(n-1, n)$ для гармонических функций f.

Задача 2. *Если*

$$\mu_f\big|_\Gamma = i \sum_{k>l} a_{k,l}(z) \, df \wedge d\bar{z}[l,k] \wedge dz\big|_\Gamma, \tag{6}$$

где $a_{k,l}$ — некоторые гладкие функции на Γ, $k, l = 1, \ldots, n$, а $d\bar{z}[k,l]$ получается из дифференциальной формы $d\bar{z}$ выбрасыванием дифференциалов $d\bar{z}_k$ и $d\bar{z}_l$, то будет ли f голоморфной в D?

Множитель i добавлен для удобства последующих вычислений.

Для дальнейшего изложения напомним формулу Грина (в комплексной форме) для функции f (Corollary 1.2 из [5]):

Теорема 4 (формула Грина)**.** *Пусть D — ограниченная область с гладкой границей, функция f гармоническая в D и $f \in \mathcal{C}^1(\bar{D})$, тогда*

$$\int_\Gamma f(\zeta) U(\zeta, z) - \int_\Gamma g(\zeta, z) \mu_f = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin \overline{D}. \end{cases} \tag{7}$$

Если все функции $a_{k,l} = 0$, то задача 2 превращается в задачу о голоморфности функций, представимых интегралом Бохнера-Мартинелли (см. [5, §15]).

Используя равенство (6), получим

$$f(z) = \int_\Gamma f(\zeta) U(\zeta, z) - i \int_\Gamma g(\zeta, z) \sum_{k>l} a_{k,l}(\zeta) \, df \wedge d\bar{\zeta}[l,k] \wedge d\zeta, \quad z \in D. \tag{8}$$

Используя формулу Стокса и формулу Грина (7), в [5, §23] показано, что равенство (8) для функций $f \in \mathcal{C}^1(\bar{D})$ и гармонических в D эквивалентно условию

$$f(z) = \int_\Gamma f(\zeta) U(\zeta, z) + i \int_\Gamma f(\zeta) \sum_{k>l} d(a_{k,l}(\zeta) g(\zeta, z)) \wedge d\bar{\zeta}[l,k] \wedge d\zeta, \; z \in D. \tag{9}$$

Второй интеграл (интегральный оператор) в (9) обозначим через

$$G[f](z) = i \int_\Gamma f(\zeta) \sum_{k>l} d(a_{k,l}(\zeta) g(\zeta, z)) \wedge d\bar{\zeta}[l,k] \wedge d\zeta, \qquad z \notin \Gamma,$$

тогда $f(z) = M[f](z) + G[f](z)$. Заметим, что интеграл $G[f](z)$ является гармонической функцией вне Γ. В $\mathbb{C}^1$ интеграл $G[f](z) = 0$.

Вводя ядро

$$W(\zeta, z) = i \sum_{k>l} d(a_{k,l}(\zeta) g(\zeta, z)) \wedge d\bar{\zeta}[l,k] \wedge d\zeta,$$

получим, что для голоморфных функций f справедливо интегральное представление (Коши-Фантаппье)

$$f(z) = \int_\Gamma f(\zeta)(U(\zeta, z) + W(\zeta, z)), \quad z \in D. \tag{10}$$

Таким образом задача 2 превращается в следующую задачу

Задача 3. *Пусть функция f класса $\mathcal{C}(\bar{D})$ удовлетворяет в области D равенству (10). Будет ли f голоморфна в D? (см. [5, §23]).*

В данной статье мы будем рассматривать только случай, когда все функции $a_{k,l}(\zeta)$ являются CR-функциями. По теореме Гартогса-Бохнера (см., например, [9]) это означает, что все $a_{k,l}(\zeta)$ голоморфно продолжаются в D до функций класса $\mathcal{C}^1(\bar{D})$.

Мы изучим свойства этого интеграла с ядром $U(\zeta,z)+W(\zeta,z)$, вычислим его итерации и найдем их предел. А также решим задачу 3 для рассматриваемого класса областей и функций.

Обозначим интегральный оператор $M+G$ через Q

$$Q[f](z) = \int\limits_{\Gamma} f\big(\zeta)(U(\zeta,z) + W(\zeta,z)\big), \quad z \notin \Gamma. \tag{11}$$

Интеграл $Q[f](z)$ является гармонической функцией вне Γ.

Покажем, что интегральное представление (10) является интегральным представлением Коши-Фантаппье. Напомним вид представления Коши-Фантаппье, полученного Лере в [13, 14] (см., также монографию [4, Ch. 1]).

Пусть D — ограниченная область с гладкой границей, для точки $z \in D$ определена на ∂D гладкая вектор-функция $\eta(\zeta,z) = (\eta_1(\zeta,z),\dots,\eta_n(\zeta,z))$ такая, что

$$(\eta,\zeta - z) = \sum_{k=1}^{n}(\zeta_k - z_k)\eta_k(\zeta,z) \neq 0, \quad \zeta \in \partial D.$$

Теорема 5. *Для всякой функции $f \in \mathcal{C}(\bar{D})$, голоморфной в области D, справедливо равенство*

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\,\omega(z-\zeta,\eta(\zeta,z)), \tag{12}$$

где

$$\omega(\zeta - z,\eta(\zeta,z)) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\eta_k d\eta[k] \wedge d\zeta}{(\eta,\zeta-z)^n}.$$

Интегральное представление (12) Лере назвал интегральным представлением Коши-Фантаппье, а его ядро — ядром Коши-Фантаппье.

Справедливо утверждение.

Предложение 1. *Дифференциальная форма*

$$U(\zeta,z) + W(\zeta,z)$$

является ядром Коши-Фантаппье.

Доказательство. Для $k > l$ рассмотрим дифференциальную форму

$$U(\zeta,z) + d(a(\zeta)g(\zeta,z)) \wedge d\bar{\zeta}[l,k] \wedge d\zeta$$

для некоторой гладкой CR-функции $a(\zeta)$ на Γ. Эта форма также является ядром интегрального представления для голоморфных функций.

Введем вектор-функцию

$$\eta(\zeta, z) =$$

$$= (\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1, \ldots, \bar{\zeta}_l + (-1)^{k+l}\frac{\partial(ag)}{\partial\bar{\zeta}_k} - \bar{z}_l, \ldots, \bar{\zeta}_k + (-1)^{k+l-1}\frac{\partial(ag)}{\partial\bar{\zeta}_l} - \bar{z}_k, \ldots, \bar{\zeta}_n - \bar{z}_n).$$

Тогда $(\eta, \zeta - z) = |\zeta - z|^2 \neq 0$. Отсюда ясно, что ядро Коши-Фантаппье для вектор-функции η будет совпадать с ядром

$$U(\zeta, z) + d(a(\zeta)g(\zeta, z)) \wedge d\bar{\zeta}[l, k] \wedge d\zeta.$$

Для дифференциальной формы $U(\zeta, z) + W(\zeta, z)$ рассуждения аналогичны. $\square$

4 Производные некоторых интегральных операторов

В данном пункте мы приведем формулы для производных некоторых интегральных операторов (см. [5, Ch. 1], [16], [17]), полученные на основе классической теории потенциала (см. [6, Ch. 2], [15, гл. 14]).

Пусть область D имеет границу класса $\mathcal{C}^2$ (т.е. функция ρ дважды гладкая в окрестности замыкания области D). Пусть функция $f \in \mathcal{C}^2(\Gamma)$ и функции $a_{k,l} \in \mathcal{C}^2(\Gamma)$, $k, l = 1, \ldots, n$.

Введем как и в статье [16] следующие дифференциальные операторы

$$L_m(f) = \frac{\partial f}{\partial\zeta_m} - \rho_m \sum_{k=1}^n \rho_k \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}_k},$$

$$K_m(f) = i^n 2^{n-1} \sum_{s,k=1}^n \left[\rho_k \frac{\partial}{\partial\zeta_s}\left(\rho_m \rho_{\bar{k}} \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}_s}\right) - \rho_m \frac{\partial}{\partial\zeta_k}\left(\rho_m \rho_{\bar{k}} \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}_s}\right)\right],$$

соответственно,

$$L_{\bar{m}}(f) = \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}_m} - \rho_{\bar{m}} \sum_{k=1}^n \rho_k \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}_k},$$

$$K_{\bar{m}}(f) = i^n 2^{n-1} \sum_{s,k=1}^n \left[\rho_k \frac{\partial}{\partial\zeta_s}\left(\rho_{\bar{m}} \rho_{\bar{k}} \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}_s}\right) - \rho_{\bar{m}} \frac{\partial}{\partial\zeta_k}\left(\rho_{\bar{m}} \rho_{\bar{k}} \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}_s}\right)\right].$$

Тогда, согласно следствию 1 из [16], получим, что

$$\frac{\partial M[f]}{\partial z_m} = M\big[L_m(f)\big] - \Phi\big[K_m(f)\big],$$

$$\frac{\partial M[f]}{\partial \bar{z}_m} = M\big[L_{\bar{m}}(f)\big] - \Phi\big[K_{\bar{m}}(f)\big].$$

Аналогично, введем операторы

$$\tilde{L}_m(f) = -f\rho_m,$$

$$\tilde{K}_m(f) = +i^n 2^{n-1} \sum_{k=1}^n \left[\rho_k \frac{\partial}{\partial\zeta_m}\big(f\rho_{\bar{k}}\big) - \rho_m \frac{\partial}{\partial\zeta_k}\big(f\rho_{\bar{k}}\big)\right],$$

соответственно,

$$\tilde{L}_{\bar{m}}(f) = -f\rho_{\bar{m}},$$
$$\tilde{K}_{\bar{m}}(f) = i^n 2^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\Big[\rho_k\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_m}(f\rho_{\bar{k}}) - \rho_{\bar{m}}\frac{\partial}{\partial\zeta_k}(f\rho_{\bar{k}})\Big].$$

Тогда, согласно следствию 1 из [16], получим, что

$$\frac{\partial\Phi[f]}{\partial z_m} = -M\big[\tilde{L}_m(f)\big] + \Phi\big[\tilde{K}_m(f)\big],$$
$$\frac{\partial\Phi[f]}{\partial \bar{z}_m} = -M\big[\tilde{L}_{\bar{m}}(f)\big] + \Phi\big[\tilde{K}_{\bar{m}}(f)\big]. \tag{13}$$

Введем комплексные касательные векторные поля

$$\partial_{\tau_{k,l}} = \rho_l\frac{\partial}{\partial\zeta_k} - \rho_k\frac{\partial}{\partial\zeta_l},$$
$$\bar{\partial}_{\tau_{k,l}} = \rho_{\bar{l}}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_k} - \rho_{\bar{k}}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_l}, \quad k > l.$$

Лемма 1. *Пусть D — ограниченная область с границей класса $\mathcal{C}^2$, $f \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$ и $a_{k,l} \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$, $k, l = 1, \ldots, n$, тогда $G[f] = -\Phi[h[f]]$, где*

$$h[f](\zeta) = i\sum_{k>l}(-1)^{k+l}a_{k,l}(\zeta)\bar{\partial}_{\tau_{k,l}}f(\zeta). \tag{14}$$

Доказательство. Из формулы Стокса вытекает, что

$$\int_\Gamma f(\zeta)\sum_{k>l}d(a_{k,l}(\zeta)g(\zeta,z)) \wedge d\bar{\zeta}[l,k] \wedge d\zeta =$$
$$= -\int_\Gamma g(\zeta,z)\sum_{k>l}a_{k,l}(\zeta)\,df \wedge d\bar{\zeta}[l,k] \wedge d\zeta.$$

Поэтому, преобразовывая дифференциальную форму $df \wedge d\bar{\zeta}[l,k] \wedge d\zeta$, получим

$$df \wedge d\bar{\zeta}[l,k] \wedge d\zeta\big|_\Gamma = \left((-1)^{l-1}\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}_l}\,d\bar{\zeta}[k] + (-1)^k\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}_k}\,d\bar{\zeta}[l]\right) \wedge d\zeta\big|_\Gamma =$$
$$= (-1)^{l-1}\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}_l}2^{n-1}i^n(-1)^{k-1}\rho_{\bar{k}}d\sigma + (-1)^k\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}_k}2^{n-1}i^n(-1)^{l-1}\rho_{\bar{l}}\,d\sigma =$$
$$= 2^{n-1}i^n\left((-1)^{l+k}\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}_l}\rho_{\bar{k}} + (-1)^{k+l-1}\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}_k}\rho_{\bar{l}}\right)d\sigma =$$
$$= 2^{n-1}i^n(-1)^{k+l-1}\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}_k}\rho_{\bar{l}} - \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}_l}\rho_{\bar{k}}\right)d\sigma =$$
$$= 2^{n-1}i^n(-1)^{k+l-1}\bar{\partial}_{\tau_{k,l}}f(\zeta)\,d\sigma, \tag{15}$$

где $d\sigma$ — поверхностная мера Лебега на Γ. Здесь мы воспользовались леммой 3.5 из [5], согласно которой сужение дифференциальной формы $d\bar\zeta[k]\wedge d\zeta$ на Γ равно $d\bar\zeta[k]\wedge d\zeta\big|_\Gamma = 2^{n-1}i^n(-1)^{k-1}\rho_{\bar k}\,d\sigma$. Тогда

$$G[f] = 2^{n-1}i^{n+1}\int\limits_\Gamma g(\zeta,z)\sum_{k>l}(-1)^{k+l}a_{k,l}(\zeta)\bar\partial_{\tau_{k,l}}f(\zeta)\,d\sigma(\zeta).$$

Поэтому из вида интегрального оператора Φ получим, что

$$G[f] = -\Phi[h[f]],$$

где h определяется равенством (14).

□

Кроме того из (15) вытекает, что

$$\bar\partial_{\tau_{k,l}}f\,d\sigma = \frac{(-1)^{k+l-1}}{2^{n-1}i^n}\bar\partial f\wedge d\bar\zeta[l,k]\wedge d\zeta\big|_\Gamma \tag{16}$$

Из равенства (11) имеем утверждение.

Следствие 1. *Пусть D — ограниченная область с границей класса $\mathcal{C}^2$, $f\in\mathcal{C}^1(\Gamma)$ и $a_{k,l}\in\mathcal{C}^1(\Gamma)$, $k,l=1,\dots,n$, тогда $Q[f]=M[f]-\Phi[h]$.*

Приведем теорему о виде частных производных функции $Q[f]$ (см. [17, Theorem 2]).

Теорема 6. *Пусть D — ограниченная область с дважды гладкой границей и функция $f\in\mathcal{C}^1(\Gamma)$ и $a_{k,l}\in\mathcal{C}^1(\Gamma)$, $k,l=1,\dots,n$, тогда*

$$\frac{\partial Q[f]}{\partial z_m} = M\big[L_m(f)+\widetilde{L}_m(h)\big]-\Phi\big[K_m(f)+\widetilde{K}_m(h)\big],$$
$$\frac{\partial Q[f]}{\partial \bar z_m} = M\big[L_{\bar m}(f)+\widetilde{L}_{\bar m}(h)\big]-\Phi\big[K_{\bar m}(f)+\widetilde{K}_{\bar m}(h)\big].$$

Применяя последовательно формулы из теоремы 6 получаем

Следствие 2. *Если все функции f, $a_{k,l}$ принадлежат классу $\mathcal{C}^{s+1}(\Gamma)$, то операторы M, Q, G, Φ являются ограниченными в пространстве $\mathcal{G}_2^s(D)$ при $s\geqslant 1$.*

5 Исследование оператора Q

Введем дифференциальные операторы

$$\partial = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial z_k}\,dz_k,\qquad \bar\partial = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar z_k}\,d\bar z_k,$$

тогда оператор дифференцирования $d=\partial+\bar\partial$.

Рассмотрим следующее интегральное представление для гладких функций (см. [17]).

Теорема 7. *Пусть D — ограниченная область с границей класса $\mathcal{C}^2$, функция f класса $\mathcal{C}^1(\bar{D})$ и $a_{k,l} \in \mathcal{C}^1(\bar{D})$, $k, l = 1, \ldots, n$, тогда для $z \in D$,*

$$f(z) = \int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\big(U(\zeta, z) + W(\zeta, z)\big) - \int\limits_{D} \bar{\partial} f(\zeta) \wedge \big(U(\zeta, z) + W(\zeta, z)\big), \quad (17)$$

а интеграл по области D в (17) сходится абсолютно.

Первый интеграл в этой формуле это $Q[f]$, а второй интеграл обозначим через $T[f]$:

$$T[f](z) = -\int\limits_{D} \bar{\partial} f(\zeta) \wedge \big(U(\zeta, z) + W(\zeta, z)\big), \qquad z \in D.$$

Так что $f = Q[f] + T[f]$ в области D.

Отметим, что эти операторы являются ограниченными операторами из $\mathcal{W}_2^s(D)$ в $\mathcal{W}_2^s(D)$ в силу следствия 2.

Пусть $f \in \mathcal{W}_2^{1/2}(\Gamma)$. Продолжим f гармонически в область D до функции f^+ из $\mathcal{G}_2^1(D)$, а также продолжим f гармонически в $\mathbb{C}^n \setminus D$ до функции $f^- \in \mathcal{G}_2^1(\mathbb{C}^n \setminus D)$ с условием, что f стремится к нулю на бесконечности как $O(|z|^{1-2n})$ (см., например, [8, Ch. 2]).

Рассмотрим дифференциальные формы (5)

$$\mu_{f^\pm} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k-1} \frac{\partial f^\pm}{\partial \bar{\zeta}_k}\, d\zeta[k] \wedge d\bar{\zeta}.$$

Они являются замкнутыми дифференциальными формами в силу гармоничности функций $f^\pm(z)$ в соответствующих областях. Более того по лемме 3.5 из [5],

$$\mu_{f^\pm}|_\Gamma = 2^{n-1} i^n \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^\pm}{\partial \bar{\zeta}_j} \rho_j\, d\sigma. \quad (18)$$

Определим дифференциальный оператор

$$\overline{\partial}_\nu f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^+}{\partial \bar{z}_j} \rho_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^+}{\partial \nu} - i \frac{\partial f^+}{\partial \tau}\right) \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

и дифференциальный оператор

$$\overline{\partial}_{-\nu} f = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^-}{\partial \bar{z}_j} \rho_j = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^-}{\partial \nu} + i \frac{\partial f^-}{\partial \tau}\right) \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

где ν — единичная внешняя нормаль к Γ, $\tau = i\nu$ — касательный вектор. Эти операторы являются с точностью до константы сужениями дифференциальных форм $\mu_{f^\pm}$ на границу Γ (см. формулу (18)). По сути дела первый оператор есть производная по комплексной нормали к Γ от функции f^+, а второй, соответственно, производная по комплексной нормали к Γ от функции f^-. Аналогично определяются операторы $\partial_{-\nu} f$ и $\partial_\nu f$.

Как показано в [11] (см. также [5, §16]) для функций $f \in \mathcal{G}_2^1(D)$ первое слагаемое интеграла $T[f](z)$ равно (для точек $z \in D$)

$$\int\limits_D \bar\partial f \wedge U(\zeta,z) = -2^{n-1} i^n \int\limits_\Gamma \bar\partial_\nu f(\zeta) g(\zeta,z)\, d\sigma = (\Phi \circ \bar\partial_\nu)[f](z), \qquad (19)$$

кроме того $M = \Phi \circ \overline{\partial}_{-\nu}$ в D.

Теперь преобразуем второе слагаемое интеграла $T[f](z)$:

$$-\int\limits_D \bar\partial f(\zeta) \wedge W(\zeta,z) = -\int\limits_D \bar\partial f(\zeta) \wedge \sum_{k>l} d(a_{k,l}(\zeta) g(\zeta,z))\, d\bar\zeta[l,k] \wedge d\zeta =$$

$$= -\int\limits_D df(\zeta) \wedge \sum_{k>l} d(a_{k,l}(\zeta) g(\zeta,z))\, d\bar\zeta[l,k] \wedge d\zeta =$$

$$= \int\limits_D d\left(df(\zeta) \wedge \sum_{k>l} a_{k,l}(\zeta) g(\zeta,z)\, d\bar\zeta[l,k] \wedge d\zeta \right) =$$

$$= \int\limits_\Gamma df(\zeta) \wedge \sum_{k>l} a_{k,l}(\zeta) g(\zeta,z)\, d\bar\zeta[l,k] \wedge d\zeta =$$

$$= \int\limits_\Gamma g(\zeta,z) \left(df(\zeta) \wedge \sum_{k>l} a_{k,l}(\zeta)\, d\bar\zeta[l,k] \wedge d\zeta \right).$$

Равенство (16) дает

$$df \wedge d\bar\zeta[l,k] \wedge d\zeta\big|_\Gamma = 2^{n-1} i^n (-1)^{k+l-1} \bar\partial_{\tau_{k,l}} f\, d\sigma.$$

Поэтому

$$-\int\limits_D \bar\partial f(\zeta) \wedge W(\zeta,z) = \int\limits_\Gamma g(\zeta,z) \left(df(\zeta) \wedge \sum_{k>l} i a_{k,l}(\zeta)\, d\bar\zeta[l,k] \wedge d\zeta \right) =$$

$$= 2^{n-1} i^{n+1} \int\limits_\Gamma g(\zeta,z) \left(\sum_{k>l} (-1)^{k+l-1} a_{k,l}(\zeta) \bar\partial_{\tau_{k,l}} f(\zeta)\, d\sigma \right). \qquad (20)$$

Из формул (19) и (20) получим выражение для интеграла $T[f](z)$:

$$T[f](z) = 2^{n-1} i^n \int\limits_\Gamma g(\zeta,z) \left(\bar\partial_\nu f(\zeta) + i \sum_{k>l} (-1)^{k+l-1} a_{k,l}(\zeta) \bar\partial_{\tau_{k,l}} f(\zeta) \right) d\sigma.$$

Таким образом получили утверждение (сравни с леммой 1).

Предложение 2. *Для функций $f \in \mathcal{G}_2^1(D)$ справедливо равенство*

$$T[f](z) = -\Phi[t[f]](z), \quad z \in D,$$

где

$$t[f](\zeta) = \left(\bar{\partial}_\nu f(\zeta) + i\sum_{k>l}(-1)^{k+l-1}a_{k,l}(\zeta)\bar{\partial}_{\tau_{k,l}}f(\zeta)\right), \quad z \in D. \tag{21}$$

Лемма 2. *Если* $f \in W_2^{1/2}(\Gamma)$, *то справедливо равенство*

$$\overline{\partial}_\nu \Phi^+[f] + \overline{\partial}_{-\nu}\Phi^-[f] = f \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Это равенство есть аналог теоремы о скачке нормальной производной потенциала простого слоя в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [15, гл. 14]).

Доказательство. Применим равенство (13). При вычислении производных $\dfrac{\partial\Phi^+[f]}{\partial\bar{z}_j}$ мы видим, что второй интеграл в равенствее (13) скачка не имеет, так как он есть потенциал простого слоя от некоторой функции (см., например, [15, гл. 14]). А первый интеграл имеет скачок, определяемый интегралом Бохнера-Мартинелли (теорема 2), равный

$$\sum_{j=1}^n f\rho_j\rho_{\bar{j}} = f.$$

□

Таким образом оператор Φ является взаимно однозначным на $\mathcal{G}_2^1(D)$ и на $\mathcal{G}_2^1(\mathbb{C}^n \setminus \overline{D})$. Поэтому определен обратный оператор Φ^{-1}.

Из предыдущей леммы получаем равенство

$$(\overline{\partial}_\nu + \overline{\partial}_{-\nu})\Phi = I, \tag{22}$$

где I — тождественный оператор.

Тогда из (22) имеем

$$(\overline{\partial}_\nu + \overline{\partial}_{-\nu}) = \Phi^{-1}.$$

Для функций $w, u \in \mathcal{G}_2^1(D)$ (напомним, что пространство $\mathcal{G}_2^1(D)$ топологически изоморфно пространству $\mathcal{W}_2^{1/2}(\Gamma)$) определим билинейную форму

$$B(u,w) = \int_\Gamma \Phi^{-1}[u]\cdot\bar{w}\,d\sigma.$$

В [11] (а также и в [5, §16]) отмечено, что

1. $B(u,u) \geqslant 0$ и $B(u,u) = 0$ только в случае $u = 0$,

2. $B(u,w) = \overline{B(w,u)}$,

3. Норма, определяемая билинейной формой $B(u,w)$, эквивалентна норме пространства $\mathcal{G}_2^1(D)$.

В пространстве $\mathcal{G}_2^s(D)$ введем аналогичную билинейную форму B_s. Если $u \in \mathcal{G}_2^s(D)$, то обозначим через u_α — сужение функций $\partial^\alpha u$ на Γ класса $\mathcal{W}_2^{s-\|\alpha\|-1/2}(\Gamma)$ (мультииндекс $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_{2n})$ и $\|\alpha\| \leqslant s-1$). Их мы продолжим гармонически вне области (с нулем на бесконечности) до функции $u_\alpha^- \in \mathcal{G}_2^{s-\|\alpha\|}(D)$. Тогда для функций $u, w \in \mathcal{G}_2^s(D)$ определим

$$B_s(u,w) = \sum_{\|\alpha\| \leqslant s-1} \int\limits_\Gamma \Phi^{-1}[u_\alpha] \cdot \bar{w}_\alpha \, d\sigma.$$

Ясно, что $B = B_s$ при $s = 1$. Билинейная форма B_s имеет свойства, аналогичные свойствам формы B (см. [5, §16]).

Пространство $\mathcal{G}_2^1(D)$ разлагается в прямую сумму пространств $\mathcal{O}_2^1(D)$ и $\mathcal{Y}(D)$, ортогональных в смысле билинейной формы $B(\cdot,\cdot)$, где $\mathcal{O}_2^1(D)$ — подпространство голоморфных функций из $\mathcal{G}_2^1(D)$, т.е.

$$\mathcal{G}_2^1(D) = \mathcal{O}_2^1(D) \oplus \mathcal{Y}(D).$$

Как показано в [11] (см. также [5, §16]), оператор M является самосопряженным и положительным относительно билинейной формы $B(\cdot,\cdot)$.

Также можно показать, что оператор M является самосопряженным, положительным относительно формы B_s в пространстве $\mathcal{G}_2^s(D)$ и $0 \leqslant M \leqslant I$, и его норма в пространстве $\mathcal{G}_2^s(D)$ относительно формы B_s равна 1.

Рассмотрим $B(G[f],u)$. Найдем сопряженный оператор G^* к оператору G относительно билинейной формы $B(\cdot,\cdot)$. Напомним, что

$$G[f](z) = i\int\limits_\Gamma f(\zeta) \sum_{k>l} d(a_{k,l}(\zeta) g(\zeta,z)) \wedge d\bar{\zeta}[l,k] \wedge d\zeta, \qquad z \notin \Gamma.$$

По лемме 1

$$G[f](z) = -\Phi[h[f]](z),$$

где

$$h[f](\zeta) = i\sum_{k>l} (-1)^{k+l} a_{k,l}(\zeta) \bar{\partial}_{\tau_{k,l}} f(\zeta).$$

Поэтому

$$B(G[f],u) = -B(\Phi[h[f]],u) = -\int\limits_\Gamma h[f](\zeta) \cdot \bar{u}(\zeta)\, d\sigma =$$

$$= -i\int\limits_\Gamma \sum_{k>l} (-1)^{k+l} a_{k,l}(\zeta) \bar{\partial}_{\tau_{k,l}} f(\zeta) \bar{u}(\zeta)\, d\sigma =$$

$$= i\int\limits_\Gamma \sum_{k>l} (-1)^{k+l} a_{k,l}(\zeta) \bar{\partial}_{\tau_{k,l}} \bar{u}(\zeta) f(\zeta)\, d\sigma = B(f, G[u]),$$

поскольку

$$-\int\limits_\Gamma \sum_{k>l} (-1)^{k+l} \bar{\partial}_{\tau_{k,l}} (a_{k,l} f \bar{u})(\zeta)\, d\sigma = 0.$$

Последнее равенство следует из того, что под знаком интеграла стоит сужение на Γ $\overline{\partial}$-точной формы

$$\sum_{k>l} \overline{\partial}(a_{k,l} f\bar{u}) \wedge d\bar{\zeta}[k,l] \wedge d\zeta.$$

Таким образом получаем утверждение

Предложение 3. *Оператор G является самосопряженным относительно билинейной формы $B(\cdot,\cdot)$, т.е. $G^* = G$.*

Отсюда получаем

Следствие 3. *Оператор Q является самосопряженным относительно билинейной формы $B(\cdot,\cdot)$ и*

$$Q[u] = Q^*[u] = (M+G)^*[u] = M[u] - \Phi[h[u]] = \Phi[\overline{\partial}_{-\nu}u - h[u]]. \tag{23}$$

6 Итерации оператора Q

Для исследования итераций оператора Q нам потребуются некоторые свойства самосопряженных операторов. Эти сведения можно найти в монографиях [18] – [21].

Сначала найдем нормы элементов и операторов относительно билинейной формы $B(\cdot,\cdot)$. Для функции $u \in \mathcal{G}_2^1(D)$ ее норма $\|u\|_B$ равна

$$\|u\|_B^2 = B(u,u) = \int\limits_\Gamma \Phi^{-1}[u]\cdot \bar{u}\, d\sigma =$$

$$= \int\limits_\Gamma (\bar{\partial}_\nu u + \bar{\partial}_{-\nu} u)\bar{u}\, d\sigma = \frac{1}{2^{n-1}i^n}\int\limits_\Gamma (\mu_{u^+}u + \mu_{u^-}u)\cdot \bar{u} =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}i^n}\int\limits_D (|\operatorname{grad} u^+|^2 d\bar{z}\wedge dz + \frac{1}{2^{n-1}i^n}\int\limits_{\mathbb{C}^n\setminus D} (|\operatorname{grad} u^-|^2 d\bar{z}\wedge dz =$$

$$= \int\limits_D (|\operatorname{grad} u^+|^2\, dv + \int\limits_{\mathbb{C}^n\setminus D} (|\operatorname{grad} u^-|^2\, dv,$$

в силу формул (1) и (2). Таким образом квадрат нормы элемента $u \in \mathcal{G}_2^1(D)$ равен сумме интегралов Дирихле этого элемента в области и вне области.

Предложение 4. *Оператор M является положительным, самосопряженным относительно билинейной формы $B(\cdot,\cdot)$ его норма $\|M\|_B = 1$ и выполнено неравенство $0 \leqslant M \leqslant I$, где I — тождественный оператор.*

Доказательство. Положительность, самосопряженность оператора M и неравенство $0 \leqslant M \leqslant I$ доказана Романовым в [11] (см. также [5, §16]). Найдем его норму. Для этого воспользуемся теоремой 2 из [20]), что

$$\|M\|_B = \sup_{\|u\|_B=1} B(Mu,u).$$

Как в предыдущих формулах имеем

$$B(M[u],u) = \int\limits_{\Gamma} \overline{\partial}_{-\nu} u \cdot \bar{u}\, d\sigma = \int\limits_{\mathbb{C}^n \setminus D} (|\operatorname{grad} u^-|^2\, dv \leqslant \|u\|_B^2.$$

Так что $B(Mu,u) \leqslant 1$. С другой стороны, если u голоморфно продолжается в область, то $Mu = u$. Поэтому $\|M\|_B = 1$. □

Найдем норму оператора Q относительно билинейной формы B.

Предложение 5. *Оператор Q является положительным и самосопряженным относительно билинейной нормы $B(\cdot,\cdot)$. Норма оператора $\|Q\|_B = 1$. Справедливы неравенства $0 \leqslant Q \leqslant I$.*

Доказательство. Воспользуемся следствием 3 (равенство (23))

$$Q[u] = \Phi[\overline{\partial}_{-\nu} u - h[u]].$$

Как отмечено в [21, §93] для самосопряженного оператора Q справедливы равенства

$$\sup_u |B(Q[u],u)| = \sup_u \|Q[u]\|_B = \|Q\|_B,$$

если $\|u\|_B = 1$.

Поскольку гладкие функции плотны в пространстве $\mathcal{G}_2^1(D)$ и в пространстве $\mathcal{L}_2^{1/2}(\Gamma)$, в качестве функций u можно брать гладкие функции.

Возьмем такую функцию u и продолжим ее гладко на $\bar{D}$, получим

$$B(Q[u],u) = \int\limits_{\Gamma} (\overline{\partial}_{-\nu} u - h[u]) \cdot \bar{u}\, d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} \left(\overline{\partial}_{-\nu} u - i \sum_{k>l} (-1)^{k+l} a_{k,l}(\zeta) \bar{\partial}_{\tau_{k,l}} u(\zeta) \right) \bar{u}(\zeta)\, d\sigma.$$

Преобразуем второй интеграл в этой формуле

$$\int\limits_{\Gamma} \sum_{k>l} (-1)^{k+l} \left(a_{k,l}(\zeta) \bar{\partial}_{\tau_{k,l}} u(\zeta) \right) \bar{u}(\zeta)\, d\sigma =$$

$$= c \int\limits_{\Gamma} \sum_{k>l} (-1)^{k+l} \bar{u}(\zeta) a_{k,l}(\zeta) \overline{\partial} u(\zeta) \wedge d\bar{\zeta}[k,l] \wedge d\zeta =$$

$$= c \int\limits_{D} \sum_{k>l} (-1)^{k+l} a_{k,l} \overline{\partial} \bar{u}(\zeta) \wedge \overline{\partial} u(\zeta) \wedge d\bar{\zeta}[k,l] \wedge d\zeta. \tag{24}$$

Далее, выделим действительную и мнимую части функции $u = u_1 + iu_2$, получим

$$\overline{\partial} \bar{u}(\zeta) \wedge \overline{\partial} u(\zeta) = \overline{\partial}(u_1 - iu_2) \wedge \overline{\partial}(u_1 + iu_2) = 2i \overline{\partial} u_1 \wedge \overline{\partial} u_2.$$

Тогда интеграл в формуле (24) будет равен

$$\int\limits_D \overline{\partial} u_1(\zeta) \wedge \overline{\partial} u_2(\zeta) \wedge \left(\sum_{k>l} (-1)^{k+l} a_{k,l} d\bar{\zeta}[k,l] \wedge d\zeta \right).$$

Рассмотрим одну часть подынтегральной формы

$$\overline{\partial} u_1(\zeta) \wedge \overline{\partial} u_2(\zeta) \wedge d\bar{\zeta}[k,l] \wedge d\zeta. \tag{25}$$

Так как на поверхности Γ функция $\rho = 0$, то $d\rho = 0$. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_j} d\zeta_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_j} d\bar{\zeta}_j = 0 \tag{26}$$

Тогда в форме $\overline{\partial} u_1(\zeta) \wedge \overline{\partial} u_2(\zeta)$ из (25) нужно оставить только слагаемые с номерами k, l. Но так как выполнено равенство (26), то все это выражение будет равно нулю на Γ, поскольку в нем $d\bar{\zeta}_k$ будет выражаться через $d\bar{\zeta}_l$.

Так что вся подынтегральная форма

$$\overline{\partial} u_1(\zeta) \wedge \overline{\partial} u_2(\zeta) \wedge \left(\sum_{k>l} (-1)^{k+l} a_{k,l} d\bar{\zeta}[k,l] \wedge d\zeta \right) \tag{27}$$

будет равняться нулю на Γ.

Осталось выбрать продолжение $u_1,\ u_2$ такое, что дифференциальная форма (27) равнялась нулю в области D, что, очевидно, всегда можно сделать.

Тогда

$$0 \leqslant B(Q[u], u) = \int\limits_\Gamma (\overline{\partial}_{-\nu} u) \cdot u \, d\sigma = \int\limits_{\mathbb{C}^n \setminus D} (|\operatorname{grad} u^-|^2 \, dv \leqslant \|u\|_B^2 \leqslant 1.$$

Если функция u — вещественнозначная, то доказательство становится проще, поскольку в этом случае

$$\overline{\partial} u(\zeta) \wedge \overline{\partial} \bar{u}(\zeta) = \overline{\partial} u(\zeta) \wedge \overline{\partial} u(\zeta) = 0$$

для любого вещественнозначного продолжения u в область D.

Поэтому оператор Q — положительный и его норма не превосходит 1. Так как он сохраняет голоморфные функции u, то $\|Q\|_B = 1$. Так как $\|Q\|_B = 1$ и оператор Q положительный и самосопряженный, то $0 \leqslant Q \leqslant I$ (см. [19, §3]). $\square$

Отметим также

Следствие 4. *Число 0 не является собственным числом оператора Q. Ядро оператора T совпадает с $\mathcal{O}_2^1(D)$.*

Доказательство. Действительно, если $Q[u] = 0$, то по уже доказанному выше

$$0 = B(Q[u], u) = \int_{\Gamma} (\overline{\partial}_{-\nu} u) \cdot u \, d\sigma = \int_{\mathbb{C}^n \setminus D} (|\operatorname{grad} u^-|^2 \, dv.$$

Поэтому u^- является голоморфной функцией вне области с нулем на бесконечности. Тогда по теореме Гартогса-Бохнера она голоморфно продолжается в область D. И значит $u = 0$.

Пусть $T[f] = 0$. Из вида операторов T и t (формула (21)) получаем, что

$$T[f](z) = -\Phi[t[f]](z), \quad z \in D,$$

где

$$t[f](\zeta) = \left(\bar{\partial}_\nu f(\zeta) + i \sum_{k>l} (-1)^{k+l-1} a_{k,l}(\zeta) \bar{\partial}_{\tau_{k,l}} f(\zeta) \right), \quad z \in D.$$

Применяя к этому интегралу рассуждения из предложения 4 получим, что

$$B(T[f], f) = \int_D |\operatorname{grad} f^+|^2 \, dv = 0.$$

Отсюда получаем, что функция f голоморфна в D. □

Для самосопряженного оператора A обозначим через

$$\mathbf{m}(A) = \inf_{\|u\|_B = 1} B(u, u), \quad \mathbf{M}(A) = \sup_{\|u\|_B = 1} B(u, u)$$

(см., например, [19, §2], [20, §7]). Тогда для такого оператора A (см., например. [19, теорема 2.4]) известно, что спектр $\sigma(A)$ — вещественный и принадлежит отрезку

$$\sigma(A) \subset [\mathbf{m}(A), \mathbf{M}(A)],$$

и $\|A\| \in \sigma(A)$.

Отсюда и из предложений 4 и 5 получаем, что спектр σ операторов M, Q лежат на отрезке $[0, 1]$, т.е. $\sigma(M) \subset [0, 1]$ и $1 \in \sigma(M)$, $\sigma(Q) \subset [0, 1]$, $1 \in \sigma(Q)$.

Пространство $\mathcal{G}_2^1(D)$ является гильбертовым сепарабельным пространством относительно билинейной формы $B(\cdot, \cdot)$. Более того, пространство $\mathcal{G}_2^s(D)$ является плотным в пространстве $\mathcal{G}_2^1(D)$ в метрике, порожденной формой B.

Справедлива теорема

Теорема 8. *В пространстве $\mathcal{G}_2^1(D)$ существует полная ортонормированная относительно формы $B(\cdot, \cdot)$ система функций $\{\psi_k(\zeta)\}$, $k \in \mathbb{N}$, состоящая из собственных функций оператора Q, т.е. $Q[\psi_k] = \lambda_k \psi_k$, где собственные числа $0 < \lambda_k \leqslant 1$.*

Доказательство. То, что все собственые числа строго больше нуля (если они существуют) мы уже отмечали (следствие 4).

Мы докажем эту теорему, используя схему из [21, Ch. 6]. Сложность заключается в том, что оператор Q не является компактным в $\mathcal{G}_2^s(D)$, поскольку он сохраняет голоморфные функции. Напомним,что оператор Q является ограниченным в пространстве $\mathcal{G}_2^s(D)$, $s \geqslant 1$ (следствие 2).

Вложение $\mathcal{G}_2^s(D)$ в $\mathcal{W}_2^p(D)$ является компактным оператором при $s > p$ (см., например, [8, Theorem 3.1]). Поэтому оператор Q является компактным из $\mathcal{G}_2^s(D)$ в $\mathcal{W}_2^p(D)$ при $s > p$.

Сначала докажем, что у оператора Q есть собственная функция с собственным число равным 1 (в данном случае это очевидно, поскольку оператор сохраняет голоморфные функции, но в дальнейшем нам понадобится это утверждение для других собственных чисел). Отметим, что все собственные функции с собственным числом равным 1 голоморфны (см. следствие 4).

Как отмечено в [21, §93] для самосопряженного оператора Q справедливы равенства

$$\sup_f |B(Q[f], f)| = \sup_f \|Q[f]\|_B = \|Q\|_B = 1,$$

если $\|f\|_B = 1$.

Так как в пространстве $\mathcal{G}_2^2(D)$ оператор Q также имеет норму 1, то существует последовательность $\{f_k\}$ функций из $\mathcal{G}_2^2(D)$ такая, что

$$\|f_k\|_B = 1 \quad \text{и} \quad |B(Qf_k, f_k)| \to \|Q\|_B = 1, \quad k \to \infty.$$

Мы выберем f_k так, чтобы последовательность $B(Q[f_k], f_k)$ сама сходилась, т.е.

$$B(Q[f_k], f_k) \to \lambda_1, \quad k \to \infty,$$

где $\lambda_1 = \|Q\|_B = 1$, либо $\lambda_1 = -\|Q\|_B = -1$.

Квадратный трехчлен

$$\|Q[f_k]\|_B^2 - 2\lambda_1 B(Q[f_k], f_k) + \lambda_1^2 \|f_k\|_B^2 = \|Q[f_k] - \lambda_1 f_k\|_B^2 \geqslant 0$$

и стремится к нулю, так как

$$\|Q[f_k]\|_B^2 \leqslant \|Q\|_B^2 = \lambda_1^2, \quad B(Q[f_k], f_k) \to \lambda_1, \quad \|f_k\|_B = 1.$$

Таким образом

$$Q[f_k] - \lambda_1 f_k \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty \tag{28}$$

для некоторой последовательности функций $\{f_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, в пространстве $\mathcal{G}_2^2(D)$.

Теперь воспользуемся тем, что оператор Q является компактным из $\mathcal{G}_2^2(D)$ в $\mathcal{W}_2^1(D)$. Последовательность $\{f_k\}$ ограничена в $\mathcal{G}_2^2(D)$, поэтому она является компактной в $\mathcal{W}_2^1(D)$. Т.е. из нее можно выбрать подпоследовательность сходящуюся в пространстве $\mathcal{W}_2^1(D)$. Можно считать, что это сама последовательность $\{f_k\}$ сходится к $f_0 \in \mathcal{W}_2^1(D)$.

Рассмотрим

$$f_k(z) - f_m(z), \quad z \in D.$$

Тогда по теореме о среднем для гармонических функций (см., например, [22, гл. 3]), получим

$$f_k(z) - f_m(z) = \frac{1}{V(C)} \int\limits_C (f_k(\zeta) - f_m(\zeta))\, dv,$$

где C — некоторый шар с центром в точке z, а $V(C)$ — его объем. Далее (по неравенству Коши-Буняковского)

$$|f_k(z) - f_m(z)| \leqslant \frac{1}{V(C)} \int\limits_C |f_k(\zeta) - f_m(\zeta)|\, dv \leqslant \int\limits_C |f_k(\zeta) - f_m(\zeta)|^2\, dv \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_D |f_k(\zeta) - f_m(\zeta)|^2\, dv \leqslant \|f_k - f_m\|^2_{\mathcal{W}_2^1(D)}.$$

Так что последовательность $\{f_k\}$ является фундаментальной в D относительно равномерной сходимости. Поэтому она равномерно сходится в D к функции f_0. Из свойств гармонических функций тогда получаем, что f_0 являетсся гармонической в D, и последовательность $\{f_k\}$ равномерно сходится к f_0 вместе со всеми производными на любом компакте в D. Мы отмечали, что функция $f_0 \in \mathcal{W}_2^1(D)$, поэтому $f_0 \in \mathcal{G}_2^1(D)$ и последовательность $\{f_k\}$ сходится к f_0 в пространстве $\mathcal{G}_2^1(D)$.

Тогда согласно (28) получаем, что $Q[f_0] = \lambda_1 f_0$. Следовательно, $\lambda_1 = 1$ и f_0 является собственной функцией оператора Q.

Рассмотрим подпространство $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{G}_2^1(D)$, состоящее из всех собственных векторов f с собственным числом $\lambda_1 = 1$. Оно совпадает с $\mathcal{O}_2^1$ (см. следствие 4) и значит бесконечномерно. Более того — это замкнутое подпространство в $\mathcal{G}_2^1(D)$, т.е. гильбертово.

В нем существует полная ортонормированная система функций $\{\varphi_k^1\}$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому мы можем рассмотреть ортогональное дополнение к $\mathcal{L}_1$ в смысле билинейной формы $B(\cdot,\cdot)$ — пространство $\mathcal{L}_1^\perp$. Оно также является замкнутым подпространством в $\mathcal{G}_2^1(D)$.

Оператор Q отображает $\mathcal{L}_1^\perp$ в $\mathcal{L}_1^\perp$, поскольку для $f \in \mathcal{L}_1^\perp$ имеем

$$B(Q[f], \varphi_k^1) = B(f, Q[\varphi_k^1]]) = B(f, \varphi_k^1) = 0$$

для всех функций φ_k^1. Так что оператор Q является положительным и самосопряженным на $\mathcal{L}_1^\perp$, более того он является компактным из пространства $\mathcal{L}_1^\perp$ в пространство $\mathcal{L}^2(D)$.

Тогда $\|Q\|_{\mathcal{L}_1^\perp} = \lambda_2 < 1$, поскольку если бы λ_2 равнялось 1, то в этом пространстве (согласно предыдущему рассмотрению) существовал бы собственный элемент с собственным числом 1, что невозможно по построению пространства $\mathcal{L}_1$.

Применяя предыдущее рассуждение для оператора Q на $\mathcal{G}_2^2(D)$ мы получим, что существует собственная функция $f \in \mathcal{L}_1^\perp$ с условием, что $Q[f] = \lambda_2 f$.

Рассмотрим теперь подпространство $\mathcal{L}_2$, состоящее из всех таких собственных векторов f. Оно замкнуто и содержит полную ортонормированную систему элементов $\{\varphi_k^2\}$. Обозначим через $\mathcal{L}_2^\perp$ — ортогональное дополнение к пространству $\mathcal{L}_2$ в $\mathcal{L}_1^\perp$. В нем мы проделаем те же самые построения как в предыдущем случае и т.д. Тогда получим систему подпространств $\mathcal{L}_m$ и $\mathcal{L}_m^\perp$, систему собственных чисел λ_m и собственных функций f_m, отвечающих этим собственным числам и полные ортонормированные системы функций $\{\varphi_k^\lambda\}$ из пространства $\mathcal{L}_m^\perp$.

При этом возможны два случая:

1. Система $\{\lambda_k\}$ конечна. Это означает, что число собственных чисел λ_k конечно и $\mathcal{G}_2^1(D)$ является конечной суммой собственных подпространств оператора Q.

2. Система $\{\lambda_k\}$ бесконечна. В этом случае λ_k строго убывающая последовательность стремящаяся к нулю. Докажем это.

Предположим, что λ_k не стремятся к нулю, тогда выбирая для числа λ_k нормированную собственную функцию φ_k получим, что последовательность $\{\varphi/\lambda_k\}$ ограничена, а последовательность образов $\{\varphi_k\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность, что невозможно, так как $\|\varphi_k - \varphi_m\|_B^2 = 2$ при $k \neq m$.

Объединим все собственные ортонормированные системы во всех пространствах $\mathcal{L}_m^\perp$ в одну ортонормированную систему функций, обозначим ее через $\{\psi_k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Покажем, что она является полной в $\mathcal{G}_2^1(D)$.

В случае конечного числа собственных чисел λ_k это очевидно, поскольку $\mathcal{G}_2^1(D)$ является конечной суммой собственных подпространств оператора Q.

Пусть количество собственных чисел бесконечно. Для функции $f \in \mathcal{G}_2^1(D)$ рассмотрим функцию

$$h_m = \sum_{k=1}^{m} B(f, \psi_k)\psi_k.$$

Тогда h_m принадлежит подпространству, образованному элементами ортогональными элементам $\psi_1, \dots, \psi_m$, поэтому

$$\|Q[h_m]\|_B \leqslant \lambda_{m+1}\|\psi_m\|_B.$$

Кроме того

$$\|h_m\|_B^2 = \|f\|_B^2 - \sum_{j=1}^{m} |B(f, \psi_j)|^2 \leqslant \|f\|_B.$$

Поэтому

$$Q[h_m] = Q[f] - \sum_{j=1}^{m} B(f, \psi_j)Q[\psi_j] \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тогда

$$Q[f] = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j B(f, \psi_j)\psi_j = \sum_{j=1}^{\infty} B(f, Q\psi_j])\psi_j.$$

То есть

$$Q[f] = \sum_{j=1}^{\infty} B(Q[f], \psi_j)\psi_j$$

Пусть теперь f — произвольный элемент из $\mathcal{G}_2^1(D)$. По известным свойствам гильбертова пространства сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} B(f, \psi_j)\psi_j = w$$

и $w \in \mathcal{G}_2^1(D)$. Применив к этому ряду оператор Q, получим

$$Q[w] = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j B(f, \psi_j)\psi_j.$$

С другой стороны мы только что доказали, что

$$Q[f] = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j B(f, \psi_j)\psi_j.$$

Поэтому $Q[f] = Q[w]$. Тогда $Q[f - w] = 0$. Но у Q нет нулевых собственных значений, поэтому система $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ полна в $\mathcal{G}_2^1(D)$.

□

Поскольку оператор M имеет те же свойства, что и оператор Q, то для него справедливо аналогичное утверждение.

Теорема 9. *В пространстве $\mathcal{G}_2^1(D)$ существует полная ортонормированная относительно формы $B(\cdot,\cdot)$ система функций $\{\phi_k(\zeta)\}$, $k \in \mathbb{N}$, состоящая из собственных функций оператора M, т.е. $M[\phi_k] = \mu_k\phi_k$, где собственные числа $0 < \mu_k \leqslant 1$.*

Рассмотрим функцию $u \in \mathcal{G}_2^1(D)$ и разложим ее в ряд по системе $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\psi_j.$$

Вычисляя итерации оператора Q, получим

$$Q^m[u] = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^m c_j\psi_j.$$

Выделяя в этой сумме члены с собственным числом равным 1 (они определяют некоторую голоморфную функцию f из $\mathcal{O}_2^1(D)$)

$$f(z) = \sum_{j_k} c_{j_k} \psi_{j_k}(z).$$

Тогда

$$B(Q^m[u](z) - f(z), u(z) - f(z)) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Получили утверждение:

Теорема 10. *Справедливо свойство*

$$Q^m[u] \to Pr_{\mathcal{O}}[u] \quad \textit{при} \quad m \to \infty$$

в сильной операторной топологии пространства $\mathcal{G}_2^1(D)$.

Отметим, что из теоремы 9 мы получаем теорему 3 А.В.Романова.

7 Некоторые следствия

Следствие 5. *Пусть D — ограниченная область со связной границей Γ, функция $f \in \mathcal{C}(\bar{D})$, CR-функции $a_{l,k} \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$, $k, l = 1, \ldots, n$ и выполнено условие (10) в области D (т.е. $Q[f] = f$ в D), тогда функция f голоморфна в D.*

Доказательство. Так как $Q[f] = f$ в D, то $Q^2[f] = Q[Q[f]] = Q[f]$ и т.д. Получаем, что $Q^k[f] = f$ в D. С другой стороны итерации $Q^k[f]$ стремятся в D к голоморфной функции φ. □

Таким образом, задача 3 решена положительно.

Следствие 6. *Пусть D — ограниченная область со связной границей Γ, функция $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$, CR-функции $a_{l,k} \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$, $k, l = 1, \ldots, n$, и выполнено условие*

$$Q[f](z) = 0 \quad \textit{вне множества} \quad \bar{D}, \tag{29}$$

тогда функция f голоморфно продолжается в D до функции $F \in \mathcal{C}(\bar{D})$.

Доказательство. По формуле (11) имеем

$$Q[f](z) = M[f](z) + G[f](z) = \int_\Gamma f(\zeta)\big(U(\zeta, z) + W(\zeta, z)\big) \quad z \notin \Gamma.$$

Скачок интеграла $M[f]$ равен f (см. теорему 2), т.е. $M^+[f] - M^-[f] = f$ на Γ. Скачок интеграла $G[f]$ равен 0, поскольку по лемме 1 интеграл $G[f] = -\Phi[h[f]]$, а хорошо известно (см., например, [6, Ch. 2]), что скачок потенциала простого слоя Φ равен нулю.

Отсюда получаем, что если $Q^-[f] = 0$ вне замыкания области D, то $Q^+[f]$ является гармоническим продолжением функции f в область D. По предыдущему следствию тогда $Q^+[f]$ голоморфна в D. □

Следствие 7. *Пусть D — ограниченная область со связной границей, функция $f \in \mathcal{C}(\bar{D})$, CR-функции $a_{l,k} \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$, $k, l = 1, \ldots, n$, и для некоторого натурального числа s_0 выполнено условие*

$$Q^{s_0}[f](z) = f(z), \quad z \in D,$$

тогда f голоморфна в D.

Доказательство. Рассмотрим итерации $Q^{ks_0}[f](z)$. Они стремятся к голоморфной функции в D. С другой стороны они все равны $f(z)$. □

В заключение приведем теорему.

Теорема 11. *Пусть $f \in \mathcal{C}(\bar{D})$ и f гармоническая в D, $w(\rho) \neq 0$ на ∂D. Если*

$$\bar{w}(f) = \sum_{k=1}^{n} \bar{w}_k \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0 \quad \textit{на} \quad \Gamma,$$

то f голоморфна в D.

Таким образом, задача 1 решается положительно для функций данного класса.

References

[1] Vladimiirov V.S. *Methods of the theory of functions of many complex variables*, Cambridge, MIT Press, MA, 1986.

[2] Shabat B.V. *Introduction to complex analysis. Part 2. Function of several variables*, Amer. Math. Soc., Providence, 1992.

[3] Range R.M. *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables*, Springer–Verlag, New-York, 1986.

[4] Aizenberg L.A., Yuzhakov A.P. *Integral Representations and Residues in Multidimensional Complex Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.

[5] Kytmanov A.M. *The Bochner-Martinelli integral and its applications*, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1995.

[6] Günter N.M. *Potential theory andd its applications to basic problems of mathematical physics*, Ungar, New York, 1967.

[7] Kytmanov A.M., Myslivets S.G. *Multidimensional Integral Representations. Problems of Analytic Continuation*, Springer Verlag, Basel, Boston, 2015.

[8] Egorov Yu.V., Shubin M.A. *Partial differential equations 1. Foundations of the classical theory*, Encyeclopaedia of Mathematical Sciences, V. 3, Springer Verlag, Berlin, 1992.

[9] Khenkin G.M., Chirka E.M. *Boundary properties of holomorphic functions of several complex varisbles*, Journal of Soviet Mathematics, **5** (1976), 612–687.

[10] Gilbarg D., Trudinger N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.

[11] Romanov A.V. *Convergence of itarates of the Bochner-Martinelli operator and the Cauchy-Riemann equation*, Soviet Math. Docl. **119**:5 (1978), 1211-1215.

[12] Kytmanov A.M., Myslivets S.G. *Iterates of the Bochner–Martinelli Integral Operator in a Ball*, Журн. СФУ. Сер. матем. и физ. **2**:2 (2009), 137–145.

[13] Leray J. *Fonction de variables complexe; sa representation comme somme de puissances negatives de fonctions lineares*, R.C. Accad. Lincei Rend. Cl. Si. Fiz Mat Natur. **20**:5 (1956), 589-590.

[14] Leray J. *Le calcul differentiel et integral sur une variete analytique complexe. (Probleme de Cauchy. III.)*, Bulletin de la Societe Mathematique de France, **87** (1959), 81-180.

[15] Mikhlin S.G. *Linear partial equations*, Vyssshaya shkola, M., 1977 (in Russian).

[16] Myslivets S.G. *Integral operator of potential type for infinitely differentiable functions*. Журн. СФУ. Сер. матем. и физ., **17**:4 (2024), 464–469. EDN: GIMRFC

[17] Kytmanov A.M., Myslivets S.G. *On one integral representation of the potential type*, Журн. СФУ. Сер. матем. и физ. **18**:3 (2025), 293–299 (предварительная публикация).

[18] Akhiezer N.M., Glazman I.M. *Theory of Linear Operators in Hilbert Spase*, Dover Publications Ink., New York, 1993.

[19] Il'in A.M., Danilin A.R. *Spectral Decomposition of Self-Adjoint Operators*, Ural State University, Ekaterinburg, 2018 (in Russian).

[20] Birman M.S., Solomjak M.Z. *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*, Springer Nature Link, Dordreht, 1987.

[21] Riesz F., Sz.-Nagy B. *Lecons D'Analyze Fonctionnelle*, Akademiai Kiado, Budapest, 1972.

[22] Timan A.F., Trofimov V.N. *Introduction to theory of harmonic functions*, Nauka, M., 1968 (in Russian).

Alexander Mechislavovich Kytmanov
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
E-mail address: akytmanov@sfu-kras.ru

Simona Glebovna Myslivets
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
E-mail address: smyslivets@sfu-kras.ru